

# Output Regulation for Descriptor Systems with High-Gain Observer Used as Exosystem for Unmodeled References

Miguel Amador-Macias , Tonatiuh Hernández-Cortés , Ricardo Tapia-Herrera , *Member, IEEE*,  
and Jesús A. Meda-Campaña , *Member, IEEE*

**Abstract**—This paper is oriented to solve the output regulation problem for descriptor systems on the basis of the modified Francis equations, for arbitrary reference signals by means of High-Gain Observer as a dynamical model, where its outputs corresponds to the references to follow and the disturbances to reject involved in the regulation problem. In this way, the regulation of unmodeled but measurable reference signals is achieved. The sufficiency conditions for designing the regulator are given in this paper. Additionally, to establish a globally attractive mapping, Linear Matrix Inequalities are used to find the steady state in a straightforward manner. The nonlinear, non-minimum phase, and underactuated systems such as the Furuta Pendulum and Pédubot are used to illustrate the viability of the proposed approach. Finally, the controller implementation on the Furuta Pendulum is provided to demonstrate its performance in real-time applications.

Link to graphical and video abstracts, and to code: <https://latam.ieeer9.org/index.php/transactions/article/view/8408>

**Index Terms**—Output Regulation, High Order-Gain Observer, Linear Matrix Inequality, Descriptor System

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de regulación generalmente se aborda como el control de la salida de un sistema para seguir una referencia deseada con la capacidad de rechazar perturbaciones no deseadas, producto de factores externos o propios de la planta, manteniendo propiedades como la estabilidad en lazo cerrado, rechazo de perturbaciones y seguimiento de la referencia con error cero. Desde la década de 1970, se han desarrollado investigaciones en torno a la regulación de sistemas en el espacio de estados. Trabajos como los de Francis [1], [2] y Wonham [3] presentan un sistema de ecuaciones matriciales lineales, llamadas ecuaciones de Francis, las cuales solucionan el problema del regulador lineal multivariable. Posteriormente, Isidori extiende la solución al caso no lineal, la cual está dada por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales, denominadas ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB) [4]. Cabe señalar que estos resultados son la base del desarrollo de nuevas investigaciones tales como [5]–[11]. En

este sentido, la teoría de la regulación provee la metodología para construir una ley de control con base en un generador de referencias y/o perturbaciones exógeno llamado exosistema, cuya principal ventaja es la de asegurar el seguimiento sin importar las condiciones iniciales de éste. Sin embargo, el modelo matemático debe conocerse a priori [12]–[14].

Los sistemas singulares o descriptores surgen como una alternativa para representar sistemas dinámicos que son complicados o que no se pueden escribir en su forma clásica de variables de estado [15]. Éstos están gobernados por ecuaciones diferenciales singulares, que proveen al sistema de características especiales que no se encuentran en sistemas clásicos. Entre estas se encuentran términos de impulso y derivadas de entrada en la respuesta del estado, no posee la propiedad de la matriz de transferencia, no hay causalidad entre la entrada y el estado (o la salida), condiciones iniciales consistentes, etc., lo que hace que el estudio sea más sofisticado que el de sistemas lineales clásicos. Siendo esta la razón por la cual los sistemas singulares han atraído interés en años recientes ya que los estudios están en su mayoría limitados a la generalización de la teoría de sistemas clásicos. Su estructura tiene una combinación particular tanto del estado y su derivada, las cuales en aplicaciones prácticas comúnmente son mediciones independientes [16]. Cabe mencionar que la representación de un modelo dinámico en forma descriptor, ha permitido resolver una variedad de problemas en los diferentes campos de la ciencia y tecnología; por mencionar algunos: la descripción de brotes o el repentino decaimiento de poblaciones de áfidos [17], el modelado dinámico de sistemas robóticos con aplicaciones en medicina [18], estimación de carga en baterías [19], [20], control de vuelo [21], [22], dispositivos de tracción en trenes de alta velocidad [23], entre otros

El problema de la regulación en sistemas singulares se ha estudiado en [16], [24]–[27] derivándose las condiciones necesarias y suficientes para resolver la regulación de sistemas lineales. Además, a partir de la salida normal de control de retroalimentación, se ha demostrado que existe la solución al problema de regulación de la salida no lineal para una amplia gama de sistemas singulares, solo si existe un control de retroalimentación de salida singular. La regulación de la salida para sistemas singulares se formula con base en el modelado completo de la ecuación diferencial autónoma denominada exosistema, facilitando la tarea de encontrar un controlador. Sin embargo, en casos prácticos la señal de referencia es

M. Amador-Macias y Tonatiuh Hernández-Cortés pertenecen a la Universidad Politécnica de Pachuca, Pachuca, México (e-mail: miguel1207@micorreo.upp.edu.mx y tonatiuh@upp.edu.mx).

Ricardo Tapia-Herrera pertenece al CONAHCYT-IPN, México (e-mail: rtapia@ipn.mx).

Jesús A. Meda-Campaña pertenece a la SEPI ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México (e-mail: jmedac@ipn.mx).

proporcionada directamente de mediciones de un sistema no modelado, en consecuencia, obtener el controlador de dicho sistema en lazo cerrado no es una tarea trivial [28]. Esto implica que el controlador debe ser diseñado con información parcial o se tienen que adaptar mejoras cuando las variables de estado son desconocidas. Por lo tanto, el principio del modelo interno adquiere un papel fundamental para generar la señal de control apropiada cuando aparecen este tipo de señales. Recientemente, en [29] el problema de regulación de la salida se plantea como un problema de optimización del mapeo de la variedad en estado estacionario, considerando que el error cero se logra bajo suposiciones moderadas descritas en [30]. Otro enfoque se propone en [31], donde se establece una ley de control con base en los estados estimados por un observador en forma descriptor. En este contexto Sun [32] desarrolla un control integrando un observador de estado extendido para estimar el estado de la planta así como la referencia. Por otra parte, para efectos prácticos la complejidad del modelo dinámico de un sistema se verá reflejada en el consumo de recursos computacionales, y en consecuencia en la dificultad que representa implementar una ley de control. Lo anterior ha dado paso a resolver diferentes problemas en torno al seguimiento de señales, tal como en [33] donde se estudia la combinación de teoría de regulación y modos deslizantes, de tal forma que el controlador permita el seguimiento ante la presencia de perturbaciones desconocidas. Así mismo [34], [35] se enfocan en la regulación de sistemas singulares cooperativos multiagente.

Con el objetivo de tratar las referencias y/o perturbaciones no modeladas, los Observadores de Alta Ganancia (HGO por sus siglas en inglés) se usan tanto en plantas linealizables como en observadores de menor dimensión, para estimar los estados del sistema [36]–[38]. Éstos permiten el diseño de un exosistema (modelo dinámico) y su inserción en un conjunto de ecuaciones modificadas de Francis, extendiendo la teoría de regulación para señales de referencia y/o perturbaciones no modeladas. La idea principal es crear un exosistema con base en HGOs que estimen las señales (referencias y/o perturbaciones) cuya dinámica este incompleta o matemáticamente no disponible, pero medible, acotada y suave; lo anterior permite un rango amplio de aplicaciones tales como sincronización [30], seguimiento de patrones en rehabilitación, sistemas multiagentes [6], entre otros. Por otra parte, su integración a la teoría del problema de regulación permite la regulación de la salida de sistemas representados en forma descriptor.

La contribución de este trabajo tiene como base la hipótesis que, para modelos lineales y no lineales representados en forma descriptor, es posible lograr la regulación de la salida para señales no modeladas generadas a partir de un exosistema con base en un HGO. Adicionalmente, debido a la representación del sistema en forma descriptor así como del exosistema y su inclusión en la teoría de regulación aportará las condiciones necesarias para la solución al problema.

