

Multi-Machine Power System Simulation via Differential Transformation

Ricardo Galarza-Villa , *Student Member, IEEE*, Alejandro Zamora-Mendez , *Member, IEEE*, Carlos Pérez-Rojas , *Member, IEEE*, and Mario R. Arrieta Paternina , *Member, IEEE*

Abstract—In this paper, the differential transformation (DT) is applied to the dynamic analysis of multi-machine systems, whose solution is numerically obtained by solving a set of differential-algebraic equations that represent the power system dynamics. This method is an algorithm to calculate the Taylor coefficients in a fast and efficient way, making the Taylor method competitive against traditional numerical integration methods such as the modified Euler (ME) method and trapezoidal rule (TR). Thus, the DT's rules for solving differential-algebraic equations of large multi-machine power systems are applied. To exhibit the DT's performance, the power system toolbox (PST) is adopted and compared against other integration methods for multi-machine power system simulation. Finally, time-domain simulations on the WECC and Mexican systems are performed by means of DT and compared with ME and TR methods to demonstrate the effectiveness of the proposal, showcasing that our proposal improves up to 12 times the traditional methods.

Link to graphical and video abstracts, and to code:
<https://latam.ieceer9.org/index.php/transactions/article/view/9205>

Index Terms—Differential transformation, multi-machine simulation, transient stability, numerical integration, power system toolbox.

I. INTRODUCCIÓN

HOY en día, los constantes cambios que presentan las redes de energía eléctrica han proliferado un entorno menos regulado, obligando a operarlas de una manera para la que no fueron diseñadas inicialmente. Por lo tanto, el análisis de los sistemas de potencia es muy importante para predecir y actualizar continuamente el estado operativo de la red. Esto incluye determinar los límites de estabilidad del sistema mediante la integración numérica para la estabilidad transitoria [1]. En este contexto, la simulación dinámica del sistema de potencia cobra importancia para que los centros de control de energía evalúen la seguridad dinámica al resolver el problema de condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales no lineales del sistema de potencia, ante contingencias que ocurren bajo una condición de operación específica [2], [3]. Los métodos de integración numérica, incluidos los métodos explícitos e implícitos, se usan comúnmente en paquetes de software comerciales con un paso de integración lo suficientemente pequeño, típicamente de varias decenas de milisegundos, para cumplir con los requisitos de precisión y estabilidad numérica [3].

Así, a medida que los sistemas eléctricos de potencia (SEPs) operan cada vez más en condiciones de estrés, la simulación por

computadora desempeña un papel importante en la evaluación del control y seguridad en los mismos. Es por esto, que se buscan técnicas matemáticas y computacionales para acelerar los procesos de simulación. Estas técnicas deben ser confiables y tener tiempos de simulación adecuados.

En la literatura, un gran número de publicaciones reportan la operación y planeación de los SEPs, asimismo resaltan la importancia que esto conlleva en la vida moderna. Los SEPs tienen un gran número de componentes que trabajan simultáneamente, uno de estos componentes es el generador síncrono, que es de gran importancia ya que de estos proviene la mayor parte de la energía para ser consumida. Los modelos de dicho elementos son ampliamente divulgados [4]–[6]. Además, los generadores se pueden representar por diferentes modelos, algunos de ellos se reducen despreciando dinámicas de no interés que dependen del enfoque bajo estudio y que conllevan a tener un número reducido de ecuaciones diferenciales por resolver. En [4], [5], se muestra de forma detallada como se reducen estos modelos, partiendo del modelo completo hasta llegar al modelo clásico o electromecánico.

De forma similar, también existen publicaciones sobre la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), como por ejemplo [1], [7], [8], donde se rescatan los métodos de Euler Modificado (EM), Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y Regla Trapezoidal (RT), muy comunes en los programas de simulación dinámica de SEPs.

Por otro lado, existe el método de la Transformación Diferencial (TD) [9], [10], cuya aplicación los SEPs se ha introducido recientemente para el análisis dinámico de los SEPs [3], [11], [12]. La TD es un algoritmo eficiente para obtener los coeficientes de Taylor de orden k -ésimo de forma exacta en cada paso de integración, mediante ciertas reglas de transformación [13], [14] aplicadas a cada una de las ecuaciones algebraico-diferenciales (EADs) que conforman el modelo del sistema de potencia. Así, al incrementar el número de coeficientes de Taylor, también se puede incrementar la precisión y la estabilidad numérica del método [15]. Una vez que se tiene el modelo EAD del SEP transformado, se procede con la programación y simulación del mismo.

I-A. Novedad y Contribuciones

La novedad de esta investigación radica en la modificación y mejora de una herramienta académico-investigativa como *power system toolbox*, mediante el uso de la transformación diferencial en sustitución del algoritmo de Euler de orden 2 para propósitos de integración numérica. Gracias a la introducción de la transformación diferencial al PST, se lograron las siguientes contribuciones:

- Reducción de los tiempos de cómputo para resolver simulaciones transitorias multimáquina en sistemas eléctricos

The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Diego Rivelino Espinoza-Trejo (*Corresponding author: Alejandro Zamora-Mendez*).

Alejandro Zamora-Mendez, R. Galarza-Villa, and C. Pérez-Rojas are with Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México (e-mails: azamoram@umich.mx, 1040158e@umich.mx, and carlos.perez@umich.mx).

Mario R. Arrieta Paternina is with the Department of Electrical Engineering, National Autonomous University of Mexico, Mexico City 04510, Mexico (e-mail: mra.paternina@fi-b.unam.mx).

de potencia mediante la incorporación de la transformada diferencial como técnica de integración numérica.

