

Design of a Fuzzy Sliding Mode Controller for the Autonomous Path-Following of a Quadrotor

A. Huaman, *Member, IEEE*, and C. Pérez, *Member, IEEE*

Abstract—This paper presents the design and the performance analysis of nonlinear controllers for the positioning and path-following of a quadrotor. The design of the fuzzy sliding mode controller (FSMC) has been carried out based on sliding mode control (SMC) integrated into a fuzzy logic approach in order to eliminate the chattering. For the performance analysis, another nonlinear controller based on backstepping technique has been designed. A hierarchical two-loop architecture is proposed in order to solve the regulation and trajectory tracking control problem. The effectiveness of the nonlinear controllers is verified by simulation in a virtual environment, where the quadrotor must attain the desired position and follow the desired trajectory even in the presence of external disturbances. The performance analysis of the nonlinear controllers taken as a case study in this research is done using suitable performance indices such as ISE, IAE, among others. The comparative results show that the FSMC controller overcomes the backstepping controller in terms of performance and robustness.

Index Terms—Backstepping, Chattering elimination, Fuzzy sliding mode control, Nonlinear control, Performance index, Positioning, Quadrotor, Trajectory tracking.

I. INTRODUCCIÓN

EN los últimos años, los cuadricópteros son considerados una solución en aplicaciones de movimiento, debido a su capacidad de desplazarse en el espacio tridimensional a alturas relativamente bajas, posicionarse en puntos específicos y despegar, o aterrizar, de forma vertical [1-3]. Dado que los cuadricópteros son pequeños y livianos, son adecuados para aplicaciones civiles y militares, tales como fotografía aérea, vigilancia, misiones de rescate y exploración en áreas peligrosas para el ser humano [1-5]. Asimismo, los cuadricópteros presentan potenciales aplicaciones en diversas áreas de investigación emergentes, tales como, ciencias ambientales, donde son utilizados para estudiar el cambio climático, la dinámica de los glaciares, la actividad volcánica, entre otras aplicaciones [3], esto es posible gracias a que los cuadricópteros pueden recolectar información a través de sensores instalados en su chasis [1].

Diversas técnicas de control han sido propuestas para resolver el problema de regulación (posicionamiento) y seguimiento de trayectorias de un cuadricóptero.

El problema de regulación consiste en que las variables controladas del sistema, en estado estacionario, alcancen asintóticamente una referencia constante deseada. El problema de seguimiento de trayectorias consiste en que las variables controladas del sistema, en estado estacionario, deben seguir una determinada trayectoria deseada lo más cerca posible. En el caso del cuadricóptero el problema de regulación se visualiza como el posicionamiento del robot y el problema de seguimiento de trayectorias se visualiza como el seguimiento de rutas (o caminos) del robot, en el espacio tridimensional. En [6] se muestra y explica una estrategia de solución al problema de seguimiento de trayectorias aplicado a un sistema mecánico. Controladores lineales clásicos (PID) y modernos (LQR) para el control de la orientación han sido estudiados en [7-8], donde el diseño de los controladores se realizó alrededor de un punto de operación y se obtuvieron resultados poco satisfactorios ante un cambio de referencia o en presencia de perturbaciones de mediana magnitud. El problema de control de orientación también se abordó bajo un enfoque robusto basado en H_∞ en [9], donde se obtuvo una mejor respuesta frente a incertidumbres en el modelado en comparación a un controlador PID convencional; no obstante, dicho controlador solo trabaja bien alrededor de un punto de operación. En [10] se diseña un controlador predictivo basado en modelos (MPC) para el control de altitud, posición y orientación, donde se obtuvo un buen rendimiento del controlador ante cambios de referencia y perturbaciones externas; sin embargo, para obtener dicho desempeño se debió linealizar el modelo del robot en varios puntos de operación. En [11] se presenta un controlador adaptativo (MRAC) para el control de orientación, donde se obtuvieron buenos resultados para el rango de operación en que fue linealizado el modelo del robot. Cabe mencionar que, los controladores lineales difícilmente resuelven el problema de seguimiento de trayectorias, inclusive para resolver adecuadamente el problema de regulación se requiere del diseño de varios controladores lineales en diferentes puntos de operación e integrarlos todos en un enfoque de ganancia programada; asimismo, debido a la dinámica no lineal del cuadricóptero [4] se requiere que todas estas operaciones se realicen en un periodo de muestreo muy pequeño a fin de no volver inestable al sistema, lo cual complica su implementación en tiempo real. Por otro lado, diversos autores han propuesto controladores no lineales, los cuales a través de una adecuada arquitectura de control logran resolver el problema de regulación y seguimiento. A continuación, se mencionan brevemente los trabajos que fueron tomados como estado del arte del presente artículo. Se propusieron controladores no lineales basados en *feedback linearization* en [12], donde se