## II. PROBLEMA DE REGULACIÓN DE LA SALIDA PARA SISTEMAS DESCRIPTORES

Considere el sistema no lineal descrito por:

$$E(x)\dot{x}(t) = f(x, w, u), \quad y(t) = h(x), \quad (1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u \in \mathbb{R}^p$  es el vector de entrada,  $y \in \mathbb{R}^o$  es el vector de salida, y  $w \in \mathbb{R}^s$  es el vector de estados del exosistema, el cual genera la referencia a seguir, y/o las señales de perturbaciones a rechazar;  $f(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$  y  $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^o$  son campos vectoriales suaves tales que  $f(0, 0, 0) = 0$  y  $h(0) = 0$ ,  $E(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  es una función matricial cuyos elementos son suaves y acotados en un conjunto compacto  $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$  incluyendo el origen, además, puede ser singular. Cuando  $E(\cdot)$  no es singular el sistema 1 se puede representar como:

$$\dot{x}(t) = \tilde{f}(x, w, u), \quad y(t) = h(x), \quad (2)$$

con  $\tilde{f}(x, w, u) = E^{-1}(x)f(x, w, u)$ .

Además, el exosistema está definido por:

$$\dot{w}(t) = s(w), \quad y_r(t) = q(w), \quad (3)$$

donde  $s(w) : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^s$  y  $q(\cdot) : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^o$  son campos vectoriales suficientemente suaves, manteniendo  $s(0) = q(0) = 0$ ;  $y_r \in \mathbb{R}^o$  es la salida de referencia. Entonces el problema consiste en diseñar un controlador tal que el error de seguimiento

$$e(t) = y(t) - y_r(t) = h(x) - q(w), \quad (4)$$

tienda asintóticamente a cero [39]. En [4], [28], el problema de regulación de la salida para el caso no lineal (2)-(4) consiste en encontrar un controlador

$$u = K(x - \pi(w)) + \gamma(w), \quad (5)$$

con  $K$  tal que la aproximación lineal de (2) es asintóticamente estable, mientras que  $\pi(w)$ ,  $\pi(0) = 0$  y  $\gamma(w)$ ,  $\gamma(0) = 0$  se calculan del conjunto de ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes (FIB), descritas por:

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} s(w) = \tilde{f}(\pi(w), w, \gamma(w)), \quad (6)$$

$$0 = h(\pi(w)) - q(w). \quad (7)$$

En terminología de control diferencial-geométrico, la primera de estas ecuaciones expresa la propiedad de que el conjunto de puntos  $x = \pi(w)$  es una *variedad controlada invariante*, mientras que la segunda ecuación expresa la propiedad de que el *mapeo de error* es cero en cada punto de esta variedad, más tarde, se refirieron a la variedad invariante en cuestión como la variedad de error cero. Considere ahora la linealización de las ecuaciones (2), (3) y (4) entonces se puede obtener:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Pw, \quad (8)$$

$$y = Cx, \quad (9)$$

$$\dot{w} = S\omega, \quad (10)$$

$$e = Q\omega + Cx. \quad (11)$$

Las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $P$ ,  $C$ ,  $S$  y  $Q$  se obtienen de la linealización en  $(x, w, u) = (0, 0, 0)$ , es

decir,  $A = \frac{\partial \tilde{f}(x,w,u)}{\partial x} \Big|_{(0,0,0)}$ ,  $B = \frac{\partial \tilde{f}(x,w,u)}{\partial u} \Big|_{(0,0,0)}$ ,  
 $P = \frac{\partial \tilde{f}(x,w,u)}{\partial w} \Big|_{(0,0,0)}$ ,  $C = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{(0)}$ ,  $S = \frac{\partial s(w)}{\partial w} \Big|_{(0)}$  y  
 $Q = \frac{\partial q(w)}{\partial w} \Big|_{(0)}$ .

La contraparte lineal del conjunto (6)-(7) se obtiene cuando los mapeos  $x_{ss} = \pi(\omega)$  y  $u_{ss} = \gamma(\omega)$  tienden a  $x_{ss} = \Pi\omega$  así como  $u_{ss} = \Gamma\omega$ , respectivamente. Entonces, el conjunto se reduce un sistema de ecuaciones matriciales lineales (Ecuaciones de Francis), es decir,

$$\begin{aligned} \Pi S &= A\Pi + B\Gamma + P, \\ C\Pi &= Q. \end{aligned}$$

En consecuencia, el problema de regulación lineal tiene solución para una ley de control definida como  $u = Kx + Lw$ , con acceso completo al estado  $x$  y al exo-estado  $w$ , si se cumplen las ecuaciones anteriores para  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times s}$  y  $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times s}$ . Además, considerando  $L = \Gamma - K\Pi$ , la señal de control anterior conduce a:

$$u = K[x - \Pi w] + \Gamma w, \quad (12)$$

con  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  tal que la matriz  $A + BK$  sea Hurwitz. Tenga en cuenta que el diseño de  $K$  es independiente del exosistema ya que por definición el espectro de  $A + BK$  y  $S$  están desacoplados.

En la siguiente sección se presenta el desarrollo del HGO como exosistema y su implementación en la teoría de regulación, considerando sistemas descriptores, a través de la modificación de las ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes.

### III. DISEÑO DE EXOSISTEMA CON BASE EN OBSERVADOR DE ALTA GANANCIA

Dado un sistema no lineal descrito en la forma:

$$\dot{x} = A_h x + B_h \Phi(x), \quad (13)$$

$$y = C_h x, \quad (14)$$

con  $x \in \mathbb{R}^\rho$ , acotado para todo  $t \geq 0$ , y  $y \in \mathbb{R}^m$  como los vectores de estado y salida, respectivamente; además la función no lineal  $\Phi$  es localmente Lipschitz y parcialmente o completamente desconocida. Por lo anterior, es clara la necesidad de un Observador, en este caso de Alta Ganancia, para el sistema (13) y (14) el cual está definido por

$$\dot{\hat{x}} = A_h \hat{x} + B_h \Phi_0(\hat{x}) + H(y - \hat{y}), \quad (15)$$

$$\hat{y} = C_h \hat{x}, \quad (16)$$

donde

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\rho \times \rho}, \quad (17)$$

$$B_h = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]_{1 \times \rho}^T, \quad (18)$$

$$C_h = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]_{1 \times \rho}, \quad (19)$$

note que  $\Phi_0(\hat{x})$  representa al modelo nominal de  $\Phi(\hat{x})$ . De igual forma, si el error de estimación se obtiene de  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ,

y las salidas se establecen por  $y = x_1$ ,  $\hat{y} = \hat{x}_1$ , entonces el sistema satisface:

$$\dot{\tilde{x}} = A_h \tilde{x} + B_h(\Phi(x) - \Phi_0(\tilde{x})) - H\tilde{x}_1, \quad (20)$$

$$= A_0 \tilde{x} + B_h(\Phi(x) - \Phi_0(\tilde{x})), \quad (21)$$

con

$$A_0 = \begin{bmatrix} -h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -h_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -h_\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Bajo la condición  $B_h(\Phi(x) - \Phi_0(\tilde{x})) = 0$ , la convergencia asintótica del error se logra a través del diseño de las ganancias de  $H = \text{col}(h_1, h_2, \dots, h_\rho)$  tal que  $A_0$  sea Hurwitz y  $H$  sea de la forma:

$$H = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_\rho \\ \epsilon & \epsilon^2 & \cdots & \epsilon^\rho \end{bmatrix}^T, \quad (23)$$

cabe destacar que el término  $\epsilon$  tiene cierta relación con la tasa de decaimiento de la estimación del error; debe ser positiva y suficientemente pequeña. Adicionalmente  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  se escogen de tal forma que

$$s^\rho + \alpha_1 s^{\rho-1} + \alpha_2 s^{\rho-2} + \cdots + \alpha_{\rho-1} s + \alpha_\rho, \quad (24)$$

también sea Hurwitz. Por otro lado, considerando

$$\eta_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\epsilon^{\rho-1}}, \eta_2 = \frac{\tilde{x}_2}{\epsilon^{\rho-2}}, \dots, \eta_\rho = \tilde{x}_\rho, \quad (25)$$

el sistema (21) se puede reescribir como

$$\epsilon \dot{\eta} = F\eta + \epsilon B_h(\Phi(x) - \Phi_0(\hat{x})), \quad (26)$$

con

$$F = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{\rho-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

