

Dynamic Predictor-based Controls: A Time-domain Stability Analysis

L. Juárez, and S. Mondié

Abstract—In this publication, we test the stability of a linear system with state and input delays in the case where the input is a dynamic predictor control law. To achieve this, we present a method to construct the delay Lyapunov matrix of the system, and we use the recent stability criteria in the time domain as a test. Taking advantage of the approach, we carry out a σ -stability analysis, having in mind to find the maximum exponential decay of the system. An illustrative example is presented.

Index Terms—Dynamic predictor control, Stability analysis, Time-delay system, Lyapunov matrix.

I. INTRODUCCIÓN

EL estudio de sistemas con retardo en el estado y en la entrada esta relacionado con procesos tecnológicos, por ejemplo la operación remota o el fenómeno de transporte [1]. Para el caso de sistemas con retardo en la entrada, se ha propuesto el predictor de Smith [2] y el control predictivo clásico de Manitius y Olbrot [3]. Sin embargo, al momento de implementar estas leyes de control, las ecuaciones integrales que contienen son reemplazadas por sumas finitas, de manera que el sistema en lazo cerrado de tipo retardado se convierte en uno de tipo neutral, lo cual puede ser fuente de inestabilidad, ver [4] y [5]. Como se muestra en [6], agregar un filtro en la entrada de control resuelve el problema de implementación para el caso de sistemas con retardo únicamente en la entrada. En el caso de sistemas con retardo en el estado y en la entrada, la implementación se hace mediante el llamado control dinámico predictivo introducido en [7]. La estabilidad y la robustez del lazo cerrado de estos sistemas han sido estudiadas en el dominio de la frecuencia en [7] y [8]. Una alternativa para el análisis de sistemas con retardo en el estado y en la entrada es mediante predictores secuenciales [9]. Este enfoque evita el uso de integrales pero requiere la adición de varios observadores y subpredictores, lo cual introduce conservatismo.

El objetivo de este trabajo es estudiar la estabilidad en el dominio del tiempo del lazo cerrado de un sistema lineal con retardo en el estado y en la entrada aplicando control dinámico predictivo. Como se muestra más adelante, este sistema se puede reescribir en uno con retardos múltiples concentrados y distribuidos. La herramienta principal para efectuar el análisis de estabilidad es la matriz de Lyapunov del lazo cerrado así como los resultados obtenidos en [10], [11], [12], [13] y [14].

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección II se presenta el sistema lineal con retardo en el estado y en la entrada con control predictivo y dinámico predictivo.

En la Sección III se hace una reescritura del lazo cerrado y se muestra un sistema extendido con retardos múltiples concentrados y distribuidos. En la sección IV se da una metodología para construir la matriz de Lyapunov del sistema propuesto. En la Sección V se construye la matriz de Lyapunov para el caso escalar general. Finalmente, se muestra la utilidad de esta matriz en un ejemplo, donde se analiza la σ -estabilidad del sistema.

Notación: La representación $A > (\not\geq) 0$ significa que la matriz real A es positiva definida (no positiva semi-definida). El espacio de las funciones continuas a pedazos definidas en el intervalo $[-h, 0]$ se denota como $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. La derivada con respecto al tiempo es denotada como $\dot{f}(t)$, mientras $f'(\tau)$ es la derivada con respecto a τ .

II. PRELIMINARES

Considere el sistema lineal con retardos en el estado y en la entrada

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t-\xi), \quad (1)$$

las matrices $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y los retardos satisfacen $0 < h < \xi$. El problema de valor inicial es $x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t+\theta, \varphi)$, $\theta \in [-h, 0]$, donde la función $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Primero se considera el control predictivo

$$u(t) = F_0x(t+\xi) + F_1x(t+\xi-h), \quad (2)$$

donde $F_0, F_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son tales que el lazo cerrado (1, 2) es

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BF_0)x(t) + (A_1 + BF_1)x(t-h),$$

y además es estable. En [6] se introduce un filtro en la entrada de control para evitar posibles fenómenos de inestabilidad [15]. Con esta idea en mente se presenta en [7] el control dinámico predictivo basado en (2). Sea $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matriz Hurwitz, entonces

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} - Gu(t) &= F_0 \frac{d(x(t+\xi))}{dt} + F_1 \frac{d(x(t+\xi-h))}{dt} \\ &\quad - G[F_0x(t+\xi) + F_1x(t+\xi-h)] \\ &= (G + F_0B)u(t) + F_1Bu(t-h) + (F_0A_0 - GF_0)x(t+\xi) \\ &\quad + (F_0A_1 + F_1A_0 - GF_1)x(t+\xi-h) + F_1A_1x(t+\xi-2h). \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones de las mediciones de los estados $x(t+\xi)$, $x(t+\xi-h)$, $x(t+\xi-2h)$, ver [7], las cuales dependen de la matriz fundamental del sistema (1) que satisface la ecuación diferencial retardada

$$\dot{K}(t) = K(t)A_0 + K(t-h)A_1, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

This work was Supported by Project SEP-CINVESTAV 155.