A. S. Huaman, Departamento de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú (e-mail: alex.huaman@pucp.edu.pe)

C. G. Pérez, Departamento de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Perú (e-mail: gustavo.perez@pucp.pe).

resolvió el problema de regulación; sin embargo, el controlador carece de robustez frente al ruido de medición. En [13] se presentan controladores no lineales basados en *differential flatness*, donde se resuelve el problema de seguimiento a través del modelamiento de los efectos aerodinámicos. La técnica *backstepping* es usada para resolver distintos problemas de control no lineal, por ejemplo, en [14] se resuelve el problema de seguimiento, en [15] se resuelve el problema de regulación y en [16] se controla la orientación del cuadricóptero; no obstante, esta técnica carece de robustez ante la presencia de perturbaciones externas. Control por modos deslizantes (CMD) es usado para resolver el problema de regulación en [16-17] y el problema de seguimiento en [2, 18], donde cualitativamente, a través de gráficas, se aprecia un buen rendimiento del sistema de control en términos de desempeño (estabilidad asintótica) y robustez (rechazo a perturbaciones); no obstante, no se elimina totalmente el *chattering* en la señal de control ya que se aproxima la función signo utilizando funciones sigmoideas, véase [2, 17]. Otros autores presentan versiones mixtas de controladores no lineales, por ejemplo, en [19] combina un enfoque de *model-free control* con CMD para resolver el problema de regulación y en [20] combinan *backstepping* con CMD para resolver el problema de seguimiento. Controladores inteligentes basados en lógica difusa se diseñaron en [21-22] para resolver el problema de regulación evitando usar el modelo dinámico del cuadricóptero.

En este artículo, el modelo dinámico del robot utiliza parámetros reales obtenidos del cuadricóptero disponible en las instalaciones del Laboratorio de Control Avanzado de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), el cual se muestra en la Fig. 1.



Fig. 1. Cuadricóptero tomado como caso de estudio.

Las ecuaciones de movimiento del cuadricóptero presentan dinámica no lineal, acoplada y sub-actuada [4], lo cual ha llevado a un intenso trabajo de investigación para definir una estrategia de control adecuada. En este artículo, se presenta una arquitectura de control jerárquica de dos lazos [2, 5], basado en controladores no lineales. Bajo la arquitectura propuesta, se diseñan sistemas de control por modos deslizantes difusos (CMDD) para resolver el problema de regulación (posicionamiento) y extenderlo al problema de seguimiento de trayectorias. Además, se precisa el diseño de controladores basados en *backstepping* con el objetivo de comparar y analizar el desempeño de ambos controladores bajo las mismas condiciones de operación. Las técnicas de control abordadas en este artículo son diseñadas bajo el enfoque de estabilidad de Lyapunov. La importancia de comparar y analizar el

desempeño de estos controladores no lineales es verificar cuál de ellos presenta mayor robustez ante la presencia de ruido Gaussiano blanco aditivo en la medición y efectos aerodinámicos modelados como perturbaciones externas. Los resultados obtenidos a través de simulación permitirán concluir cual controlador es idóneo para una futura implementación en el cuadricóptero.

La principal contribución de este artículo, y por lo que se diferencia de otros encontrados en la literatura, consiste en la propuesta de una estrategia de control que integra CMD con un enfoque de lógica difusa para eliminar el *chattering*, a través de un cambio gradual de la señal de control, permitiendo obtener señales de control continuas, suaves y acotadas. Asimismo, se elaboran y se muestran los algoritmos de diseño del controlador basado en CMDD y *backstepping*, aplicable a cualquier sistema modelado bajo las leyes de Newton o las ecuaciones de movimiento de Euler-LaGrange.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección II se muestran las ecuaciones de movimiento del cuadricóptero y se propone un modelo alternativo para el diseño de los controladores. En la Sección III se presenta una arquitectura de control de dos lazos y se describe el diseño de los controladores no lineales basados en CMDD y *backstepping*, respectivamente. En la Sección IV se presentan los resultados obtenidos por simulación en un entorno de trabajo virtual y se realiza el análisis de desempeño de los controladores para el problema de control de regulación y seguimiento de trayectorias. Finalmente, en la Sección V se ofrecen las conclusiones.