Hurwitz porque  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  son positivas. La matriz  $A_0$  y  $F$  están relacionadas por la transformación de similitud (25). Se puede observar que si el valor de  $\epsilon$  es muy pequeño, el segundo término de (26) pierde influencia y se puede segregar, en consecuencia para  $\Phi_0(\hat{x}) = 0$  (caso lineal), el observador puede estimar el sistema descrito por (13) y (14), incluso si  $\Phi(x)$  es totalmente desconocida. [40]

*A. Ecuaciones modificadas de Francis-Isidori-Byrnes cuando el exosistema es un Observador de Alta Ganancia.*

Estableciendo  $\psi(t)$  como la salida del sistema no lineal representado por el conjunto de ecuaciones (13) y (14) con  $\rho \geq 1$ , el Observador de Alta Ganancia descrito por (15) y (16) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{\hat{x}} = A_h \hat{x} + H(\psi(t) - \hat{y}), \quad (27)$$

$$\hat{y} = C_h \hat{x}, \quad (28)$$

generando el sistema (13) y (14) con  $\Phi(x) = \psi^\rho(t)$ . Además, si  $\psi^\rho(t)$  es la derivada de  $\psi(t)$  con  $\rho \geq 1$ , es decir,  $\psi^\rho(t)$

Lipschitz; entonces se garantiza la existencia del observador. Lo anterior implica que incluso si la función  $\psi(t)$  es completamente desconocida se puede considerar como la salida de un modelo virtual y el HGO se puede usar para estimar el estado y la salida de dicho sistema.

Para el diseño del exosistema como un HGO, se propone un conjunto de señales en un vector  $\Psi(t)$  definido por

$$\Psi^T(t) = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_m \ \cdots \ \psi_{m+d}], \quad (29)$$

destacando que  $\psi_1, \dots, \psi_m$  son las señales de referencia a seguir y  $\psi_{m+1}, \dots, \psi_{m+d}$  son señales de perturbación a rechazar. Entonces, configurando a  $\Psi(t)$  como la salida del exosistema, medible para  $t \geq 0$ ; las ecuaciones (27) y (28) se utilizan para estimar cada una de las señales de  $\Psi(t)$ , esto representa el diseño de un observador HGO por cada señal y su integración en una matriz a bloques como se muestra a continuación:

$$\dot{w} = S_A w + S_H(\Psi(t) - y_w), \quad (30)$$

$$y_w = \begin{bmatrix} y_{ref} \\ y_{dis} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{ref} \\ Q_{dis} \end{bmatrix} w = Q_w w, \quad (31)$$

$y_{ref} \in \mathbb{R}^m$  y  $y_{dis} \in \mathbb{R}^d$  son las  $m$  referencias a seguir así como las  $d$  perturbaciones a rechazar, respectivamente. Por lo tanto, el vector completo de salida es  $y_w \in \mathbb{R}^{m+d}$ . Además, las matrices a bloques relacionadas con las  $m$  y  $d$  señales están definidas como:  $S_A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m, \dots, A_{m+d})$ ,  $S_H = \text{diag}(H_1, \dots, H_m, \dots, H_{m+d})$  y  $Q_w = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_m, \dots, Q_{m+d})$ . con  $A_i$ ,  $H_i$  y  $Q_i$  como (17), (23) y (19), respectivamente, para  $i = 1, \dots, m+d$ . Por otro lado, teniendo en cuenta que cada observador se puede representar como en (26); el nuevo exosistema (30) se puede reescribir como

$$\dot{w} = S w + S_H \Psi(t), \quad (32)$$

$$y_w = Q_w w, \quad (33)$$

donde  $S = \text{diag}(S_1, \dots, S_m, \dots, S_{m+d})$  con  $S_i \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$  para  $i = 1, \dots, m+d$  como matrices a bloques definidas por

$$S_i = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\epsilon} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{\epsilon^2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_{\rho-1}}{\epsilon^{\rho-1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{\alpha_\rho}{\epsilon^\rho} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

*Observación 1:* La desventaja principal de este observador se presenta cuando  $\rho$  tiene un valor alto ya que existen picos relativamente grandes en los estados durante el estado transitorio, lo anterior se debe a que las ganancias son proporcionales a las potencias de  $\frac{1}{\epsilon}, \dots, \frac{1}{\epsilon^\rho}$ . Para evitar este fenómeno y por simplicidad se recomienda ajustar  $\rho = 2$ . Además, la presencia de ruido en la señal medida puede afectar considerablemente el desempeño del observador. Por otra parte, al aumentar el valor de la ganancia del observador disminuye el error de estimación y se rechaza mejor la incertidumbre, pero aumentan las oscilaciones en la respuesta. Si la ganancia es muy alta aumenta la sensibilidad al ruido y el observador puede volverse inestable.

Por consiguiente, el *problema de regulación no lineal* para señales no modeladas con exosistema definido como en (32) y (33) para el vector (29) medible para todo  $t \geq 0$  se puede resumir como: sea  $K$  tal que la aproximación lineal de (1) sea asintóticamente estable y existen las ganancias no lineales  $\pi(w)$ ,  $\pi(0) = 0$  y  $\gamma(w)$ ,  $\gamma(0) = 0$  que se obtienen de

$$\frac{\partial \pi(w)}{\partial w} (S w + S_H \Psi(t)) = \tilde{f}(\pi(w), w, \gamma(w)), \quad (34)$$

$$0 = h(\pi(w)) - Q_{ref}(w). \quad (35)$$

Entonces, el *problema de regulación no lineal para referencias no modeladas* existe y la ley de control está dada por  $u = K(x - \pi(w)) + \gamma(w)$ . El conjunto de ecuaciones (34)-(35) son las ecuaciones modificadas de Francis-Isidori-Byrnes (FIB). Para el caso lineal, el sistema (1),(4) y (32) se puede escribir como

$$E\dot{x} = Ax + Bu + Pw, \quad y = Cx, \quad (36)$$

$$\dot{w} = S w + S_H \Psi(t), \quad (37)$$

$$e = Q_{ref} w + Cx. \quad (38)$$

donde  $x_{ss} = \pi(w)$  y  $u_{ss} = \gamma(w)$  se transforman en  $x_{ss} = \Pi w$  y  $u_{ss} = \Gamma w$ , respectivamente. Además, considerando que el control de retroalimentación  $u = Kx + Lw$  posee la información completa; las condiciones para la regulación lineal se puede deducir considerando  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times \rho(m+d)}$ ,  $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times \rho(m+d)}$ , y  $L = \Gamma - K\Pi$ . Entonces, mediante un cambio de coordenadas de la forma  $E\tilde{x} = Ex - E\Pi w$ , conduce a

$$\begin{aligned} E\dot{\tilde{x}} &= E\dot{x} - E\Pi\dot{w}, \\ &= Ax + Bu + Pw - E\Pi S w - E\Pi S_H \Psi(t), \\ &= Ax + BKx + BLw + Pw - E\Pi S w - E\Pi S_H \Psi(t). \end{aligned}$$