L. Juárez and S. Mondié are with the Department of Automatic Control, CINVESTAV-IPN, DF 07360, México {ljuarez, smondie}@ctrl.cinvestav.mx.

con condiciones iniciales $K(t) = 0_{n \times n}$, $t < 0$, $K(0) = I$, se produce el controlador deseado

$$\dot{u}(t) = (G + F_0 B)u(t) + F_1 B u(t-h) + Q(\xi)x(t) + \int_{-\xi}^0 Q(-\theta)B u(t+\theta)d\theta + \int_{-h}^0 Q(\xi-h-\theta)A_1 x(t+\theta)d\theta, \quad (4)$$

$$Q(t) = (F_0 A_0 - G F_0)K(t) + F_1 A_1 K(t-2h) + (F_0 A_1 + F_1 A_0 - G F_1)K(t-h),$$

El sistema en lazo cerrado (1, 4) es de tipo retardado y exponencialmente estable, por lo que su implementación no presenta problemas.

III. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Se pretende analizar la estabilidad en el dominio del tiempo del sistema en lazo cerrado (1, 4) empleando la matriz de Lyapunov. Primero se representa el sistema en lazo cerrado en la variable $z(t) = [x(t) \quad u(t)]^T$. Por simplicidad se considera $\xi = 2h$, entonces

$$\dot{z}(t) = \sum_{j=0}^2 \mathcal{A}_j z(t-jh) + \sum_{j=0}^1 \int_{-h}^0 G_j(\theta-jh)z(t+\theta-jh)d\theta, \quad (5)$$

donde

$$\mathcal{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0_{n \times m} \\ Q(2h) & G + F_0 B \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & F_1 B \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & B \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix},$$

$$G_0(\theta) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ Q(h-\theta)A_1 & Q(-\theta)B \end{bmatrix},$$

$$G_1(\theta-h) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & Q(-\theta+h)B \end{bmatrix}.$$

El lazo cerrado (5) pertenece a la clase de sistemas con retardos distribuidos y concentrados estudiados en [11]. Su matriz de Lyapunov juega un papel fundamental en el análisis de estabilidad.

IV. CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE LYAPUNOV

En esta sección se presenta la construcción de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ del sistema (5). La originalidad de la construcción presentada, la cual se basa en el método semi-analítico introducido en [16] reside en: 1) se resuelve el caso de núcleos que dependen de la matriz fundamental, y 2) se aplican simplificaciones para el caso de núcleos repetidos. Se representa el núcleo del retardo distribuido como

$$G_j(\theta-jh) = \sum_{i=0}^{\bar{k}} g_{0,i}(\theta)C_{j,i}, \quad (6)$$

con

$$G_0(\theta) = \sum_{i=0}^{\bar{k}} g_{0,i}(\theta)C_{0,i}, \quad G_1(\theta-h) = \sum_{i=0}^{\bar{k}} g_{0,i}(\theta)C_{1,i},$$

donde $g_{0,i}(\theta)$ son funciones escalares, y las matrices $C_{0,i}$, $C_{1,i}$ pertenecen a $R^{(n+m) \times (n+m)}$. Las funciones escalares g satisfacen

$$g'_{0,i}(\theta) = \sum_{k=0}^{\bar{k}} \alpha_{j,i}^k g_{j,k}, \quad j = 0, 1. \quad (7)$$

La matriz de Lyapunov satisface tres propiedades [16]:

- Propiedad dinámica para $\tau > 0$,

$$U'(\tau) = \sum_{j=0}^2 U(\tau-jh)\mathcal{A}_j + \sum_{j=0}^1 \int_{-h}^0 U(\tau+\theta-jh)G_j(\theta-jh)d\theta, \quad (8)$$

- Propiedad simétrica para $\tau \geq 0$,

$$U(-\tau) = U^T(\tau), \quad (9)$$

- Propiedad dinámica para $\tau < 0$,

$$U'(\tau) = -[U'(-\tau)]^T = -\sum_{j=0}^2 \mathcal{A}_j^T U(\tau+jh) - \sum_{j=0}^1 [G_j(\theta-jh)]^T \int_{-h}^0 U(\tau-\theta+jh)d\theta, \quad (10)$$

- Propiedad algebraica, sea $W > 0$, entonces

$$\sum_{j=0}^2 [U(-jh)\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j^T U(jh)] + \sum_{j=0}^1 \left[\int_{-h}^0 U(\theta-jh)G_j(\theta-jh)d\theta + [G_j(\theta-jh)]^T \int_{-h}^0 U(-\theta+jh)d\theta \right] = -W, \quad (11)$$

siempre que el sistema (5) satisfaga la condición de Lyapunov, la solución a (8)-(11) es única.