II. MODELAMIENTO MATEMÁTICO

El desarrollo de las ecuaciones que modelan la dinámica del cuadricóptero ha sido estudiado a detalle en [23-25]. El esquema del cuadricóptero estudiado se muestra en la Fig. 2. La posición absoluta del centro de masa del cuadricóptero viene dada por las coordenadas cartesianas espaciales (x, y, z) . La orientación del cuadricóptero viene dada por los ángulos de Euler, donde *pitch* (φ) representa la rotación alrededor del eje x , *roll* (θ) representa la rotación alrededor del eje y y *yaw* (ψ) representa la rotación alrededor del eje z .

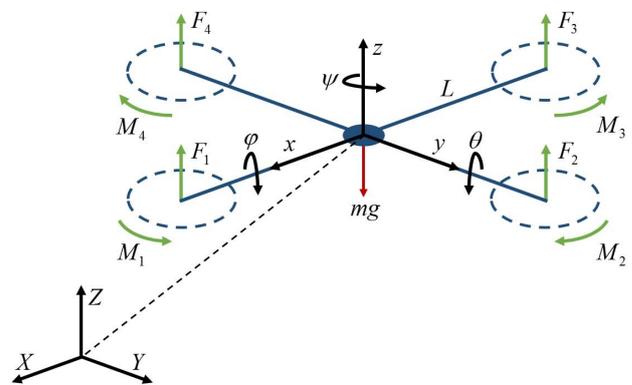


Fig. 2. Esquema del cuadricóptero.

La dinámica de movimiento traslacional y rotacional puede ser descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= [(\cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi)u_1]/m \\ \ddot{y} &= [(\cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi)u_1]/m \\ \ddot{z} &= -g + [(\cos \varphi \cos \theta)u_1]/m\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} &= [\dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z) + Lu_2]/I_x \\ \ddot{\theta} &= [\dot{\varphi}\dot{\psi}(I_z - I_x) + Lu_3]/I_y \\ \ddot{\psi} &= [\dot{\varphi}\dot{\theta}(I_x - I_y) + u_4]/I_z\end{aligned}\quad (2)$$

donde, $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ y $\psi \in (-\pi, \pi)$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ representan la velocidad de los ángulos de Euler, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\psi}$ son la aceleración de los ángulos de Euler, \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} representan la velocidad en sus respectivas coordenadas cartesianas, \ddot{x} , \ddot{y} y \ddot{z} son la aceleración en sus respectivas coordenadas cartesianas, m es la masa total del cuadricóptero, I_x , I_y e I_z son los momentos de inercia, L es la distancia desde el centro de cada rotor hasta el centro de masa del robot y g es la aceleración gravitacional. Las entradas del sistema son la fuerza de elevación (u_1) y los torques (u_2 , u_3) generados por los rotores. Cada rotor genera una fuerza vertical F_i , $i = 1, \dots, 4$ y un torque M_i , $i = 1, \dots, 4$, alrededor de su propio eje, proporcional al cuadrado de su velocidad rotacional ω_i , $i = 1, \dots, 4$. Las entradas del sistema se describen a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}u_1 &= \sum_{i=1}^4 F_i = k_f \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \\ u_2 &= L(F_2 - F_4) = Lk_f(\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ u_3 &= L(F_3 - F_1) = Lk_f(\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ u_4 &= \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} M_i = k_\tau \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \omega_i^2\end{aligned}\quad (3)$$

donde, k_f y k_τ son coeficientes positivos de empuje y arrastre, respectivamente, u_1 describe el empuje total producido por las fuerzas generadas en los rotores, u_2 representa el torque alrededor del eje x producido por las fuerzas F_2 y F_4 , u_3 representa el torque alrededor del eje y producido por las fuerzas F_3 y F_1 y u_4 representa el torque alrededor del eje z producido por los torques generados en los cuatro rotores.