- Modificación de las funciones de PST asociadas a los modelos dinámicos de los generadores y excitadores, mediante las reglas de la transformación diferencial [4], [16], que trabajan bajo el entorno de MATLAB, el cual se adapta para que las simulaciones transitorias puedan realizarse fácilmente mediante la TD y las reglas de integración RT y EM (método numérico original del PST).
- La incorporación de la transformada diferencial en una plataforma educacional para resolver un conjunto de ecuaciones algebraico-diferenciales que representan las principales dinámicas de un sistema de potencia. Con la cual se puede incrementar el orden del polinomio de Taylor al nivel que se desee, lo que conlleva a una mayor precisión sin tener que reducir el paso de integración h .

Cabe mencionar que la metodología que se sigue es similar a la presentada en [3], con la diferencia de que en nuestra propuesta se utilizan los modelos clásico y transitorio del generador sincrónico para las simulaciones, mientras que en [3] sólo se usa un modelo con los voltajes subtransitorios.

II. MÉTODOS

DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA PARA SISTEMAS DE POTENCIA

Los sistemas dinámicos pueden ser modelados por sistemas de EDOs de la forma

$$y'(t) = f(y, t) \quad y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

donde $y(t) \in \mathcal{R}^n$ es una función variante en el tiempo que depende de la condición inicial y_0 . Un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, normalmente no se puede resolver analíticamente. En otras palabras, (1) se debe resolver de manera numérica [1].

La solución numérica de (1) requiere del cálculo de una secuencia de puntos y_0, y_1, y_2, \dots que permiten realizar una aproximación a la solución real en un conjunto de puntos en el tiempo t_0, t_1, t_2, \dots . El intervalo entre puntos adyacentes en el tiempo es llamado paso de integración o tamaño de paso y es definido como $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$, el cual puede ser constante o variante para todo el intervalo de integración [1].

El algoritmo de integración avanza en la solución de t_n a t_{n+1} con el paso de integración h_{n+1} basado en el cálculo que involucra los valores calculados anteriormente y_n, y_{n-1} y las funciones $f(y_n, t_n), f(y_{n-1}, t_{n-1})$. En general, cada algoritmo de integración debe de cumplir los siguientes criterios [1]: (i) Precisión numérica, (ii) estabilidad numérica; y (iii) eficiencia numérica. La precisión numérica garantiza que el error numérico en cada paso de integración permanece dentro de límites aceptables. La estabilidad numérica asegura que el error en un paso de integración no se propague a los pasos de integración futuros. La eficiencia numérica es el esfuerzo computacional requerido para cada paso de integración y para todo el intervalo de la solución. A continuación, se describe el método de la Transformación Diferencial.

II-A. Método de la Transformación Diferencial

Los métodos de integración más importantes derivan de la expansión mediante series de Taylor de (1). Es decir, si $y(t)$ denota la solución exacta de (1), entonces, expandiendo $y(t)$

mediante series de Taylor alrededor de $t = t_n$ y evaluando la serie en $t = t_{n+1}$, se obtiene la siguiente expansión para $y(t_{n+1})$ [1]:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{1}{1!} y'(t_n)(t_{n+1} - t_n) + \frac{1}{2!} y''(t_n)(t_{n+1} - t_n)^2 + \dots + \frac{1}{k!} y^{(k)}(t_n)(t_{n+1} - t_n)^k + t.o.s$$

donde *t.o.s* denota los términos de orden superior o residuo. Si se establece un tamaño de paso $h = t_{n+1} - t_n$, entonces

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y''(t_n) + \dots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(t_n) + t.o.s \quad (2)$$

donde k es el orden de la derivada o el orden de coeficientes de Taylor. Este método es muy preciso para valores de k grandes, pero computacionalmente ineficiente debido a la gran cantidad de términos que se deben calcular, lo que se refleja en los tiempos de simulación. Además la complejidad que se llega a tener al requerir derivadas de orden superior para grandes sistemas, como en los sistemas de potencia. Es por este motivo, que en esta investigación se presenta una forma novedosa y eficiente de calcular los coeficientes de Taylor, que es el método de la Transformación Diferencial [3], [11]. La TD obtiene las derivadas (coeficientes de Taylor) de la expansión de series de Taylor en (2) mediante la transformación de (4), y posteriormente se soluciona aplicando la fórmula dada por (3), que es una forma compacta de escribir (2), es decir:

$$y(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) h^k \quad (3)$$

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(t)}{dt^k} \right]_{t=t_n} \quad (4)$$

Por lo que, $Y(k)$ en (4) almacena los coeficientes de las derivadas que se calculan desde el primero hasta el k -ésimo paso de integración; mientras que la solución obtenida en cada paso de integración se almacena en $y(t_{n+1})$.

Se observa que la TD ahora depende tanto de h como de k para la solución, donde k representa los coeficientes del polinomio de Taylor en (2) y se obtienen de manera exacta al aplicar las siguientes reglas de transformación:

Proposición 1: Denotar $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ como las funciones originales y $X(k)$, $Y(k)$ y $Z(k)$ como sus Transformaciones Diferenciales, respectivamente. Las siguientes proposiciones son verdaderas, donde c es una constante, k es una potencia entera no negativa y σ es la delta Krónecker de la función delta definida en el dominio discreto. Por lo que las reglas son [3], [17]:

1. $x(0) = X(0)$
2. $y(t) = cx(t) \implies Y(k) = cX(k)$
3. $z(t) = x(t) \pm y(t) \implies Z(k) = X(k) \pm Y(k)$
4. $z(t) = x(t)y(t) \implies Z(k) = \sum_{p=0}^k X(p)Y(k-p)$
5. $y(t) = t^n \implies Y(k) = \sigma(k-n) = \begin{cases} 1, k=n \\ 0, k \neq n \end{cases}$
6. $y(t) = c \implies Y(k) = c\sigma(k) = \begin{cases} c, k=0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$
7. $y(t) = \sin(\omega t + \alpha) \implies Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\omega t_n + \frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
8. $y(t) = \cos(\omega t + \alpha) \implies Y(k) = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\omega t_n + \frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
9. $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \implies Y(k) = (k+1)X(k+1)$

En [13], [18]–[21], se omite el argumento ωt_n de las funciones *seno* (sin en regla 7) y *coseno* (cos en regla 8), por lo que al resolver mediante el método de Taylor no se llega a la solución esperada, por lo que la forma correcta de aplicar estas reglas es usar las descritas por [10] cuando se tienen fuentes de corriente alterna. Como se describe mediante las siguientes proposiciones:

Proposición 2: Si $\phi(t) = \sin(\delta(t))$, $\psi(t) = \cos(\delta(t))$, entonces $\Phi(k)$, $\Psi(k)$ y $\Delta(k)$ son las TDs para $\phi(t)$, $\psi(t)$, y $\delta(t)$, respectivamente. Donde $\Phi(k)$ y $\Psi(k)$ se calculan mediante [3]:

$$\begin{aligned}\Phi(k) &= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{k-p}{k} \Psi(p) \Delta(k-p) \\ \Psi(k) &= -\sum_{p=0}^{k-1} \frac{k-p}{k} \Phi(p) \Delta(k-p)\end{aligned}\quad (5)$$

Proposición 3: Dada la función $y(t) = e^{x(t)}$, si $Y(k)$ y $X(k)$ son las TDs de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente, entonces $Y(k)$ se calcula mediante [3]:

$$Y(k) = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{k-1} (k-p) Y(p) X(k-p) \quad (6)$$

Proposición 4: Dada la función $y(t) = \sqrt{x(t)}$. Si $Y(k)$ y $X(k)$ son las TDs de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente, entonces $Y(k)$ se calcula mediante (7) [3].

$$Y(k) = \frac{1}{2Y(0)} X(k) - \frac{1}{2Y(0)} \sum_{p=1}^{k-1} Y(p) Y(k-p) \quad (7)$$

Proposición 5: Dada la función $z(t) = x(t)/y(t)$, si $Z(k)$, $Y(k)$ y $X(k)$ son las TDs de $z(t)$, $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente, entonces $Z(k)$ se calcula mediante [3]:

$$Z(k) = \frac{1}{Y(0)} X(k) - \frac{1}{Y(0)} \sum_{p=0}^{k-1} Z(p) Y(k-p) \quad (8)$$

III. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN DIFERENCIAL A SISTEMAS MULTIMÁQUINA

En esta sección se presenta el modelo del generador síncrono (GS) y las ecuaciones de interconexión con la red, para su respectiva simulación numérica.

III-A. Modelado del Generador Síncrono

En general, las EADs correspondientes al GS y las ecuaciones de red se pueden representar mediante las siguientes ecuaciones [22]

$$\dot{x} = f(x, I_{dq}, V, u) \quad (9)$$

$$I_{dq} = h(x, V) \quad (10)$$

$$0 = g(x, I_{dq}, V) \quad (11)$$

Sustituyendo (10) en (9) y (11), se obtiene:

$$\dot{x} = f(x, V, u) \quad (12)$$

$$0 = g(x, V) \quad (13)$$

donde (12) y (13) constituyen el sistema de EADs a resolver. Note que (13) engloba a las ecuaciones de balance de potencia, donde x son las variables de estado, I_{dq} son las variables algebraicas relacionadas con el estator de la máquina, V son las variables de la red y u son las entradas al sistema.

El modelo transitorio del GS se representa mediante cuatro ecuaciones diferenciales y tres algebraicas, las cuales son [4], [23]:

$$\begin{aligned}T'_{qoi} \frac{dE'_{di}}{dt} &= -E'_{di} + (x_{qi} - x'_{qi}) I_{qi} \\ T'_{doi} \frac{dE'_{qi}}{dt} &= E_{fdi} - E'_{qi} - (x_{di} - x'_{di}) I_{di} \\ \frac{d\delta_i}{dt} &= \omega_s (\omega_i - 1) \\ 2H_i \frac{d\omega_i}{dt} &= P_{mi} - P_{ei} - D_i (\omega_i - 1)\end{aligned}\quad (14)$$

donde E' , T'_o y x' representan el voltaje, la constante de tiempo en circuito abierto y la reactancia, en estado transitorio, respectivamente. d y q simbolizan las componentes en los ejes directo y cuadratura, respectivamente. δ_i es el ángulo del rotor con respecto al eje magnético del estator, ω_i es la velocidad de la máquina, H_i es la inercia y D_i es el factor de amortiguamiento. El subíndice i se refiere al i -ésimo generador. Las ecuaciones algebraicas son:

$$\begin{aligned}P_{ei} &= V_{di} I_{di} + V_{qi} I_{qi} \\ V_{di} &= E'_{di} + x'_{di} I_{qi} \\ V_{qi} &= E'_{qi} - x'_{di} I_{di}\end{aligned}\quad (15)$$

donde I_{di} e I_{qi} son las corrientes del estator de la máquina en el eje d y q , V_{di} y V_{qi} son los voltajes en el eje d y q , y P_{ei} es la potencia eléctrica generada. P_{mi} es la potencia mecánica que inyecta la turbina al generador, ω_s es la velocidad síncrona del sistema ($\omega_s = 2\pi 60$ rad/seg). E_{fdi} es el voltaje de excitación, aquí se utiliza el modelo de primer orden descrito en [24], el cual se define por:

$$T_{Ai} \frac{dE_{fdi}}{dt} = -E_{fdi} + K_{Ai} (V_{refi} - |V_{ti}|) \quad (16)$$

donde K_{Ai} y T_{Ai} son la ganancia de excitación y la constante de tiempo. V_{refi} es el voltaje de referencia y V_{ti} es el voltaje en terminales del generador determinado por:

$$|V_{ti}| = \sqrt{V_{di}^2 + V_{qi}^2} \quad (17)$$

Debido a que los voltajes y corrientes nodales se presentan en forma rectangular para los casos de estudio es necesario pasar del marco de referencia dq al plano xy en las expresiones para las interconexiones con la red definida por su matriz de admitancia reducida \mathbf{Y}_{red} . Por lo tanto, las ecuaciones de equivalencia son [4]:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{red} \mathbf{V} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} I_{xi} \\ I_{yi} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} I_{di} \\ I_{qi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} V_{xi} \\ V_{yi} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} E'_{di} \\ E'_{qi} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sin \delta_i & \cos \delta_i \\ -\cos \delta_i & \sin \delta_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde \mathbf{I} representa el vector de corrientes de la red en forma rectangular, \mathbf{V} es el vector de voltajes de la red en forma rectangular, \mathbf{R} es la matriz de conversión entre los planos de referencia dq y xy , I_{xi} e I_{yi} definen las corrientes real e imaginaria de la red, V_{xi} y V_{yi} simbolizan los voltajes real e imaginario. La Fig. 1 muestra de manera gráfica la interacción de los elementos de la red con los generadores.

Las ecuaciones algebraicas para los nodos de generación y de carga están definidas por (22) y (23), respectivamente.

$$\begin{aligned}V_i e^{j\theta} (I_{di} - j I_{qi}) e^{-j(\delta_i - \pi/2)} + P_{Li}(V_i) + j Q_{Li}(V_i) = \\ \sum_{i=1}^m V_i V_k Y_{ik} e^{j(\theta_i - \theta_k - \alpha_{ik})}, \forall i = 1, \dots, m\end{aligned}\quad (22)$$

donde m es el número total de generadores en el sistema.

$$P_{Li}(V_i) + jQ_{Li}(V_i) = \sum_{i=1}^n V_i V_k Y_{ik} e^{j(\theta_i - \theta_k - \alpha_{ik})}, \quad (23)$$

$$\forall i = m+1, \dots, n$$

donde n es el número de nodos de carga en el sistema.

III-B. Implementación de la Transformación Diferencial

Aplicando las reglas de la TD presentadas en la Sección II al modelo transitorio del GS, se obtienen las siguientes expresiones:

$$E'_{di}(k+1) = \frac{1}{(k+1)T'_{qO_i}} (-E'_{di}(k) + (x_{qi} - x'_{di})I_{qi}(k))$$

$$E'_{qi}(k+1) = \frac{1}{(k+1)T'_{dO_i}} (E_{fdi}(k) - E'_{qi}(k) - (x_{di} - x'_{di})I_{di}(k))$$

$$\delta_i(k+1) = \frac{\omega_s}{k+1} (\omega_i(k) - \sigma_i(k))$$

$$\omega_i(k+1) = \frac{1}{(k+1)2H_i} (\sigma_i(k)P_{mi} - P_{ei}(k) - D_i[\omega_i(k) - \sigma_i(k)])$$

$$E_{fdi}(k+1) = \frac{1}{(k+1)T_{A_i}} (-E_{fdi}(k) + K_{A_i}[V_{ref_i}\sigma(k) - |V_{ti}|(k)]) \quad (24)$$

Por otra parte, las ecuaciones algebraicas del GS transformadas quedan de la siguiente manera:

$$P_{ei}(k) = \sum_{p=0}^k V_{di}(p)I_{di}(k-p) + V_{qi}(p)I_{qi}(k-p)$$

$$V_{di}(k) = E'_{di}(k) + x'_{di}I_{qi}(k)$$

$$V_{qi}(k) = E'_{qi}(k) - x'_{di}I_{di}(k)$$

$$|V_{ti}|(k) = \frac{1}{2|V_{ti}|(0)} X_i(k) - \frac{1}{2|V_{ti}|(0)} \sum_{p=1}^{k-1} |V_{ti}|(p)|V_{ti}|(k-p)$$

$$X_i(k) = \sum_{p=0}^k V_{di}(p)V_{di}(k-p) + V_{qi}(p)V_{qi}(k-p) \quad (25)$$

donde $X_i(k)$ representa la operación dentro del radical de (17), es decir $\sqrt{V_{di}^2 + V_{qi}^2}$.

Una vez que se tienen todas las ecuaciones del generador transformadas, se procede a aplicar las reglas de la TD en Sección II a las ecuaciones de la red, obteniéndose en forma

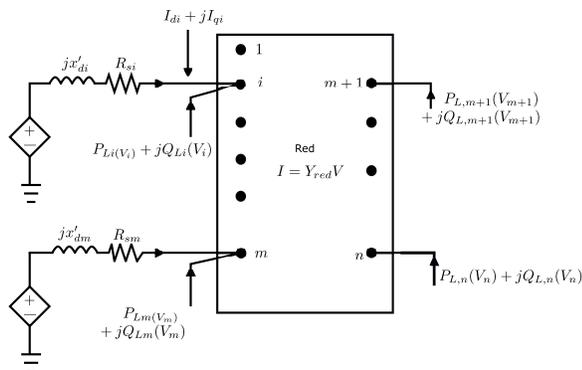


Fig. 1. Interconexión entre el generador síncrono y el resto de la red [4].