En el caso de retardos conmensurables, la solución se obtiene resolviendo un problema libre de retardos de valores en la frontera. Debido a los retardos múltiples concentrados, se introducen cuatro matrices auxiliares,

$$Y_i(\tau) = U(\tau+ih), \quad -2 \leq i \leq 1. \quad (12)$$

Las funciones escalares $g_{0,i}(\theta)$ de los núcleos G_0 y G_1 están repetidas y para cada una se introduce una matriz auxiliar. Para cada función $g_{0,i}(\theta)$ se deben definir las matrices auxiliares mostradas en la Tabla I.

TABLA I
MATRICES AUXILIARES

$G_0(\theta)$	$G_1(\theta-h)$
$Z_1 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau+\theta+h)d\theta$	$Z_3 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau+\theta)d\theta$
$Z_2 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau+\theta)d\theta$	$Z_4 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau+\theta-h)d\theta$
$J_1 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau-\theta-h)d\theta$	$J_3 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau-\theta)d\theta$
$J_2 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau-\theta-2h)d\theta$	$J_4 = \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau-\theta-h)d\theta$

El hecho de tener funciones repetidas en ambos núcleos G_0 y G_1 permite una reducción significativa de las matrices auxiliares Z_i y J_i , (ver Tabla I). Se observa que $Z_2 = Z_3$ y $J_1 = J_4$, por lo tanto, se necesitan sólo seis matrices auxiliares por cada función escalar.

$$\begin{aligned} Z_1(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau + \theta + h)d\theta \\ Z_2(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau + \theta)d\theta \\ Z_3(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau + \theta - h)d\theta \\ J_1(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau - \theta)d\theta \\ J_2(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau - \theta - h)d\theta \\ J_3(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau - \theta - 2h)d\theta. \end{aligned}$$

Para el caso donde el núcleo tiene dos funciones escalares, se requieren dieciséis matrices auxiliares, pero como se observó antes, es posible reducir el número de éstas a doce. Para tres funciones escalares, de las veinticuatro matrices auxiliares iniciales, sólo se requieren dieciocho. Estas observaciones son escritas de manera general en la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} Z_{i,p}(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau + \theta + ph)d\theta, \quad -1 \leq p \leq 1, \\ J_{i,p}(\tau) &= \int_{-h}^0 g_{0,i}(\theta)U(\tau - \theta + ph)d\theta, \quad -2 \leq p \leq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

donde $0 \leq i \leq \tilde{k}$. El número de matrices auxiliares es $10 + 6\tilde{k}$.

Lema 1: Sea $U(\tau)$ la matriz de Lyapunov del sistema (5), asociada a la matriz simétrica W . Entonces las matrices auxiliares (12), (13) satisfacen el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left\{ \begin{aligned} Y_i'(\tau) &= \sum_{j=0}^2 Y_{i-j}(\tau)A_j + \sum_{p=0}^1 \left\{ \sum_{j=0}^{\tilde{k}} Z_{j,i-p}(\tau)C_{p,j} \right\}, \\ &\quad 0 \leq i \leq 1, \\ Y_i'(\tau) &= - \sum_{j=0}^2 A_j^T Y_{i+j}(\tau) - \sum_{p=0}^1 \left\{ \sum_{j=0}^{\tilde{k}} C_{p,j}^T J_{j,i+p}(\tau) \right\}, \\ &\quad -2 \leq i \leq -1, \\ Z_{i,p}'(\tau) &= g_{0,i}(0)Y_p(\tau) - g_{0,i}(-h)Y_{p-1}(\tau) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \alpha_{0,i}^k Z_{k,p}(\tau), \\ &\quad 0 \leq i \leq \tilde{k}, \quad -1 \leq p \leq 1, \\ J_{i,p}'(\tau) &= -g_{0,i}(0)Y_p(\tau) + g_{0,i}(-h)Y_{p+1}(\tau) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \alpha_{0,i}^k J_{k,p}(\tau), \\ &\quad 0 \leq i \leq \tilde{k}, \quad -2 \leq p \leq 0, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

con condiciones de frontera

$$\left\{ \begin{aligned} Y_i(0) &= Y_{i-1}(h), & -1 \leq i \leq 1, \\ Z_{i,-1}(0) &= J_{i,0}^T(h), & 0 \leq i \leq \tilde{k}, \\ Z_{i,0}(0) &= \int_0^h g_{0,i}(\theta - h)Y_{-1}(\theta)d\theta, & 0 \leq i \leq \tilde{k}, \\ \sum_{j=0}^2 [Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(h)] &+ \sum_{j=0}^1 \left\{ \sum_{i=0}^{\tilde{k}} Z_{i,-j}(0)C_{j,i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\tilde{k}} C_{j,i}^T J_{i,j-1}(h) \right\} &= -W, \\ Z_{i,p}(0) &= Z_{i,p-1}(h), & 0 \leq i \leq \tilde{k}, \quad 0 \leq p \leq 1, \\ J_{i,p}(0) &= J_{i,p-1}(h), & 0 \leq i \leq \tilde{k}, \quad -1 \leq p \leq 0, \\ J_{i,0}(0) &= \int_0^h g_{0,i}(-\theta)Y_0(\theta)d\theta, & 0 \leq i \leq \tilde{k}. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Prueba: El sistema de ecuaciones (14) resulta de las propiedades dinámicas (8), (10) y definiciones (12) y (13). Las condiciones de frontera están dadas por la propiedad algebraica (11) y las definiciones (12) y (13). ■

Lema 2: Si $g_{0,i}(\theta) = 1$ para algún i , existe una equivalencia entre las matrices auxiliares $J_{i,p}(\tau)$ y $Z_{i,p}(\tau)$. Por lo tanto el sistema (14), (15) puede ser reducido.