Considerando  $x = \tilde{x} + \Pi w$ , el sistema previo se expresa como:

$$E\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x} + \Pi w) + BK(\tilde{x} + \Pi w) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &+ BLw + Pw - E\Pi S w - E\Pi S_H \Psi(t), \\ &= (A + BK)\tilde{x} \end{aligned} \quad (40)$$

$$+ (A\Pi + BK\Pi + BL + P - E\Pi S)w - E\Pi S_H \Psi(t).$$

Lo anterior permite deducir que el sistema posee un subespacio estable e invariante, siendo  $\Pi$  y  $\Gamma$  la solución de la ecuación:

$$E\Pi S + E\Pi S_H \Psi(t) = (A + BK)\Pi + (BL + P). \quad (41)$$

Retomando que el error de seguimiento está dado por

$$\begin{aligned} e &= Cx + Q_{ref} w = C(\tilde{x} + \Pi w) + Q_{ref} w \\ &= C\tilde{x} + (C\Pi + Q_{ref})w, \end{aligned} \quad (42)$$

implica que el error tenderá a cero, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , solo si se satisface  $C\Pi + Q_{ref} = 0$ .

El análisis anterior permite establecer las siguientes condiciones:

- Diseñar  $K$  tal que  $E\dot{\tilde{x}} = (A + BK)\tilde{x}$  sea estable. Considerando lo anterior, el enfoque propuesto en este trabajo es calcular una ganancia  $K$  para crear un estado

estacionario globalmente atractivo usando LMI's, permitiendo modificar la tasa exponencial de decaimiento o imponer cotas a las entradas-salidas.

- Calcular  $\Pi$  y  $\Gamma$  de las siguientes ecuaciones

$$0 = A\Pi + B\Gamma + P - E\Pi S - E\Pi S_H Q_w, \quad (43)$$

$$0 = C\Pi + Q_{ref}. \quad (44)$$

Las ecuaciones (43) y (44) reciben el nombre de ecuaciones Francis-Isidori-Byrnes para sistemas lineales en forma descriptor con señales de referencia y/o perturbación desconocida.

Con el objetivo de diseñar un controlador para el modelo descriptor, se emplea un sistema aumentado, *forma redundante*, es decir,  $\dot{x} = \dot{x}$  y  $0 \times \ddot{x} = A_h x + B_h u - E_h \dot{x}$  [41]–[43], entonces

$$\bar{E}\dot{\bar{x}} = \bar{A}_h \bar{x} + \bar{B}_h u \quad (45)$$

$$y = \bar{C}_h \bar{x} \quad (46)$$

donde  $\bar{x} = [x^T, \dot{x}^T]^T$ ,  $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{A}_h = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & -E \end{bmatrix}$ ,  $\bar{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$  y  $\bar{C}_h = [C \ 0]$ ; para el controlador, debido al cambio del vector de estado, se propone un lazo de retroalimentación de estado en la siguiente forma:

$$u = [K \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \bar{F}_h \bar{x}. \quad (47)$$

Adicionalmente, usando la función candidata de Lyapunov  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E}^T \bar{P} \bar{x}$ ,  $\bar{E}^T \bar{P} = \bar{P}^T \bar{E} \geq 0$ , donde  $\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$  y  $P_1 = P_1^T > 0$ , la estabilidad se asegura si  $\dot{V}(\bar{x}) < 0$ , lo cual conduce a la siguiente desigualdad

$$\bar{A}_h^T \bar{P} + \bar{F}_h^T \bar{B}_h^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{A}_h + \bar{P}^T \bar{B}_h \bar{F}_h < 0. \quad (48)$$

Considerando  $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ , con  $X_1 = P^{-1}$ ,  $X_4 = P_4^{-1}$ ,  $X_3 = -P_4^{-1} P_3 P_1^{-1}$  y multiplicando (48) por  $X^T$  y  $X$  por izquierda y derecha respectivamente, se encuentra el siguiente resultado.

*Teorema 1:* El sistema (45) se estabiliza por (47) si existe  $X_1, X_3, X_4$  y  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $X_1 > 0$ ,

$$\begin{bmatrix} X_3 + X_3^T & (*) \\ AX_1 + BM - EX_3 + X_4^T & -EX_4 - X_4^T E^T \end{bmatrix} < 0, \quad (49)$$

donde la ganancia del controlador se calcula a partir de  $K = MX_1^{-1}$ .

Obsérvese que (\*) denota el elemento simétrico de la transpuesta; vea [41]–[43]. Las ventajas de emplear LMI's permiten incorporar diferentes comportamientos, tales como: tasa de decaimiento, restricciones de entrada y salida. Dado que el objetivo es proporcionar un estabilizador, de fácil implementación en tiempo real, se establecen las siguientes desigualdades, considere  $X > 0$ ,

$$\begin{bmatrix} X_3 + X_3^T + 2\alpha X_1 & (*) \\ AX_1 + BM - EX_3 + X_4^T & -EX_4 - X_4^T E^T \end{bmatrix} < 0, \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(0) \\ x(0) & X_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & M^T \\ M & \mu^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (51)$$

asociadas a  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E}^T \bar{P} \bar{x}$ . La desigualdad (50) garantiza  $\dot{V} \leq -2\alpha V$ , donde  $\alpha > 0$  corresponde a la tasa de decaimiento, es decir, la función candidata de Lyapunov esta en función de los estados del sistema, por lo que a mayor descenso mayor rapidez de estabilización. La desigualdad (50) satisface  $\|u(t)\| \leq \mu$  para la condición inicial  $x(0)$  [44], lo cual implica una restricción de la magnitud de la señal de entrada  $\mu > 0$  ya que la planta física no dispone de energía ilimitada para realizar la tarea de control.

#### IV. EJEMPLOS NUMÉRICOS

La estabilidad de un sistema dinámico está ampliamente relacionada con la ubicación de sus polos y ceros, por lo tanto, un sistema será estable si es de fase mínima, es decir, sus polos y ceros estarán el semi-plano izquierdo del plano complejo. En contraste, un sistema de fase no mínima contará con polos y ceros en el semi-plano derecho e incluso en ambos semi-planos, produciendo inestabilidad, lo cual es interesante desde la perspectiva del diseño de una ley de control. Así, como casos prácticos para la implementación del controlador desarrollado, se proponen el péndulo doble invertido y el péndulo rotacional invertido. Ambos sistemas caracterizados por tener menos entradas de control que grados de libertad (sistemas subactuados), poseen una dinámica altamente no lineal debido a las fuerzas de Coriolis y centrípetas que se presentan, además de ser sistemas de fase no-mínima. En la Fig. 1a se presenta el diagrama de cuerpo libre del péndulo de Furuta [45], este mecanismo de péndulo rotacional se caracteriza por ser un sistema subactuado el cual consiste de una barra horizontal actuada por un motor de corriente directa, así como, de una barra que rota libremente con respecto a la barra horizontal por la junta de revolución que las une, por lo que se tienen dos grados de libertad. Del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1a se observa que el péndulo posee una masa  $m_p$ , una longitud  $l_p$  y está conectado a un motor de corriente directa a través del brazo de masa  $m_{arm}$ . En la Tabla I se proporciona la descripción de cada uno de los parámetros del péndulo de Furuta. Su comportamiento dinámico se puede derivar a partir de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, donde  $\phi$  es el ángulo de la barra horizontal con respecto al eje  $x$  proyectado en el plano  $x - y$ ,  $\theta$  es el ángulo entre la posición vertical y la barra que rota libremente, definiendo  $q = [\phi, \theta]$ , entonces