matricial las siguientes expresiones:

$$\mathbf{I}(k) = \mathbf{Y}_r \mathbf{V}(k) \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} V_{xi}(k) \\ V_{yi}(k) \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^k \begin{bmatrix} \Phi_i(p) & \Psi_i(p) \\ -\Psi_i(p) & \Phi_i(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{di}(k-p) \\ E'_{qi}(k-p) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} I_{xi}(k) \\ I_{yi}(k) \end{bmatrix} = \sum_{p=0}^k \begin{bmatrix} \Phi_i(p) & \Psi_i(p) \\ -\Psi_i(p) & \Phi_i(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{di}(k-p) \\ I_{qi}(k-p) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Así, una vez que se tiene todo el conjunto de EDAs transformadas, éstas se adaptan al PST para realizar la simulación multimáquina.

IV. SIMULACIÓN DINÁMICA DE SISTEMAS MULTIMÁQUINA

Para demostrar la efectividad del método propuesto, se presentan los resultados de la simulación dinámica del sistema WECC y el sistema mexicano reducido. Para esto, se realiza la adaptación del software libre PST de Matlab [16], para que los diferentes métodos de integración puedan ser aplicados y comparados. Las simulaciones para ambos sistemas multimáquina, consisten en aplicar una falla trifásica autoaclorada en el nodo 5, en el instante $t = 1$ s con una duración de 3 ciclos. Además, las comparaciones se hacen con los métodos de Euler modificado [7] y la Regla Trapezoidal [1], [7], donde el paso de integración es $h = 1/60$ s, incluida la TD.

IV-A. Western System Coordinating Council (WECC)

Este sistema consta de 9 nodos, 3 generadores y tres grandes cargas equivalentes conectadas en una red de transmisión mallada a través de líneas de transmisión. La Fig. 2 muestra la respuesta transitoria de todas las variables de estado mediante la TD con $k=2$. Se observa que el sistema es estable y en total se resuelven 15 ecuaciones diferenciales y 20 ecuaciones algebraicas.

Para propósitos de comparación, se elige la máquina 2, donde la respuesta transitoria de la velocidad y el ángulo del rotor se comparan con los métodos de integración tradicionales EM y RT, cuyas respuestas se ilustran en la Fig. 3. Se observa que

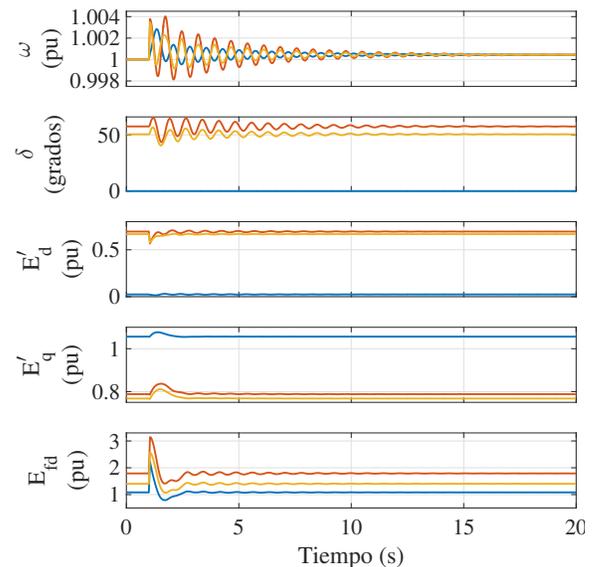


Fig. 2. Variables de estado del sistema WECC por medio de la TD, $k=2$.

TABLA I
TIEMPOS DE SIMULACIÓN
DE LOS MÉTODOS EM, RT Y TD PARA EL SISTEMA WECC

Tiempo (s)	EM	RT	TD
	0.4467	1.7534	0.1460

los métodos TD y EM tienen un comportamiento muy similar cuando $k=2$ para el método TD.

Los tiempos de simulación obtenidos por cada método de integración se presentan en la Tabla I. Se puede observar que la TD tiene un tiempo de simulación mucho menor que los métodos EM y RT, mejorando en una tercera parte el método de EM y en una doceava parte la RT.

IV-B. Sistema Mexicano Reducido

Para demostrar la efectividad de la TD en un sistema multimáquina de gran dimensión, se utiliza una versión reducida del Sistema Interconectado Nacional (SIN) de México que consta de 46 máquinas y 190 nodos [25], [26]. La Fig. 4 muestra la respuesta transitoria mediante la TD con $k=2$ de todas las variables de estado ante una falla trifásica autoaclorada en el nodo 5, resolviendo en total 230 ecuaciones diferenciales y 184 ecuaciones algebraicas. Nuevamente, se observa que el sistema es estable.

La Fig. 5 muestra el comportamiento transitorio de la velocidad y ángulo del rotor para la máquina 5, así como la comparación con los métodos EM y RT.

Se observa que los métodos de TD y EM nuevamente tienen un comportamiento muy similar cuando $k=2$ para la TD.

Finalmente, los tiempos de simulación obtenidos por cada método de integración se presentan en la Tabla II. Se puede observar que la TD tiene un tiempo de simulación mucho menor que los métodos tradicionales EM y RT, mejorando en una doceava parte el método de EM y en una décima parte la RT. Note que en comparación con el sistema WECC, la integración con la TD sólo incrementa el doble de tiempo; a pesar de que las ecuaciones diferenciales y algebraicas incrementaron de 15 a 230 y de 20 a 184, respectivamente. No obstante, el método de EM y la RT incrementaron 8.2 y 1.9 veces el tiempo de computo, respectivamente.