Prueba: El cambio de variable $\theta = -\zeta$ produce

$$\int_{-h}^0 U(\tau + \theta + (p+1)h)d\theta = \int_{-h}^0 U(\tau - \zeta + ph)d\zeta.$$

En base a las definiciones (12) y (13) y al Lema 1, se puede enunciar el siguiente resultado:

Teorema 1: Dado un sistema lineal retardado en la forma (5) cuyas matrices $G_j(\theta - jh)$ tienen la forma (6) y además satisfacen (7), entonces existe una solución

$$\begin{aligned} Y_i(\tau), & \quad -2 \leq i \leq 1, \\ Z_{i,p}(\tau), & \quad 0 \leq i \leq \tilde{k}, -1 \leq p \leq 1, \\ J_{i,p}(\tau), & \quad 0 \leq i \leq \tilde{k}, -2 \leq p \leq 0, \end{aligned}$$

del sistema libre de retardos de ecuaciones diferenciales matriciales (14) tal que $U(\tau) = Y_0(\tau)$, $\tau \in [0, h]$. Las condiciones de frontera (15), también se satisfacen por la solución.

V. CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ DE LYAPUNOV PARA EL CASO ESCALAR

En esta sección se estudia la construcción de la matriz de Lyapunov para el caso escalar de un sistema con retardo en el estado y en la entrada. Considere el sistema con retardos en el estado y en la entrada de control

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t-h) + bu(t-2h), \quad (16)$$

en lazo cerrado con el control predictivo dinámico

$$\dot{u}(t) = (g + f_0b)u(t) + f_1bu(t-h) + Q(2h)x(t) + \int_{-h}^0 Q(h-\theta)a_1x(t+\theta)d\theta + \int_{-2h}^0 Q(-\theta)bu(t+\theta)d\theta, \quad (17)$$

donde, $Q(t) = (f_0a_0 - gf_0)k(t) + f_1a_1k(t-2h) + (f_0a_1 + f_1a_0 - gf_1)k(t-h)$. Las variables f_0 y f_1 son parámetros de

diseño tales que $\dot{x}(t) = (a_0 + bf_0)x(t) + (a_1 + bf_1)x(t - h)$ es estable. En este caso la representación (5) se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_0 z(t) + A_1 z(t - h) + A_2 z(t - 2h) + \\ & \int_{-h}^0 G_0(\theta) z(t + \theta) d\theta + \int_{-h}^0 G_1(\theta - h) z(t + \theta - h) d\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{donde, } A_0 = & \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ Q(2h) & g + f_0 b \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & f_1 b \end{bmatrix}, \\ A_2 = & \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_0(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Q(h - \theta) a_1 & Q(-\theta) b \end{bmatrix}, \\ G_1(\theta - h) = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q(-\theta + h) b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular los núcleos $G_0(\theta)$ y $G_1(\theta - h)$ se requiere evaluar la función $Q(t)$ la cual depende de la matriz fundamental $k(t)$ en los intervalos $[0, h]$ y $[h, 2h]$. En el intervalo $t \in [0, h]$, $k(t) = e^{a_0 t}$. Para $t \in [h, 2h]$, $k(t) = e^{a_0 t} [1 + a_1 e^{-a_0 h} (t - h)]$,

de manera que $G_0(\theta) = \theta e^{-a_0 \theta} C_{0,0} + e^{-a_0 \theta} C_{0,1}$,

$$\begin{aligned} \text{con } C_{0,0} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_1 a_1 & 0 \end{bmatrix}, C_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_2 a_1 & c_3 b \end{bmatrix}, \\ c_1 = & (g f_0 - f_0 a_0) a_1, \\ c_2 = & [(f_0 a_0 - g f_0) e^{a_0 h} + (f_0 a_1 + f_1 a_0 - g f_1)], \\ c_3 = & (f_0 a_0 - g f_0), \end{aligned}$$

$$G_1(\theta - h) = \theta e^{-a_0 \theta} C_{1,0} + e^{-a_0 \theta} C_{1,1},$$

$$\begin{aligned} \text{con } C_{1,0} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_4 b \end{bmatrix}, C_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_5 b \end{bmatrix}, \\ c_4 = & (g f_0 - f_0 a_0) a_1, \\ c_5 = & [(f_0 a_0 - g f_0) e^{a_0 h} + (f_0 a_1 + f_1 a_0 - g f_1)]. \end{aligned}$$