Las ecuaciones de movimiento en (1) y (2) consideran los efectos dinámicos esenciales del cuadricóptero sin incluir complejidad innecesaria, como los efectos aerodinámicos, debido a que se considera que el cuadricóptero se desplazará a velocidad relativamente baja [25]. Por lo tanto, dichos efectos serán poco significativos y pueden ser considerados como perturbaciones que serán atenuadas por el controlador.

A. Modelo para el Diseño de los Controladores

El cuadricóptero es considerado una clase de sistema subactuado con seis grados de libertad y solo cuatro entradas. Dado que las ecuaciones de movimiento traslacional en (1) están en función de los ángulos de Euler, es posible controlar el posicionamiento espacial del cuadricóptero a través del control de su orientación. El control de movimiento en el plano horizontal (x , y) requiere de la definición de dos entradas de control ficticias (u_x y u_y), a fin de que la posición del robot en los ejes x , y y z varíen por acción de las señales de control u_x ,

u_y y u_1 , respectivamente. Por tal motivo, se reescriben las ecuaciones de posicionamiento, mostradas en (1), en función de las entradas de control ficticias:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= [(u_1 \sin \varphi \sin \psi) + (u_1 \cos \varphi \cos \psi)u_x]/m \\ \ddot{y} &= [(u_1 \cos \varphi \sin \theta \sin \psi) - (u_1 \cos \psi)u_y]/m \\ \ddot{z} &= -g + [(\cos \varphi \cos \theta)u_1]/m\end{aligned}\quad (4)$$

donde, $u_x = \sin \theta$ y $u_y = \sin \varphi$

Las ecuaciones de movimiento en (4) y (2) representan un modelo dinámico del cuadricóptero completamente actuado con seis grados de libertad y seis entradas.

Se define el vector de estados \mathbf{x} y el vector de entrada \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [x, y, z, \varphi, \theta, \psi, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^T \\ \mathbf{u} &= [u_x, u_y, u_1, u_2, u_3, u_4]^T\end{aligned}\quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (2) pueden representarse mediante la siguiente ecuación de estado no lineal:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\eta}\end{aligned}\quad (6)$$

donde, $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T$ es el vector de salida y $\boldsymbol{\eta}$ es un vector de ruido Gaussiano blanco aditivo.

III. ESTRATEGIA DE CONTROL

Para resolver el problema de regulación (posicionamiento) y seguimiento de trayectorias del cuadricóptero, en este artículo se presenta una arquitectura de control jerárquica de dos lazos. El diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado se muestra en la Fig. 3.

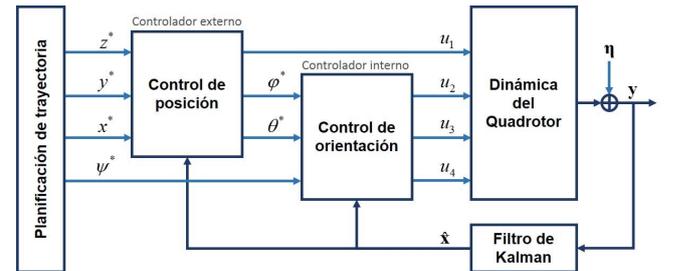


Fig. 3. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.

El lazo interno se encarga de controlar la orientación del robot y el lazo externo se encarga de controlar la altitud y el posicionamiento, en el plano horizontal, del cuadricóptero. La arquitectura del sistema de control propuesto requiere la retroalimentación del vector de estados completo del robot, esto incluye las variables de posición y velocidad. Además, se precisa la atenuación del ruido Gaussiano blanco aditivo producido por la medición de los sensores, donde para los estados de posicionamiento espacial se considera un valor medio: $\bar{x}_{(x,y,z)} = 0$ y una desviación estándar: $\delta_{(x,y,z)} = 0.25$, y para los estados de orientación se considera un valor medio:

$\bar{x}_{(\varphi,\theta,\psi)} = 0$ y una desviación estándar: $\delta_{(\varphi,\theta,\psi)} = 2.5$. Por tal motivo, se diseña un filtro de Kalman basado en un modelo de doble integrador el cual filtra y permite estimar las velocidades. El diseño del filtro de Kalman fue realizado siguiendo el procedimiento mostrado en [26]. Para verificar la efectividad y comparar el desempeño de los controladores basados en CMDD (controlador del lazo externo y controlador del lazo interno), se han diseñado controladores no lineales adicionales basados en la técnica recursiva de *backstepping*.