Lo anterior demuestra que de acuerdo con el tercer criterio de los algoritmos de integración, la TD es el más eficiente numéricamente. A continuación, se demuestran los dos primeros

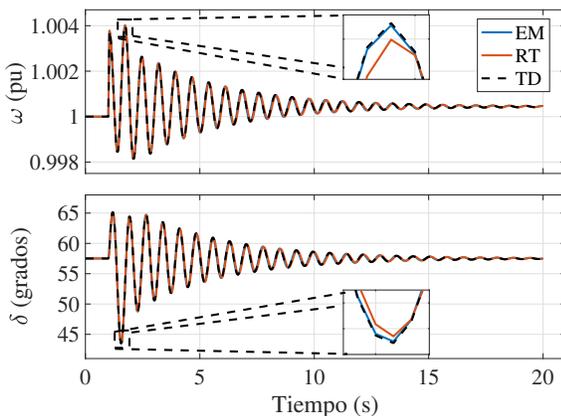


Fig. 3. Comparación entre EM, RT y TD para la máquina 2 del sistema WECC.

TABLA II
TIEMPOS DE SIMULACIÓN DE
LOS MÉTODOS EM, RT Y TD PARA EL SISTEMA MEXICANO

Tiempo (s)	EM	RT	TD
	3.6641	3.2625	0.3038

criterios: precisión y estabilidad numérica para la TD. Para esto, se considera la misma falla trifásica aplicada en el instante $t=1$ s en el nodo 5 y con una duración de 3 ciclos del sistema Mexicano.

IV-C. Incremento de Precisión de la TD

Para aumentar la precisión numérica del método de la TD, basta con incrementar el número de derivadas k del método de Taylor. Así, para comparar con los métodos de EM y RT se considera un paso de integración $h=1/60$ s fijo para todos. La Fig. 6 muestra el comportamiento transitorio de la velocidad de la máquina 5 del sistema Mexicano con la TD para $k=2,3,4,5$ y su comparación con EM y RT. se observa como la TD ahora tiene un comportamiento más similar a la RT conforme k aumenta. La Tabla III muestra los tiempos de simulación para la TD con $k=2,3,4,5$. Se observa que, incluso para $k=5$, el tiempo es mucho menor que la RT, mejorándola en 5.3 veces.

IV-D. Prueba de Estabilidad Numérica de la TD

Al aumentar k , también se puede incrementar la estabilidad numérica. Esto es, para pasos de integración relativamente

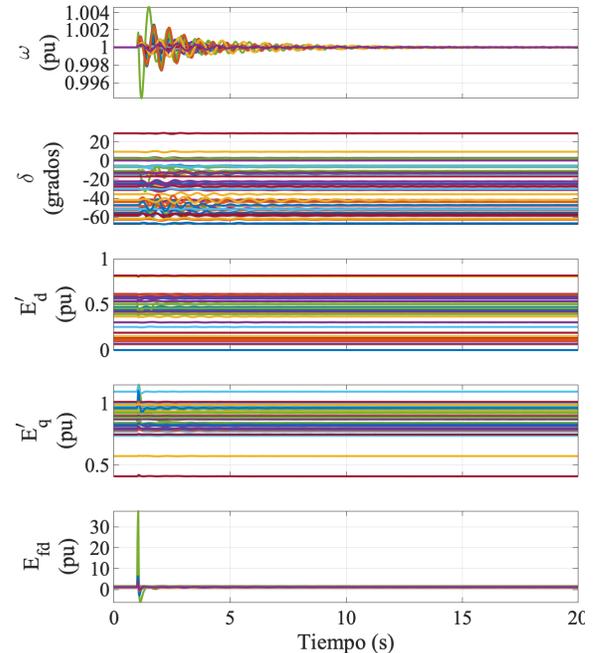


Fig. 4. Variables de estado del sistema Mexicano por medio de la TD, $k=2$.

TABLA III
TIEMPOS
DE SIMULACIÓN PARA EM, RT Y LA TD PARA $k=2,3,4,5$

Tiempo (s)	EM	RT	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
	3.6641	3.2625	0.3038	0.3294	0.4661	0.6130

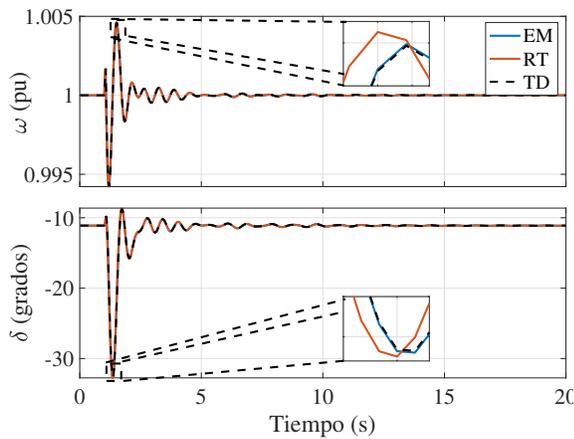


Fig. 5. Comparación entre EM, RT y TD para la máquina 5 del sistema Mexicano.