Finalmente, el sistema en lazo cerrado esta descrito por

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_0 z(t) + A_1 z(t - h) + A_2 z(t - 2h) + \\ & \int_{-h}^0 \theta e^{-a_0 \theta} C_{0,0} z(t + \theta) d\theta + \int_{-h}^0 e^{-a_0 \theta} C_{0,1} z(t + \theta) d\theta + \\ & \int_{-h}^0 \theta e^{-a_0 \theta} C_{1,0} z(t + \theta - h) d\theta + \int_{-h}^0 e^{-a_0 \theta} C_{1,1} z(t + \theta - h) d\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Se aplica el Lema 1 de la construcción general de la Sección IV para obtener el sistema lineal libre de retardos de ecuaciones diferenciales matriciales correspondiente al sistema (19),

$$\begin{aligned} Y'_1(\tau) &= Y_1(\tau) A_0 + Y_0(\tau) A_1 + Y_{-1}(\tau) A_2 + Z_{0,1}(\tau) C_{0,0} \\ &\quad + Z_{1,1}(\tau) C_{0,1} + Z_{0,0}(\tau) C_{1,0} + Z_{1,0}(\tau) C_{1,1}, \\ Y'_0(\tau) &= Y_0(\tau) A_0 + Y_{-1}(\tau) A_1 + Y_{-2}(\tau) A_2 + Z_{0,0}(\tau) C_{0,0} \\ &\quad + Z_{1,0}(\tau) C_{0,1} + Z_{0,-1}(\tau) C_{1,0} + Z_{1,-1}(\tau) C_{1,1}, \\ Y'_{-1}(\tau) &= -A_0^T Y_{-1}(\tau) - A_1^T Y_0(\tau) - A_2^T Y_1(\tau) \\ &\quad - C_{0,0}^T J_{0,-1}(\tau) - C_{0,1}^T J_{1,-1}(\tau) - C_{1,0}^T J_{0,0}(\tau) \\ &\quad - C_{1,1}^T J_{1,0}(\tau), \\ Y'_{-2}(\tau) &= -A_0^T Y_{-2}(\tau) - A_1^T Y_{-1}(\tau) - A_2^T Y_0(\tau) \\ &\quad - C_{0,0}^T J_{0,-2}(\tau) - C_{0,1}^T J_{1,-2}(\tau) - C_{1,0}^T J_{0,-1}(\tau) \\ &\quad - C_{1,1}^T J_{1,-1}(\tau), \\ Z'_{0,1}(\tau) &= h e^{a_0 h} Y_0(\tau) - Z_{1,1}(\tau) + a_0 Z_{0,1}(\tau) \\ Z'_{0,0}(\tau) &= h e^{a_0 h} Y_{-1}(\tau) - Z_{1,0}(\tau) + a_0 Z_{0,0}(\tau) \\ Z'_{0,-1}(\tau) &= h e^{a_0 h} Y_{-2}(\tau) - Z_{1,-1}(\tau) + a_0 Z_{0,-1}(\tau) \\ J'_{0,0}(\tau) &= -h e^{a_0 h} Y_1(\tau) + J_{1,0}(\tau) - a_0 J_{0,0}(\tau) \\ J'_{0,-1}(\tau) &= -h e^{a_0 h} Y_0(\tau) + J_{1,-1}(\tau) - a_0 J_{0,-1}(\tau) \\ J'_{0,-2}(\tau) &= -h e^{a_0 h} Y_{-1}(\tau) + J_{1,-2}(\tau) - a_0 J_{0,-2}(\tau) \\ Z'_{1,1}(\tau) &= Y_1(\tau) - e^{a_0 h} Y_0(\tau) + a_0 Z_{1,1}(\tau) \\ Z'_{1,0}(\tau) &= Y_0(\tau) - e^{a_0 h} Y_{-1}(\tau) + a_0 Z_{1,0}(\tau) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ Z'_{1,-1}(\tau) &= Y_{-1}(\tau) - e^{a_0 h} Y_{-2}(\tau) + a_0 Z_{1,-1}(\tau) \\ J'_{1,0}(\tau) &= e^{a_0 h} Y_1(\tau) - Y_0(\tau) - a_0 J_{1,0}(\tau) \\ J'_{1,-1}(\tau) &= e^{a_0 h} Y_0(\tau) - Y_{-1}(\tau) - a_0 J_{1,-1}(\tau) \\ J'_{1,-2}(\tau) &= e^{a_0 h} Y_{-1}(\tau) - Y_{-2}(\tau) - a_0 J_{1,-2}(\tau). \end{aligned} \quad (20)$$