A. Diseño de la estrategia de control basado en CMDD

Control por modos deslizantes (CMD) es una técnica de control no lineal que utiliza en su diseño el criterio de estabilidad de Lyapunov [27]. CMD es generalmente usado en sistemas expuestos a perturbaciones e incertidumbres en sus modelos, por tal motivo es considerado como un tipo de control robusto [28]. El diseño del controlador no lineal basado en CMD se realiza siguiendo los pasos mostrados en la Tabla I.

TABLA I
ALGORITMO DE DISEÑO DE CMD

1.	Se considera el sistema no lineal de segundo orden: $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u$
2.	Se define una superficie de deslizamiento y su derivada: $s = (\dot{x} - \dot{x}^*) + \lambda(x - x^*) \quad \wedge \quad \dot{s} = (\ddot{x} - \ddot{x}^*) + \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*)$
3.	El objetivo es que $x \rightarrow x^*$ y $\dot{x} \rightarrow \dot{x}^*$. Por lo tanto, se elige una función de Lyapunov $V(x, \dot{x}) > 0, \forall (x, \dot{x}) \setminus \{0\}$ y se calcula su derivada: $V = s^2/2 \quad \wedge \quad \dot{V} = s\dot{s}$
4.	Para garantizar que $\dot{V} < 0$, se propone la siguiente condición de deslizamiento: $\dot{s} = -K \operatorname{sgn} s$, donde $K > 0$.
5.	La condición de deslizamiento del paso 4 se reescribe: $(\ddot{x} - \ddot{x}^*) + \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*) = -K \operatorname{sgn} s$. Nótese que aparece \ddot{x} de forma explícita.
6.	Se reemplaza la dinámica del sistema (paso 1) a fin que aparezca u . Se despeja u y se obtiene la ley de control que asegura convergencia asintótica: $u = [\ddot{x}^* - f(x, \dot{x}) - \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*) - K \operatorname{sgn} s]/g(x, \dot{x})$

1) *Controlador del lazo externo*: El controlador externo, o controlador de posicionamiento, se diseña utilizando las ecuaciones de movimiento mostradas en (4). Para el diseño de las leyes de control se siguen los pasos de la Tabla I.

Para el control de altitud en el eje z , se define la siguiente superficie de deslizamiento:

$$s_z = (\dot{z} - \dot{z}^*) + \lambda_z(z - z^*) \quad (7)$$

Para asegurar que los estados convergen asintóticamente se define la siguiente ley de control:

$$u_1 = m[\ddot{z}^* + g - \lambda_z(\dot{z} - \dot{z}^*) - K_z \operatorname{sgn} s_z]/(\cos \varphi \cos \theta) \quad (8)$$

donde, λ_z y K_z son ganancias constantes positivas.

Para el controlador de posicionamiento en el eje x , se define la siguiente superficie deslizante:

$$s_x = (\dot{x} - \dot{x}^*) + \lambda_x(x - x^*) \quad (9)$$

Para asegurar que los estados convergen asintóticamente se define la siguiente ley de control:

$$u_x = m[\ddot{x}^* - \lambda_x(\dot{x} - \dot{x}^*) - K_x \operatorname{sgn} s_x]/(u_1 \cos \varphi \cos \psi) - (\sin \varphi \sin \psi)/(\cos \varphi \cos \psi) \quad (10)$$

donde, λ_x y K_x son ganancias constantes positivas.

Para el controlador de posicionamiento en el eje y , se define la siguiente superficie deslizante:

$$s_y = (\dot{y} - \dot{y}^*) + \lambda_y(y - y^*) \quad (11)$$

Para asegurar que los estados convergen asintóticamente se define la siguiente ley de control:

$$u_y = -m[\ddot{y}^* - \lambda_y(\dot{y} - \dot{y}^*) - K_y \operatorname{sgn} s_y]/(u_1 \cos \psi) + (\cos \varphi \sin \theta \sin \psi)/(\cos \psi) \quad (12)$$

donde, λ_y y K_y son constantes positivas.