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (52)$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} J_{arm} + m_p r^2 + m_p l_p^2 \sin^2 \theta & m_p r l_p \cos \theta \\ m_p r l_p \cos \theta & J_p + m_p l_p^2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\theta} \sin 2\theta & \frac{1}{2} m_p l_p^2 \dot{\phi} \sin 2\theta - m_p r l_p \dot{\theta} \sin \theta \\ \frac{1}{2} m_p l_p^2 \sin \theta & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ m_p g l_p \sin 2\theta \end{bmatrix},$$

$$\tau = \begin{bmatrix} K_t (V_m - K_m \dot{\phi}) \\ \frac{R_m}{0} \end{bmatrix}.$$

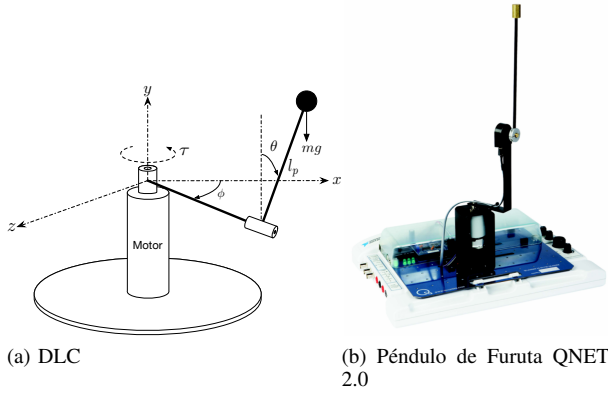


Fig. 1. Péndulo de Furuta QNET 2.0

TABLA I

PARÁMETROS DEL PÉNDULO INVERTIDO ROTATORIO

Símbolo	Descripción	Valor
$m_p$	Masa del péndulo	0.027 Kg
$M_{arm}$	Masa del brazo	0.095 Kg
$l_p$	Centro de masa del péndulo	m
$r$	Longitud desde la flecha al pivote del péndulo	0.083 m
$J_p$	Momento de inercia del péndulo relativo al pivote	$1.10 \times 10^{-4} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$
$J_{arm}$	Momento de inercia relativo la flecha	$1.23 \times 10^{-4} \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$
$R_m$	Resistencia de la armadura del motor	3.30 $\Omega$
$L_m$	Inductancia de la armadura del motor	47.0 mH
$K_t$	Constante del torque del motor	0.028 N·m
$K_m$	Constante de fuerza contraelectromotriz	0.028 V/(rad/s)
$V_m$	Voltaje de la fuente	- V

$q \in \mathbb{R}^{n_q}$  es la coordenada generalizada,  $\tau$  es el torque,  $M(q) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$  es la matriz de masa,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n_q}$  es la matriz de Coriolis, y  $g(q) \in \mathbb{R}^{n_q}$  es el vector de pares gravitacionales. La ecuación previa se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -g(q) - C(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (53)$$

La representación anterior se obtiene con  $x = [q^T \dot{q}^T]^T$  y  $u = \tau$ , es decir,

$$\tilde{E}\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u,$$

$$\text{con } \tilde{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(\cdot) \end{bmatrix}, \tilde{A}x = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -g(q) - C(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix}, \text{ y } \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Linealizando (53) alrededor del origen y considerando el exosistema definido en (32) y (33) con  $x_1$  como la salida a ser regulada se obtiene

$$E\dot{x} = Ax + Bu + Pw, \quad y = Cx, \quad (54)$$

$$\dot{w} = S\omega + S_H Q\omega, \quad y_{ref} = Q_{ref}\omega, \quad (55)$$

$$e = Q\omega + Cx,$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0004 & -0.0003 \\ 0 & 0 & -0.0003 & 0.0008 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.001 & 0 \\ 0 & 0.0405 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

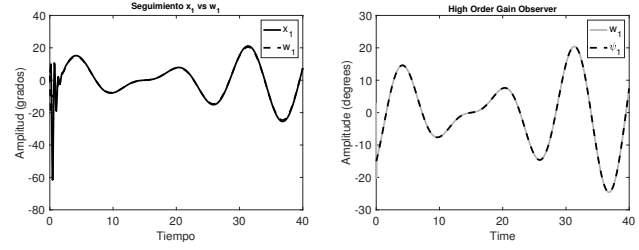
(a)  $x_1$  vs  $w_1$ (b) Variables  $w_1$  vs  $\psi_1$ 

Fig. 2. Seguimiento y Señal de salida del exosistema vs señal de referencia no modelada

$$B = [0 \quad 0 \quad 0.0038 \quad 0]^T, C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$Q_{ref} = [1 \quad 0], P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con la observación 1 la dimensión de  $\rho$  será 2. Tenga en cuenta que la dimensión del exosistema dependerá del número de señales y/o perturbaciones a estimar y las referencias están en función del número de actuadores de la planta; en consecuencia para el péndulo de Furuta la estructura del exosistema solo cuenta con un bloque. Las matrices  $S$  y  $S_H$  para  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$  y  $\epsilon = 0.1$  son

$$S = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_H = \begin{bmatrix} 10 \\ 200 \end{bmatrix}.$$

Los mapeos lineales  $x_{ss} = \Pi\omega$  y  $u_{ss} = \Gamma\omega$  se calculan con las ecuaciones (43)-(44) lo que conduce a

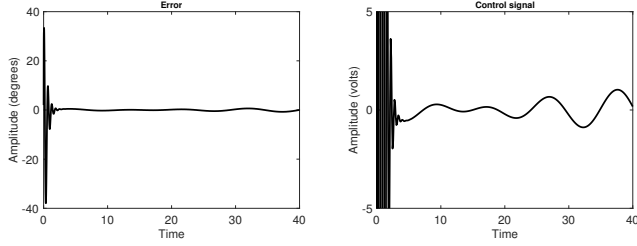
$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = [0 \quad 0.0333].$$

Con el objetivo de obtener una  $K$  tal que el sistema  $\dot{E}\hat{x} = (A + BK)\hat{x}$  sea estable, la desigualdad (50) garantiza a una máxima velocidad de convergencia. No obstante, para casos prácticos es importante considerar una señal de entrada de control acotada  $\|u(t)\| \leq \mu$  y tener un desempeño seguro del actuador; por lo que es necesario (51) con  $x(0)$  como condición inicial. Con base en lo anterior, se establece  $\alpha = 4$ ,  $\mu = 24$  volts y  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  resultando:

$$K = [2.9192 \quad -53.7856 \quad 1.5335 \quad -7.0262].$$

La simulación se realiza con las siguientes condiciones iniciales  $x(0) = [5^\circ \ 2^\circ \ 0 \ 0]^T$  y  $w(0) = [3^\circ, 0]^T$ . En la Fig. 2a se observa el seguimiento del estado  $x_1$  al exo-estado  $w_1$ , para el modelo no lineal.

Además, el desempeño del Observador de Alta Ganancia se muestra en la Fig. 2b, para una señal  $\psi_1 = \pi/15 \sin(\pi/5 * t) - \pi/12 \cos(\pi/6 * t)$  como la señal de referencia no modelada; se observa que la salida  $w_1$  tiende a la referencia  $\psi_1$ . Dado que el objetivo de este trabajo plantea la implementación en tiempo real, las LMI's proporcionan una tasa de decaimiento aceptable, ver Fig. 3a, y una restricción en la entrada confiable evitando magnitudes mayores en la señal de control como se puede apreciar en la Fig. 3b.



(a) Error de seguimiento

(b) Señal de control

Fig. 3. Error de seguimiento y señal de control para el péndulo de Furuta

### A. Péndubot

En esta sección se presenta el sistema péndulo doble invertido (Péndubot), el cual es común encontrarlo en el campo del control no lineal, debido a la riqueza dinámica y su complejidad para controlarlo. El esquema del cuerpo libre se muestra en la Fig. 4; este dispositivo básicamente es un robot planar de dos barras, actuado en el hombro y subactuado en el codo, así la barra exterior rota libremente alrededor de la barra interna. Entonces, el objetivo del control es imponer una trayectoria deseada en la barra externa con un error de seguimiento mínimo.