Las condiciones de frontera son,

$$\begin{aligned} Y_1(0) &= Y_0(h), \\ Y_0(0) &= Y_{-1}(h), \\ Y_{-1}(0) &= Y_{-2}(h), \\ Z_{0,1}(0) &= Z_{0,0}(h), \\ Z_{0,0}(0) &= \int_0^h (\theta - h) e^{-a_0(\theta - h)} Y_{-1}(\theta) d\theta, \\ J_{0,0}(0) &= J_{0,-1}(h), \\ J_{0,-1}(0) &= J_{0,-2}(h), \\ Z_{1,1}(0) &= Z_{1,0}(h), \\ Z_{1,0}(0) &= \int_0^h e^{-a_0(\theta - h)} Y_{-1}(\theta) d\theta, \\ J_{1,0}(0) &= J_{1,-1}(h), \\ J_{1,-1}(0) &= J_{1,-2}(h), \\ Z_{0,-1}(0) &= J_{0,0}^T(h), \\ Z_{1,-1}(0) &= J_{1,0}^T(h), \\ J_{0,0}(0) &= -\int_0^h \theta e^{a_0 \theta} Y_0(\theta) d\theta, \\ J_{1,0}(0) &= \int_0^h e^{a_0 \theta} Y_0(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_0^T Y_0(0) + Y_0(0) A_0 \\ & + A_1^T Y_0(h) + Y_{-1}(0) A_1 \\ & + A_2^T Y_1(h) + Y_{-2}(0) A_2 \\ & + Z_{0,0}(0) C_{0,0} + C_{0,0}^T J_{0,-1}(h) \\ & + Z_{1,0}(0) C_{0,1} + C_{0,1}^T J_{1,-1}(h) \\ & + Z_{0,-1}(0) C_{1,0} + C_{1,0}^T J_{0,0}(h) \\ & + Z_{1,-1}(0) C_{1,1} + C_{1,1}^T J_{1,0}(h) = -W. \end{aligned} \quad (21)$$

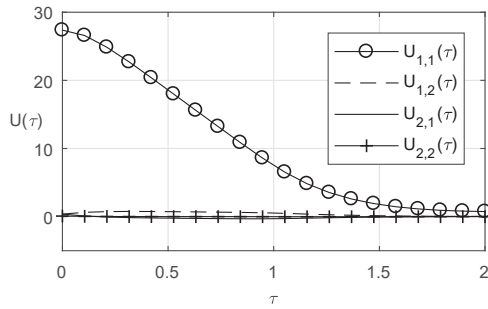


Fig. 1. Elementos de la matriz $U(\tau)$ del sistema (19).

Se escribe el sistema (20) vectorialmente definiendo $y_i(\tau) = \text{vec}(Y_i(\tau))$ y se aplican las propiedades de los productos de Kronecker. Este proceso conduce al sistema libre de retardo $\dot{R}(\tau) = LR(\tau)$, donde

$$R(\tau) = [y_1(\tau), y_0(\tau), y_{-1}(\tau), y_{-2}(\tau), z_{0,1}(\tau), z_{0,0}(\tau), z_{0,-1}(\tau), j_{0,0}(\tau), j_{0,-1}(\tau), j_{0,-2}(\tau), z_{1,1}(\tau), z_{1,0}(\tau), z_{1,-1}(\tau), j_{1,0}(\tau), j_{1,-1}(\tau), j_{1,-2}(\tau)]^T.$$

De igual manera se escriben las condiciones de frontera (21),

$$R(0) = [M + Ne^{Lh}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -W \end{bmatrix}. \quad (22)$$

La solución es,

$$R(\tau) = e^{L\tau} R(0). \quad (23)$$

Las matrices reales L , M , y N son resultado del proceso de vectorización y son omitidas por limitaciones de espacio.

VI. EJEMPLO ILUSTRATIVO

A continuación, se construye la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ mediante la solución (22, 23) en el caso $h = 1$, $a_0 = 0.2$, $a_1 = 0.8$, $b = 1$, $g = -2$ y $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En la Figura 1 se muestran los elementos de $U(\tau) = Y_0(\tau)$ y $U(\tau + h) = Y_1(\tau)$ definidos en el intervalo $\tau \in [0, 1]$ cuando $(f_0, f_1) = (-6, -2.25)$.

A. Región de Estabilidad

Para verificar si la matriz de Lyapunov construida en la sección anterior es correcta, se realiza un estudio que compara la región de estabilidad en los parámetros de diseño (f_0, f_1) del sistema con control predictivo con la correspondiente al sistema con control dinámico predictivo. El lazo cerrado con control predictivo del sistema (16) es

$$\dot{x}(t) = (0.2 + f_0)x(t) + (0.8 + f_1)x(t - h). \quad (24)$$

Se usan las condiciones necesarias y suficientes expresadas en términos de la matriz de Lyapunov $U(\tau)$ propuestas en [12], para encontrar la zona de estabilidad de ambos sistemas. Como se espera, en la Figura 2 se muestra que ambos sistemas presentan la misma zona de estabilidad. Las líneas

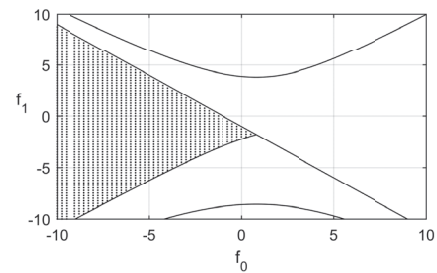
continuas de las figuras son obtenidas aplicando el método de D-particiones introducido en [17]. Los puntos aislados representan puntos donde las condiciones se satisfacen.