Luego, para alcanzar la trayectoria deseada en el plano horizontal, se calculan los valores deseados de los ángulos *roll* (θ^*) y *pitch* (φ^*) a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \theta^* &= \operatorname{asin} u_x \\ \varphi^* &= \operatorname{asin} u_y \end{aligned} \quad (13)$$

2) *Controlador del lazo interno*: El controlador interno, o controlador de orientación, se diseña utilizando las ecuaciones de movimiento mostradas en (2). Para el diseño de las leyes de control se siguen los pasos mostrados en la Tabla I.

Para el control de la orientación *pitch* (φ) se define la siguiente superficie deslizante:

$$s_\varphi = (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^*) + \lambda_\varphi(\varphi - \varphi^*) \quad (14)$$

Para asegurar que los estados convergen asintóticamente se define la siguiente ley de control:

$$u_2 = I_x[\ddot{\varphi}^* - \lambda_\varphi(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^*) - K_\varphi \operatorname{sgn} s_\varphi]/L - \dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z)/L \quad (15)$$

donde, λ_φ y K_φ son constantes positivas.

Para el control de la orientación *roll* (θ) se define la siguiente superficie deslizante:

$$s_\theta = (\dot{\theta} - \dot{\theta}^*) + \lambda_\theta(\theta - \theta^*) \quad (16)$$

Para asegurar que los estados convergen asintóticamente se define la siguiente ley de control:

$$u_3 = I_y[\ddot{\theta}^* - \lambda_\theta(\dot{\theta} - \dot{\theta}^*) - K_\theta \operatorname{sgn} s_\theta]/L - \dot{\varphi}\dot{\psi}(I_z - I_x)/L \quad (17)$$

donde, λ_θ y K_θ son constantes positivas.

Para el control de la orientación *yaw* (ψ) se define la siguiente superficie deslizante:

$$s_\psi = (\dot{\psi} - \dot{\psi}^*) + \lambda_\psi(\psi - \psi^*) \quad (18)$$

Para asegurar que los estados convergen asintóticamente se define la siguiente ley de control:

$$u_4 = I_z[\dot{\psi}^* - \lambda_\psi(\psi - \psi^*) - K_\psi \text{sgn } s_\psi] - \dot{\phi}\theta(I_x - I_y) \quad (19)$$

donde, λ_ψ y K_ψ son constantes positivas.

3) *Eliminación de chattering*: Para eliminar el *chattering* producido en CMD, se utiliza un enfoque de lógica difusa basado en el método de inferencia de Takagi-Sugeno [29]. *Chattering* se refiere a las oscilaciones sostenidas que se producen cuando la señal de control converge. Se produce *chattering* debido a la presencia de la función discontinua signo (sgn) en la ley de control. En otras palabras, al utilizar CMD se obtiene una ley de control cuando la superficie deslizante es positiva y otra cuando es negativa. En la Fig. 4 se muestra el rango de variación de la superficie deslizante, la cual se ha particionado en dos partes, donde una de ellas representa a la superficie deslizante cuando es positiva y la otra cuando es negativa.

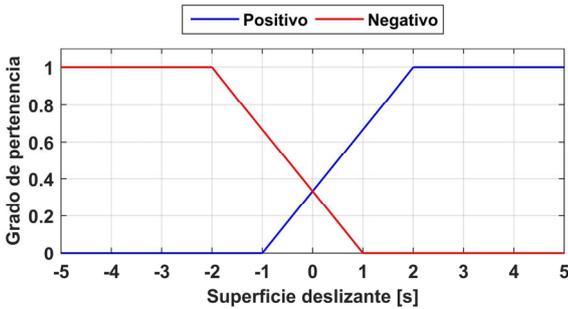


Fig. 4. Funciones de membresía para una superficie deslizante.

El procedimiento para integrar CMD con lógica difusa para eliminar *chattering* se realiza siguiendo los pasos mostrados en la Tabla II. Es importante mencionar que, el algoritmo mostrado en la Tabla II se realiza para cada ley de control. Este enfoque de diseño, denominado control por modos deslizantes difusos (CMDD), mantiene la robustez de CMD y elimina el efecto de *chattering* a través de un cambio gradual en la señal de control.