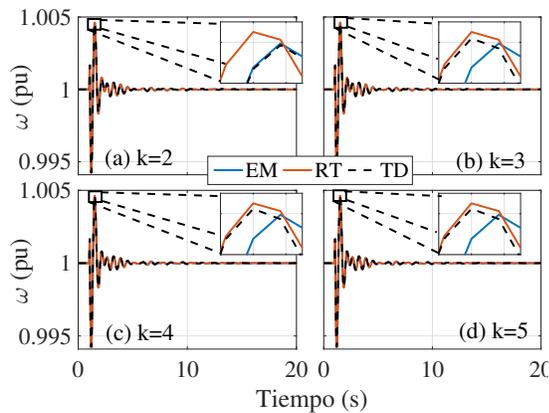


Fig. 6. Comparación de los métodos de EM y RT contra TD para $k=2,3,4,5$.

grandes, donde los métodos de EM y RT no son numéricamente estables (no convergen a la solución del sistema de las EADs), la TD puede converger y seguir siendo numéricamente estable simplemente aumentando el valor de k .

Para esta prueba, se utiliza un paso de integración dos veces mayor que en los casos anteriores, $h=2/60$ s. La Fig. 7 ilustra el comportamiento transitorio de todas las velocidades del sistema Mexicano para la TD cuando $k=3$ y su comparación con EM y RT. Se observa que para este paso de integración, los métodos de EM y RT no convergen a la solución, ver Fig. 4. En cambio, la TD si logra converger a la solución de manera eficiente cuando se incrementa el número de coeficientes de $k=2$ a $k=3$.

Por otro lado, la Fig. 8 muestra la velocidad en la máquina 5 de la TD cuando $h=1/60$, $k=2$ y $h=2/60$, $k=3$. Se puede observar que son muy parecidas, por lo que se puede concluir que el incremento de paso se puede compensar con el incremento de los coeficientes de Taylor para seguir obteniendo resultados bastante aceptables.

V. CONCLUSIONES

Este artículo presenta el análisis dinámico de sistemas de potencia multimáquina utilizando la transformación diferencial para el cálculo de los coeficientes del método de Taylor. En general, el método de Taylor es muy preciso; sin embargo, una de sus principales desventajas es que requiere del cálculo

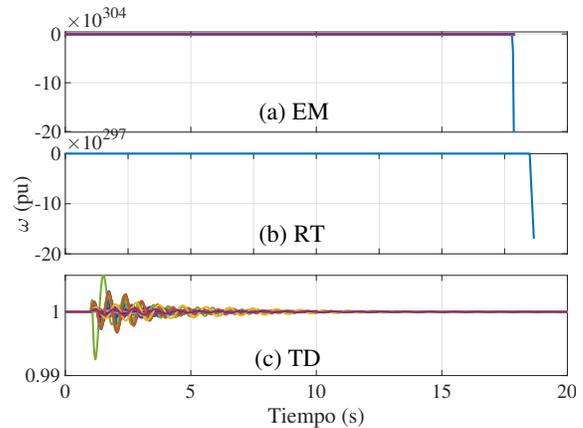


Fig. 7. Simulación transitoria para $h=2/60$ con el método de: (a) Euler modificado; (b) Regla trapezoidal; y (c) Transformación diferencial con $k=3$.

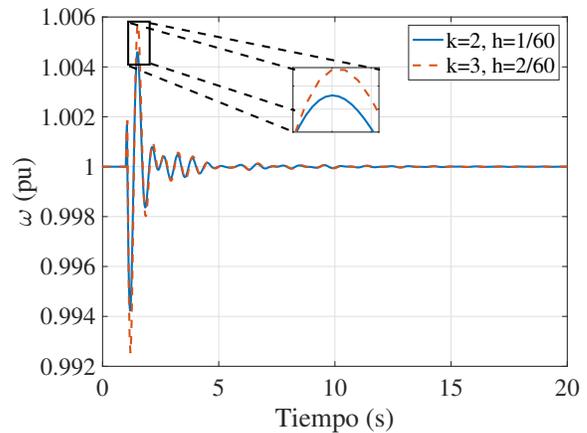


Fig. 8. Comparación entre las soluciones para $h=1/60$ s, $k=2$ y $h=2/60$ s, $k=3$ usando la TD.

de derivadas de orden superior, lo que puede resultar costoso desde el punto de vista computacional a medida que el número de términos se incrementa. Sin embargo, mediante las reglas de la TD, éstas se pueden obtener de manera muy eficiente y rápida, haciendo al método de Taylor competitivo con el resto de los algoritmos de integración numérica, tales como EM y RT, obteniéndose la solución del sistema en situaciones donde los métodos de integración tradicionales no lo logran.

Así, el método de la TD contiene dos parámetros a manipular: el tamaño de paso h y el número de coeficientes de Taylor k . Al manipular estos parámetros, se logra que la TD tenga un buen desempeño en cuanto a la precisión numérica, eficiencia numérica y estabilidad numérica.

Para esto, se utiliza el software libre PST, el cual se adapta para utilizar los métodos de integración EM, RT y TD para la simulación dinámica de sistemas multimáquina.

REFERENCIAS

- [1] M. L. Crow, *Computational Methods for Electric Power Systems*. CRC Press Taylor & Francis Group: Boca Raton London New York, 2010.
- [2] P. Kundur, *Power system stability and control*. McGraw-hill, Inc., New York, 1994.
- [3] Y. Liu, K. Sun, R. Yao, and B. Wang, "Power system time domain simulation using a differential transformation method," *IEEE*