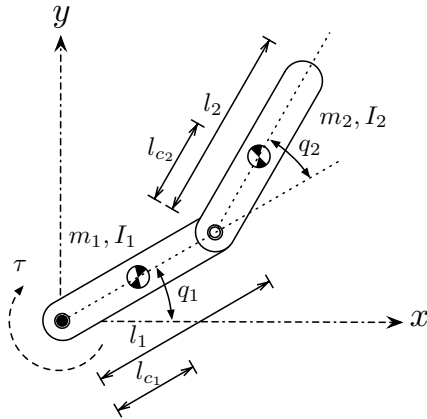


Fig. 4. Diagrama de cuerpo libre del Péndubot

A partir de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se calcula la dinámica, donde  $q_1$  está definido como el ángulo entre el eje  $x$  y la barra interna, mientras que  $q_2$  es el ángulo proyectado entre las dos barras medido con respecto a la barra interna, así  $q = [q_1 \quad q_2]^T$  por lo tanto:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau, \quad (56)$$

donde

$$M(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2 & \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 \\ \theta_2 + \theta_3 \cos q_2 & \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 \\ \theta_3 \sin q_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos q_1 + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}.$$

Considerando:  $\theta_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1$ ,  $\theta_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2$ ,  $\theta_3 = m_2 l_1 l_{c2}$ ,  $\theta_4 = m_1 l_{c1} + m_2 I_1$  y  $\theta_5 = m_2 l_{c2}$ .

TABLA II  
PARÁMETROS DEL PÉNDUBOT

Símbolo	Descripción	Valor
$m_1$	Masa del eslabón 1	0.055 Kg
$m_2$	Masa del eslabón 2	0.022 Kg
$l_1$	Longitud del eslabón 1	0.152 m
$l_2$	Longitud del eslabón 2	0.22 m
$l_{c1}$	Distancia al centro de masa del eslabón 1	0.107 m
$l_{c2}$	Distancia al centro de masa del eslabón 2	0.11 m
$I_1$	Momento de inercia del eslabón 1 alrededor de su centroide	$2.7 \times 10^{-4} \text{Kg}\cdot\text{m}^2$
$I_2$	Momento de inercia del eslabón 2 alrededor de su centroide	$0.92 \times 10^{-4} \text{Kg}\cdot\text{m}^2$
$\tau_1$	Torque de entrada	- ( $N \cdot m$ )

La Tabla II proporciona los parámetros de Péndubot empleados en el cálculo de la dinámica.

De igual manera considere  $x = [q^T \quad \dot{q}^T]^T$  y  $u = \tau$ , lo anterior conduce a

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -g(q) - C(q, \dot{q})\dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Linealizando (57) alrededor del origen y considerando el exosistema definido en (32) y (33) con  $x_2$  como la salida a regularse, se puede obtener

$$E\dot{x} = Ax + Bu + Pw, \quad y = Cx, \quad (58)$$

$$\dot{w} = Sw + S_H Qw, \quad y_{ref} = Q_{ref} w, \quad (59)$$

$$e = Qw + Cx,$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0025 & 0.0007 \\ 0 & 0 & 0.0007 & 0.0004 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.1143 & -0.0237 & 0 & 0 \\ -0.0237 & -0.0237 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T, \quad C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0],$$

$$Q_{ref} = [1 \quad 0], \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con (1) la dimensión de  $\rho$  para cada matriz  $S_i$  se establece igual a 2, así mismo las matrices en bloques  $S$  y  $S_H$  para  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  y epsilon pequeña,  $\epsilon = 0.05$ , son:

$$S = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -400 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_H = \begin{bmatrix} 20 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Los mapeos lineales  $x_{ss} = \Pi w$  y  $u_{ss} = \Gamma w$  se calculan a partir de (43) y (44) resultando

$$\Pi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = [-0.0905 \quad 0].$$

Además, se establece una tasa de decaimiento  $\alpha = 6$ ; una cota de entrada  $\mu = 24 \text{ Nm}$ , y las condiciones iniciales  $x(0) = [0.5 \quad 0.2 \quad -0.5 \quad -0.2]^T$  para la cota de entrada. Entonces, aplicando (50) y (51) se puede obtener:

$$K = [-1.0007 \quad 1.4054 \quad -1.1063 \quad -0.4667].$$

Como condiciones iniciales se establece  $x(0) = [5^\circ \quad 2^\circ \quad 0 \quad 0]^T$  y  $w(0) = [1.1^\circ, -1.1^\circ]^T$ . Las simulaciones se llevaron a

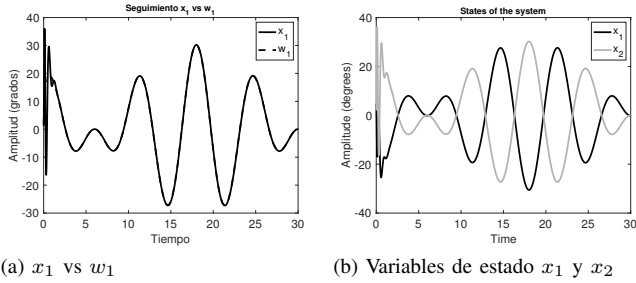


Fig. 5. Seguimiento y variables de estado del Péndubot

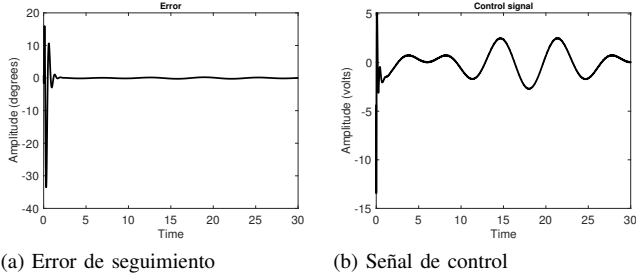


Fig. 6. Error de seguimiento y señal de control obtenidas

cabo en Matlab Simulink R2018a empleado el método de orden intermedio ODE45; Se observa en la Fig. 5a el seguimiento de  $x_1$  respecto a  $w_1$ , para el modelo no lineal. En la Fig. 5b se muestran los estados del sistema no lineal para a señal de referencia no modelada definida como  $\psi = \pi/12 \sin(\pi/4 * t) + \pi/12 \cos(\pi/3 * t)$ . Además, como en el ejemplo anterior las Figs. 6a y 6b muestran el error de seguimiento y señal de control, respectivamente. Lo anterior permite ver la efectividad del controlador propuesto.

## V. PRUEBA EXPERIMENTAL-PÉNDULO DE FURUTA

La presente sección presenta el dispositivo Péndulo de Furuta QNET 2.0 (LabView software), ver Fig. 1b, para verificar el esquema de control propuesto en lazo cerrado con los datos antes mencionados en la Tabla I. Entonces, para los resultados obtenidos en simulaciones y para la señal de referencia definida como  $\psi = \pi/15 \sin(\pi/5 * t) - \pi/12 \cos(\pi/6 * t)$ , la cual representa una función no lineal Lipschitz desconocida pero si medible, las Figs. 7 y 8 muestran los resultados bajo el controlador propuesto; como se puede observar la salida del sistema tiende a la referencia mientras se mantiene la restricción de mantener el péndulo en posición vertical ver Fig. 8a

Adicional, para verificar el desempeño de la propuesta se propone una señal no modelada diferente, es decir,  $\psi = (\pi/12) * \sin(2 * \pi/3 * t) + (\pi/12) * \cos(\pi/3 * t)$  con  $\epsilon = 0.1$  y las matrices  $S$  y  $S_H$  definidas como:  $S = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -200 & 0 \end{bmatrix}$ ,

$S_H = \begin{bmatrix} 10 \\ 200 \end{bmatrix}$ , con  $\alpha_1 = 1$  y  $\alpha_2 = 2$ .