TABLA II
ALGORITMO PARA LA ELIMINACIÓN DE CHATTERING

1. Se obtiene el valor de la superficie deslizante (s) a través de:
 $s = (\dot{x} - \dot{x}^*) + \lambda(x - x^*)$
2. Fuzzificación. Se obtiene el grado de pertenencia de cada partición de s , donde σ_p es el grado de pertenencia para la partición positiva y σ_n es el grado de pertenencia para la partición negativa.
3. Base de reglas. Se determina el valor numérico de u_p y u_n :
- Si: $s > 0$, entonces: $u_p = [\ddot{x}^* - f(x, \dot{x}) - \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*) - K]/g(x, \dot{x})$
- Si: $s < 0$, entonces: $u_n = [\ddot{x}^* - f(x, \dot{x}) - \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*) + K]/g(x, \dot{x})$
4. Defuzzificación. Se obtiene la ley de control sin *chattering* a través del enfoque difuso de Takagi-Sugeno: $u = (u_n\sigma_n + u_p\sigma_p)/(\sigma_n + \sigma_p)$

Se concluye la sección III-A con una proposición que resume el desarrollo presentado anteriormente.

Proposición 1 (Control por modos deslizantes difusos): Considere la ecuación de estado no lineal $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u$ en lazo cerrado con la ley de control $u =$

$[\ddot{x}^* - f(x, \dot{x}) - \lambda(\dot{x} - \dot{x}^*) - K \text{sgn } s]/g(x, \dot{x})$. El sistema en lazo cerrado garantiza la estabilidad asintótica para $x \rightarrow x^*$ y $\dot{x} \rightarrow \dot{x}^*$, con la función de Lyapunov $V(x) = s^2/2$, donde $s = (\dot{x} - \dot{x}^*) + \lambda(x - x^*)$ y $K, \lambda > 0$. La eliminación del *chattering* se realiza a través del algoritmo difuso mostrado en la Tabla II.

B. Diseño de la Estrategia de Control Basada en Backstepping

Backstepping consiste en diseñar un controlador recursivo, considerando algunas de las variables de estado como “variables de control virtual” y diseñando para ellas leyes de control basadas en el criterio de estabilidad de Lyapunov [30]. El diseño del controlador no lineal basado en *backstepping* se realiza siguiendo los pasos mostrados en la Tabla III.

TABLA III
ALGORITMO DE DISEÑO DE BACKSTEPPING

1. Se considera el sistema no lineal de segundo orden:
 $\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u$
2. Se define el error de seguimiento (e_1) y su derivada:
 $e_1 = x - x^* \wedge \dot{e}_1 = \dot{x} - \dot{x}^*$
3. El objetivo es que $e_1 \rightarrow 0$. Por lo tanto, se elige una función de Lyapunov $V_1(x) > 0, \forall (x, \dot{x}) \setminus \{0\}$ y se calcula su derivada:
 $V_1 = e_1^2/2 \wedge \dot{V}_1 = e_1\dot{e}_1$
4. Para garantizar que $\dot{V}_1 < 0$, se propone una adecuada ley de estabilización: $\dot{e}_1 = -K_1 e_1$, donde $K_1 > 0$.
5. Se considera a $\dot{e}_1 = \dot{x} - \dot{x}^*$ como una variable de control virtual, con un comportamiento deseado: α .
6. Se define un nuevo error (e_2) y su derivada:
 $e_2 = (\dot{x} - \dot{x}^*) - \alpha \wedge \dot{e}_2 = \ddot{x} - \ddot{x}^* - \dot{\alpha}$
7. El objetivo es que $e_2 \rightarrow 0$. Por lo tanto, se elige una función de Lyapunov $V_2(x, \dot{x}) > 0, \forall (x, \dot{x}) \setminus \{0\}$ y se calcula su derivada:
 $V_2 = V_1 + e_2^2/2 \wedge \dot{V}_2 = \dot{V}_1 + e_2\dot{e}_2$
8. Para garantizar que $\dot{V}_2 < 0$, se propone una adecuada ley de estabilización: $\dot{e}_2 = -K_2 e_2$, donde $K_2 > 0$.
9. La ley de estabilización del paso 8 se reescribe: $\ddot{x} - \ddot{x}^* - \dot{\alpha} = -K_2 e_2$. Note que aparece \ddot{x} de forma explícita.
10. Se reemplaza la dinámica del sistema (paso 1) a fin que aparezca u . Se despeja u y se obtiene la ley de control que asegura convergencia asintótica: $u = [\ddot{x}^* - f(x, \dot{x}) + K_1^2 e_2 - (K_1 + K_2)e_2]/g(x, \dot{x})$, donde $e_2 = \ddot{x} - \ddot{x}^* + K_1 e_1$ y $e_1 = x - x^*$.