B. Decaimiento Exponencial

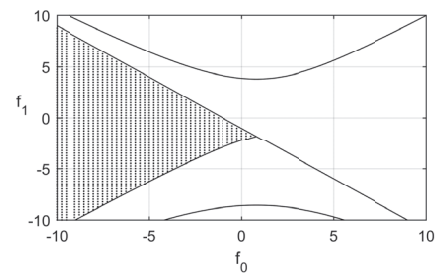
Se sabe que el control dinámico predictivo no tiene problemas de implementación, pero éste agrega dinámicas al sistema en lazo cerrado, en este ejemplo un polo $-g$. Es de interés observar el efecto del filtro introducido en la entrada de control en la dinámica del sistema en lazo cerrado. Por esta razón se compara la σ -estabilidad del lazo cerrado del controlador predictivo contra la del controlador dinámico predictivo. El análisis de σ -estabilidad consiste en encontrar parámetros que aseguren un decaimiento exponencial σ del sistema en lazo cerrado y posiblemente encontrar el máximo. Primero se realiza el cambio de variable $y(t) = e^{\sigma t}z(t)$, de manera que la estabilidad del sistema $y(t) = (0.2 + f_0 + \sigma)y(t) + (0.8 + f_1)e^{\sigma h}y(t - h)$, es equivalente a la σ -estabilidad del sistema (24). De igual manera la estabilidad del sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & [\sigma I + A_0]y(t) + e^{\sigma h}A_1y(t - h) + e^{2\sigma h}A_2y(t - 2h) + \\ & \int_{-h}^0 \theta e^{(-a_0 - \sigma)\theta} C_{0,0}y(t + \theta)d\theta + \int_{-h}^0 e^{(-a_0 - \sigma)\theta} C_{0,1}y(t + \theta)d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \theta e^{(-a_0 - \sigma)\theta} e^{\sigma h} C_{1,0}y(t + \theta - h)d\theta + \\ & \int_{-h}^0 e^{(-a_0 - \sigma)\theta} e^{\sigma h} C_{1,1}y(t + \theta - h)d\theta, \end{aligned}$$

es equivalente a la σ -estabilidad del sistema (19). A continuación se usan nuevamente las condiciones necesarias y



(a) Sistema (24)



(b) Sistema (19)

Fig. 2. Las Figuras (a), (b) presentan la región de estabilidad en el plano de parámetros (f_0, f_1) del lazo cerrado con control predictivo y con control dinámico predictivo, respectivamente.

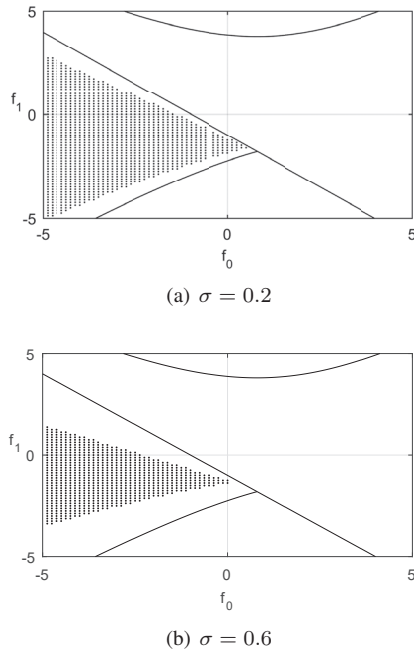


Fig. 3. Las figuras (a) y (b) muestran la región de estabilidad del sistema (24) para la σ indicada.

suficientes [12] y se muestra el comportamiento del sistema para dos valores de σ . Las subfiguras (a) y (b) de la Figura 3 muestran la región de estabilidad en el plano de parámetros (f_0, f_1) del sistema con controlador predictivo (24), note que la región se reduce conforme σ se incrementa.

Para el sistema con control dinámico predictivo (19), se muestran las subfiguras (a) y (b) de la Figura 4. Como en el caso anterior, ahí se observa que la región de estabilidad también se reduce conforme σ se incrementa. En otra prueba se elige $-g < \sigma$, es decir, para $\sigma = 0.2$, se elige $g = -0.1$ y para $\sigma = 0.6$, $g = -0.5$, en ambos casos no se produce región de estabilidad alguna en el espacio de parámetros (f_0, f_1) .

Se concluye que para llevar a cabo el estudio de σ -estabilidad del control predictivo filtrado es importante elegir $-g > \sigma$, con el fin de que el filtro no afecte el decaimiento exponencial.