Las Figs. 9 y 10 muestran los resultados bajo el controlador

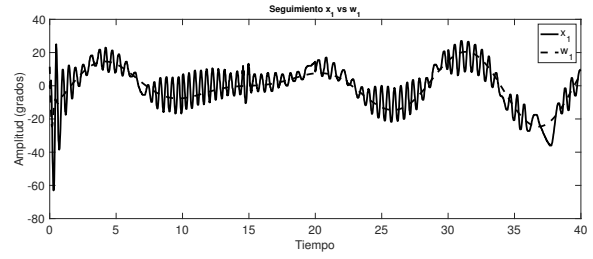
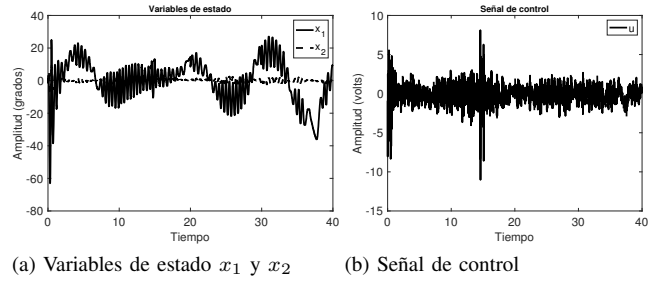
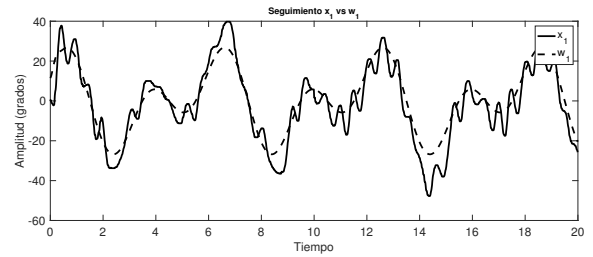

 Fig. 7. Seguimiento  $x_1$  vs  $w_1$  QNET 2.0


Fig. 8. Variables de estado y señal de control QNET 2.0

propuesto, como se puede observar la eficacia del método se valida en aplicaciones en tiempo real.


 Fig. 9. Seguimiento  $x_1$  vs  $w_1$  QNET 2.0 segunda referencia

## VI. CONCLUSIONES

Este trabajo presentó la regulación de la salida para sistemas descriptores considerando exosistemas con base en observadores de Alta Ganancia. Se proporcionan las condiciones necesarias para la existencia de un controlador; el enfoque propuesto está compuesto por un estabilizador obtenido por LMI's, cuyo objetivo es crear una variedad en estado estacionario globalmente atractiva, y un regulador para señales de referencia no modeladas con base en la modificación de las ecuaciones de Isidori. El método es efectivo para sistemas no lineales obteniendo un error acotado, el cual se puede reducir mediante la implementación de trayectorias no modeladas acordes a la dinámica de la planta. Se presentaron un par de ejemplos de sistemas subactuados para mostrar las ventajas del controlador obtenido. Para efectos prácticos el rendimiento del controlador se verá afectado ante la presencia significativa de ruido en la señal medida, debido a las características del HGO. Además, se realizó la implementación en tiempo real en el péndulo de Furuta para verificar los resultados obtenidos en simulación. Finalmente, la presente investigación



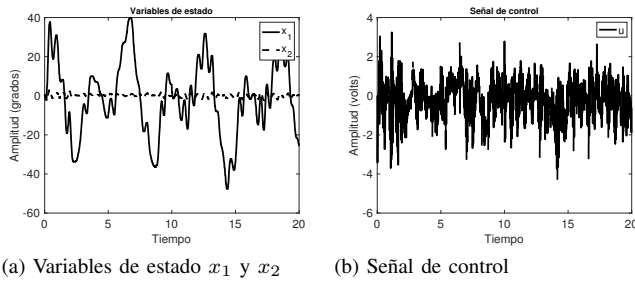


Fig. 10. Variables de estado y señal de control QNET 2.0 segunda referencia

abre la puerta al control de sistemas de rehabilitación donde la referencia se puede obtener directamente del terapeuta así como su adaptación en tiempo real; exoesqueletos con trayectorias que provienen directamente de sistemas de captura de movimiento o propiamente de la movilidad del usuario; control robusto de aeronaves para evadir obstáculos o adaptación del entorno; sincronización de sistemas robóticos para trabajos colaborativos, entre otros.

#### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la contribución del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo otorgado a través de la distinción del Sistema Nacional de Investigadores y del programa Investigadoras e Investigadores por México.