- Transactions on Power Systems*, vol. 34, no. 5, pp. 3739–3748, 2019. doi: 110.1109/TPWRS.2019.2901654.
- [4] J. H. Chow, P. W. Sauer, and M.A.Pai, *Power System Dynamics and Stability*. Hoboken, NJ, USA : Wiley, 2017.
- [5] P. C. Krause, O. Wasynczuk, and S. D. Sudhoff, *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. 2002.
- [6] C. Ong, *Dynamic Simulation of Electric Machinery: Using MATLAB/SIMULINK*. 1998.
- [7] R. L. Burden, D. J. Faires, and A. M. Burden, *Análisis numérico*. Distrito Federal : CENGAGE Learning, 2017.
- [8] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Métodos Numéricos para Ingenieros*. 2013.
- [9] J. Zhou, *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits*. PhD thesis, Huazhong University Press, Wuhan, 1986.
- [10] G. G. Ev Pukhov, “Differential transforms and circuit theory,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 265–276, 1982. doi: <https://doi.org/10.1002/cta.4490100307>.
- [11] Y. Liu and K. Sun, “Solving power system differential algebraic equations using differential transformation,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 2289–2299, 2020. doi: 10.1109/TPWRS.2019.2945512.
- [12] S. Xu and C. Liu, “Fast power system dynamic simulations based on differential transform method,” in *2020 IEEE 4th Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*, pp. 120–125, 2020. doi: 10.1109/EI250167.2020.9346780.
- [13] I. Abdel-Halim Hassan, “Application to differential transformation method for solving systems of differential equations,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 32, no. 12, pp. 2552–2559, 2008. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.09.025>.
- [14] I. Hassan and V. S. Ertürk, “Applying differential transformation method to the one-dimensional planar bratu problem,” *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 2, no. 30, pp. 1493–1504, 2007.
- [15] M.-J. Jang, C.-L. Chen, and Y.-C. Liy, “On solving the initial-value problems using the differential transformation method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 115, no. 2, pp. 145–160, 2000. doi: [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(99\)00137-X](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(99)00137-X).
- [16] J. H. Chow and K. W. Cheung, “A toolbox for power system dynamics and control engineering education and research,” *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 7, pp. 1559–1564, Nov 1992. doi: 10.1109/59.207380.
- [17] E. R. El-Zahar, “Approximate analytical solutions for singularly perturbed boundary value problems by multi-step differential transform method,” *J. Appl. Sci.*, vol. 12, no. 19, pp. 2026–2034, 2012. doi: 10.3923/jas.2012.2026.2034.
- [18] G. Sobamowo, S. Ojolo, and C. Osheku, “Analysis of pyrolysis kinetics of biomass particle under isothermal and non-isothermal heating conditions using differential transformation method,” 12 2017.
- [19] S. Ghasemi, M. Hatami, and D. domiri ganji, “Thermal analysis of convective fin with temperature-dependent thermal conductivity and heat generation,” *Case Studies in Thermal Engineering*, vol. 4, 11 2014. doi: 10.1016/j.csite.2014.05.002.
- [20] B. Benhammouda, H. Vázquez-Leal, and A. Sarmiento-Reyes, “Modified reduced differential transform method for partial differential-algebraic equations,” *J. Appl. Math.*, vol. 2014, pp. 279481:1–279481:9, 2014. doi: <https://doi.org/10.1155/2014/279481>.
- [21] S. Sepasgozar, M. Faraji, and P. Valipour, “Application of differential transformation method (dtm) for heat and mass transfer in a porous channel,” *Propulsion and Power Research*, vol. 6, no. 1, pp. 41–48, 2017. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jprr.2017.01.001>.
- [22] R. Ángel Cárdenas Javier, *Control de Oscilaciones Inter-área en Sistemas de Potencia de gran escala mediante mediciones de área amplia*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2020.
- [23] V. Ajjarapu, *Computational Techniques for Voltage Stability Assessment and Control*. 2007. doi: 10.1007/978-0-387-32935-2.
- [24] B. V. H. Juan M. Ramirez and R. E. Correa, “Dynamic equivalence by an optimal strategy, electric power systems research,” *ELSEVIER Electric Power Systems Research*, vol. 84, no. 3, pp. 58–64, 2012. doi: 10.1016/j.eprsr.2011.09.023.
- [25] A. Messina, J. Ramirez, and J. Canedo C., “An investigation on the use of power system stabilizers for damping inter-area oscillations in longitudinal power systems,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13, no. 2, pp. 552–559, 1998. doi: 10.1109/59.667382.
- [26] M. R. A. Paternina, J. M. Ramirez-Arredondo, J. D. Lara-Jiménez, and A. Zamora-Mendez, “Dynamic equivalents by modal decomposition of tie-line active power flows,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, no. 2, pp. 1304–1314, 2017. doi: 10.1109/TPWRS.2016.2572601.



Ricardo Galarza-Villa obtained his B.S. and M.Sc. degrees in electrical engineering from Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo (UMSNH), Morelia, Michoacan in 2020 and 2022, respectively.



Alejandro Zamora-Méndez (M' 11) obtained his B.S. and M.Sc. in Electrical Engineering from Universidad Michoacana de San Nicolas de Hidalgo (UMSNH), Morelia, Mexico, in 2005 and 2008, respectively. He joined the Electrical Engineering Faculty, UMSNH in 2008. He received a D.Sc. degree in Electrical Engineering from CINVESTAV-Guadalajara in 2016.



Carlos Pérez-Rojas obtained his BSEE from the Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo (UMSNH), México, in 1990. He obtained his M. Sc. and Dr. Sc. in power systems from the Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), México, in 1993 and 2004, respectively. He is currently a staff member at the Faculty of Electrical Engineering of the UMSNH. His areas of interest are: Stability and control of the electric power systems, characterization and control of electrical machines. He is a member of the IEEE.



Mario R. Arrieta Paternina (M' 11) holds a B.Eng. and M.Eng. in Electrical Engineering from National University of Colombia, Medellín, Colombia, in 2007 and 2009, respectively. In 2017, he obtained his D.Sc. degree in Electrical Engineering from CINVESTAV, and he joined the Department of Electrical Engineering at the UNAM.