VII. CONCLUSIÓN

En este trabajo se analiza la estabilidad del control predictivo dinámico de un sistema lineal con retardo en el estado y en la entrada. Se muestra que el lazo cerrado se puede escribir como un sistema extendido con retardos múltiples concentrados y distribuidos. Se presenta una metodología para construir la matriz de Lyapunov del sistema, se concluye que es posible reducir el número de matrices auxiliares del sistema libre de retardos debido a la repetición de núcleos. Finalmente, el análisis de σ -estabilidad muestra la utilidad de la matriz de Lyapunov obtenida.

REFERENCIAS

[1] D. C. Delgado and J. L. Rivera, "Performance study of distributed power control algorithms under time-delays and measurement uncertainty," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 11, no. 2, pp. 690–697, 2013.

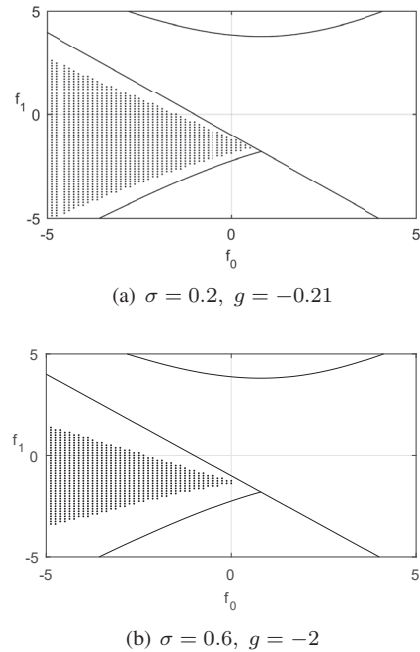
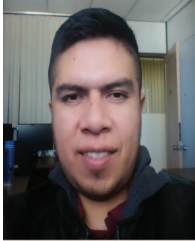


Fig. 4. Las figuras (a)-(b) muestran la región de estabilidad del sistema (19), para la σ y g indicada

- [2] O. J. Smith, "A controller to overcome dead time," *ISA J.*, vol. 6, pp. 28–33, 1959.
- [3] A. Manitius and A. Olbrot, "Finite spectrum assignment problem for systems with delays," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 4, pp. 541–552, 1979.
- [4] V. Van Assche, M. Dambrine, J.-F. Lafay, and J.-P. Richard, "Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws," in *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, vol. 5. IEEE, 1999, pp. 4668–4672.
- [5] K. Engelborghs, M. Dambrine, and D. Roose, "Limitations of a class of stabilization methods for delay systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 336–339, 2001.
- [6] S. Mondié and W. Michiels, "Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 12, pp. 2207–2212, 2003.
- [7] V. L. Kharitonov, "Predictor-based controls: the implementation problem," *Differential Equations*, vol. 51, no. 13, pp. 1675–1682, 2015.
- [8] L. Rodríguez-Guerrero, V. L. Kharitonov, and S. Mondié, "Robust stability of dynamic predictor based control laws for input and state delay systems," *Systems & Control Letters*, vol. 96, pp. 95–102, 2016.
- [9] B. Zhou, Q. Liu, and F. Mazenc, "Stabilization of linear systems with both input and state delays by observer-predictors," *Automatica*, vol. 83, pp. 368–377, 2017.
- [10] A. V. Egorov and S. Mondié, "Necessary stability conditions for linear delay systems," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 3204–3208, 2014.
- [11] C. Cuvas, S. Mondié, and G. Ochoa, "Distributed delay systems with truncated gamma distribution: instability regions," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 12, pp. 239–244, 2015.
- [12] A. V. Egorov, C. Cuvas, and S. Mondié, "Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays," *Automatica*, vol. 80, pp. 218–224, 2017.
- [13] A. Aliseyko, "Lyapunov matrices for a class of time-delay systems with piecewise-constant kernel," *International Journal of Control*, pp. 1–8, 2017.
- [14] L. Juárez and S. Mondié, "Lyapunov matrices for the stability analysis of a multiple distributed time-delay system with piecewise-function kernel," *IEEE Conference on Decision and Control*, 2018, Accepted.
- [15] V. L. Kharitonov, "An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay," *Automatica*, vol. 50, no. 1, pp. 211–217, 2014.
- [16] —, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [17] J. Neimark, "D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials," *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 13, pp. 349–380, 1949.



Luis Juárez received the B.S. degree in electronic engineering from Institute of Technology of Puebla, México, in 2005 and the M.S. degree in Automatic Control from the Department of Automatic Control CINVESTAV-IPN, México in 2015. He is currently a Ph.D. Student of Automatic Control at the Department of Automatic Control CINVESTAV-IPN, México.



Sabine Mondié (S'96-M'99) received the B.S. degree in industrial engineering from the ITESM, Mexico City, and the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from CINVESTAV, Mexico City and IRCyN, Nantes, France, in 1983 and 1996, respectively. Since 1996, she has been a professor at the Department of Automatic Control at CINVESTAV, Mexico City, Mexico. Her research interests include the analysis and control of time delay systems, and related applications.