#### REFERENCES

- [1] B. A. Francis, "The linear multivariable regulator problem," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 15, pp. 486–505, 1977.
- [2] H. W. Knobloch, A. Isidori, and D. Flockerzi, *Topics in Control Theory*. Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 1993.
- [3] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The internal model principle of control theory," *Automatica*, vol. 12, pp. 457–465, 1976.
- [4] A. Isidori and C. I. Byrnes, "Output regulation of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 2, pp. 131–140, 1990.
- [5] A. Isidori, L. Marconi, and G. Casadei, "Robust output synchronization of a network of heterogeneous nonlinear agents via nonlinear regulation theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 10, pp. 2680–2691, 2014.
- [6] K. Chen, J. Wang, X. Zeng, Y. Zhang, and F. L. Lewis, "Cluster output regulation of heterogeneous multi-agent systems," *International Journal of Control*, vol. 93, no. 12, pp. 2973–2981, 2020.
- [7] Y. Wu, A. Isidori, and R. Lu, "Output regulation of invertible nonlinear systems via robust dynamic feedback-linearization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 11, pp. 2680–2691, 2021.
- [8] S. Wang and J. Huang, "Cooperative output regulation of linear multi-agent systems subject to an uncertain leader system," *International Journal of Control*, vol. 94, no. 4, pp. 952–960, 2023.
- [9] J. Meda-Campaña, J. O. Escobedo-Alva, J. J. Rubio, C. Aguilar-Ibañez, P.-C. J. H., G. Obregon-Pulido, R. Tapia-Herrera, E. Orozco, D. A. Cordova, and M. A. Islas, "On the rejection of random perturbations and the tracking of random references in a quadrotor," *Complexity*, vol. 2022, 2022.
- [10] C. Deng, W. Gao, C. Wen, Z. Chen, and W. Wang, "Data-driven practical cooperative output regulation under actuator faults and dos attacks," *IEEE Transactions on Cybernetics*, pp. 1–12, 2023.
- [11] M. Bernal, R. Marquez, V. Estrada-Manzo, and B. Castillo-Toledo, "An element-wise linear matrix inequality approach for output regulation problems," 2012. Paper presented at the World Automation Congress 2012.
- [12] C. Zhang, J. Zhu, and Z. Cheng, "Output regulation of linear singular systems," 2002. Paper presented at 15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain.
- [13] S. Pang, J. Huang, and Y. Bai, "Robust output regulation of singular nonlinear systems via a nonlinear internal model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 1–10, 2005.
- [14] J. Gao, X. Yong, and R. Lu, "Output regulation of linear singular multi-agent systems," *Circuits Syst Signal Process*, vol. 36, p. 931–946, 2017.
- [15] G.-R. Duan, *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, vol. 23 of *Advances in Mechanics and Mathematics*. Springer, 2010.
- [16] L. Dai, *Singular Control Systems*. No. 1 in 118, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1989.
- [17] L. Jingna, Z. Tie, Z. Lichun, L. Bing, and W. Xueying, "Analysis and control of the singular system model of aphid ecosystems," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2018, pp. B67–B68, 2018.
- [18] I. M. Buzurovic, "Dynamic model of medical robot represented as descriptor system," *International Journal of Information and systems sciences*, vol. 2, no. 2, pp. 316–333, 2007.
- [19] D. Zhang, L. D. Couto, S. Benjamin, W. Zeng, D. F. Coutinho, and S. J. Moura, "State of charge estimation of parallel connected battery cells via descriptor system theory," in *2020 American Control Conference*, pp. 2207–2212, 2020. Denver, CO, USA, July 1-3, 2020.
- [20] S. Meng, F. Meng, H. Chi, H. Chen, and A. Pang, "A robust observer based on the nonlinear descriptor systems application to estimate the state of charge of lithium-ion batteries," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 360, no. 16, pp. 11397–11413, 2023.
- [21] I. Masubuchi, J. Kato, M. Saeki, and A. Ohara, "Gain-scheduled controller design based on descriptor representation of lpv systems: application to flight vehicle control," in *43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 815–820, 2004. Nassau, Bahamas, 2004.
- [22] C. Shen, Y. wei Jing, Q. li Wang, and Y. Ban, "A descriptor system approach to robust control for polytopic systems with time delay and its application to flight control," in *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*, pp. 11397–11402, 2008. Seoul, Korea, July 6-11, 2008.
- [23] B. J. Y. Wu and N. Lu, "A descriptor system approach for estimation of incipient faults with application to high-speed railway traction devices," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 49, no. 10, pp. 2108–2118, 2019.
- [24] W. Lin and L. Dai, "Solutions to the output regulation problem of linear singular systems," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 29, no. 1, pp. 1542–1547, 1996. 13th World Congress of IFAC, 1996, San Francisco USA, 30 June - 5 July.
- [25] Z. Chen and J. Huang, "Solution of output regulation of singular nonlinear systems by normal output feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 5, pp. 808–813, 2002.
- [26] J. Huang and J.-F. Zhang, "Impulse-free output regulation of singular nonlinear systems," in *Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.98CH36207)*, vol. 4, pp. 2527–2531 vol.4, 1998.
- [27] L.-X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1997.
- [28] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer, 1995.
- [29] L. A. Poblete, T. Hernández-Cortés, and V. Estrada-Manzo, "On the nonlinear output regulation for systems described by takagi-sugeno fuzzy descriptor models with a steady-state mapping as an lmi optimization problem," *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI*, vol. 9, pp. 85–91, ene. 2022.
- [30] J. A. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo, and G. Chen, "Synchronization of chaotic systems from a fuzzy regulation approach," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, 2009.
- [31] E. Jafari and T. Binazadeh, "Observer-based tracker design for discrete-time descriptor systems with constrained inputs," *Journal of Process Control*, vol. 94, pp. 26–35, 2020.
- [32] Y. Sun and S. Ma, "Output regulation of switched singular systems based on extended state observer approach," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 399, 2021.
- [33] P. S. Babu, B. B., and T. M., "Robust composite non-linear feedback control for descriptor systems with general reference tracking," in *IECON 2018 - 44th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 2434–2439, 2018. Washington, DC, USA.
- [34] W. Wang, H. Zhang, Z. Liu, and J. Zhang, "Event-triggering cooperative output regulation of singular linear multi-agent systems with zero-free triggering," in *2020 Chinese Control And Decision Conference (CCDC 2020)*, pp. 5194–5198, 2020. Hefei, China.

- [35] Y. Lua, F. Liaoa, J. Dengb, and C. Pattinson, “Cooperative optimal preview tracking for linear descriptor multi-agent systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 2018, pp. 1–27, 2018.
- [36] M. Saad, R. A. Shirazi, and M. Liaquat, “Output regulation of n-link robotic manipulator using feedback linearizable systems under the approach of cascade high gain observers,” in *Proceedings of the 6th International Conference on Control, Mechatronics and Automation, ICCMA 2018*, (New York, NY, USA), p. 1620, Association for Computing Machinery, 2018.
- [37] T. Hernández-Cortés, M. Amador-Macias, R. Tapia-Herrera, and J. A. Meda-Campaña, “On the output regulation for an underactuated inverse pendulum when the exosystem is a high-gain observer,” *IEEE Access*, vol. 11, pp. 10792–10800, 2023.
- [38] J. A. Meda-Campaña, R. I. Ancona-Bravo, J. O. Escobedo-Alva, T. Hernández-Cortés, and R. Tapia-Herrera, “The output regulation problem for unmodeled reference/disturbance signals using high-gain observers,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 21, no. 4, pp. 1049–1061, 2023.
- [39] C. Byrnes, F. Priscoli, and A. Isidori, *Output Regulation of Uncertain Nonlinear Systems*. Birkhäuser, 1997.
- [40] H. K. Khalil, *High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control*. No. 31 in *Advances in design and control*, SIAM, 2017.
- [41] T. Taniguchi, K. Tanaka, K. Yamafuji, and H. O. Wang, “Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via lmis,” in *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*, vol. 3, pp. 1827–1831 vol.3, 1999.
- [42] T. Taniguchi, K. Tanaka, and H. O. Wang, “Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8, no. 4, pp. 442–452, 2000.
- [43] J. C. Arceo, D. Vázquez, V. Estrada-Manzo, R. Márquez, and M. Bernal, “Nonlinear convex control of the furuta pendulum based on its descriptor model,” in *2016 13th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 1–6, IEEE, 2016.
- [44] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [45] I. Fantoni, R. Lozano, and S. Sinha, “Non-linear control for underactuated mechanical systems,” *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, no. 4, pp. B67–B68, 2002.



**Ricardo Tapia-Herrera** received the B.Sc. degree in Industrial Robotics engineering from Instituto Politécnico Nacional (IPN), México, in 2005, the M.Sc. and Ph.D. degrees both in mechanical engineering, from IPN-SEPI ESIME Zacatenco in 2009 and 2013, respectively. His areas of interest are fuzzy control, mechanical design, robotics, analysis, synthesis, and dynamics of mechanisms. Currently, he is visiting researcher in the IPN participating in the program of CONAHCYT “Investigadores por México”.



**Jesús Alberto Meda-Campaña** (M?00) received the B.Sc. degree in Computer Engineering (with mention of excellence) from Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), in Culiacan, Sinaloa, México, in 1993; the M.Sc. and Ph.D. degrees in electrical engineering from Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN), in Guadalajara, Jalisco, México, in 2002 and 2006, respectively. His main research interests include linear and nonlinear control design, fuzzy regulation theory, optimal control, and application of control techniques to electromechanical systems and robotics. He is an IEEE member since 2000.



**Miguel Amador-Macias** was born in Mexico City in 1998. He received his B.Sc. degree in Mechatronics Engineer from the Universidad Politécnica de Pachuca, Zempoala, Hidalgo, México, in 2019. He is currently pursuing the master degree in mechatronics at the Universidad Politécnica de Pachuca, Zempoala, México. His areas of interest are control of nonlinear systems, trajectory tracking, output regulation, Takagi-Sugeno modeling, convex modeling and linear matrix inequalities.



**Tonatiuh Hernández-Cortés** received his B.Sc. degree in robotics from Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Campus Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional, México City, México, in 2005, and M.Sc. and Ph.D. degrees in mechanical engineering from Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Campus Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, in 2012 and 2016, respectively. He is currently a full professor at Universidad Politécnica de Pachuca, Zempoala, México.

His research interests include control of nonlinear systems, output regulation, robotics, fuzzy systems, and real-time applications.