1) *Controlador del lazo externo*: El controlador externo, o controlador de posicionamiento, se diseña utilizando las ecuaciones de movimiento mostradas en (4). Para el diseño de las leyes de control se siguen los pasos de la Tabla III.

Para el control de altitud en el eje z , se definen los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_1 &= z - z^* \\ e_2 &= \dot{z} - \dot{z}^* + K_1 e_1 \end{aligned} \quad (20)$$

Para asegurar que los errores convergen asintóticamente a cero se define la siguiente ley de control:

$$u_1 = m[\ddot{z}^* + g + K_1^2 e_1 - (K_1 + K_2)e_2]/(\cos \varphi \cos \theta) \quad (21)$$

donde, K_1 y K_2 son ganancias constantes y positivas.

Para el control de posicionamiento en el eje x , se definen los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_3 &= x - x^* \\ e_4 &= \dot{x} - \dot{x}^* + K_3 e_3 \end{aligned} \quad (22)$$

Para asegurar que los errores convergen asintóticamente a cero se define la siguiente ley de control:

$$u_x = m[\dot{x}^* + K_3^2 e_3 - (K_3 + K_4)e_4]/(u_1 \cos \varphi \cos \psi) - (\sin \varphi \sin \psi)/(\cos \varphi \cos \psi) \quad (23)$$

donde, K_3 y K_4 son ganancias constantes y positivas.

Para el control de posicionamiento en el eje y , se definen los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_5 &= y - y^* \\ e_6 &= \dot{y} - \dot{y}^* + K_5 e_5 \end{aligned} \quad (24)$$

Para asegurar que los errores convergen asintóticamente a cero se define la siguiente ley de control:

$$u_y = -m[\dot{y}^* + K_5^2 e_5 - (K_5 + K_6)e_6]/(u_1 \cos \psi) + (\cos \varphi \sin \theta \sin \psi)/(\cos \psi) \quad (25)$$

donde, K_5 y K_6 son ganancias constantes y positivas.

Luego, para alcanzar la trayectoria deseada en el plano horizontal, se calculan los valores deseados de los ángulos *roll* (θ^*) y *pitch* (φ^*) a través de la ecuación (13).

2) *Controlador del lazo interno*: El controlador interno, o controlador de orientación, se diseña utilizando las ecuaciones de movimiento mostradas en (2). Para el diseño de las leyes de control se siguen los pasos mostrados en la Tabla III.

Para el control de la orientación *pitch* (φ) se definen los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_7 &= \varphi - \varphi^* \\ e_8 &= \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* + K_7 e_7 \end{aligned} \quad (26)$$

Para asegurar que los errores convergen asintóticamente a cero se define la siguiente ley de control:

$$u_2 = I_x[\ddot{\varphi}^* + K_7^2 e_7 - (K_7 + K_8)e_8]/L - \dot{\theta}\dot{\psi}(I_y - I_z)/L \quad (27)$$

donde, K_7 y K_8 son ganancias constantes y positivas.

Para el control de la orientación *roll* (θ) se definen los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_9 &= \theta - \theta^* \\ e_{10} &= \dot{\theta} - \dot{\theta}^* + K_9 e_9 \end{aligned} \quad (28)$$

Para asegurar que los errores convergen asintóticamente a cero se define la siguiente ley de control:

$$u_3 = I_y[\ddot{\theta}^* + K_9^2 e_9 - (K_9 + K_{10})e_{10}]/L - \dot{\varphi}\dot{\psi}(I_z - I_x)/L \quad (29)$$

donde, K_9 y K_{10} son ganancias constantes y positivas.

Para el control de la orientación *yaw* (ψ) se definen los siguientes errores:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \psi - \psi^* \\ e_{12} &= \dot{\psi} - \dot{\psi}^* + K_{11} e_{11} \end{aligned} \quad (30)$$

Para asegurar que los errores convergen asintóticamente a cero se define la siguiente ley de control:

$$u_4 = I_z[\ddot{\psi}^* + K_{11}^2 e_{11} - (K_{11} + K_{12})e_{12}] - \dot{\varphi}\dot{\theta}(I_x - I_y) \quad (31)$$

donde, K_{11} y K_{12} son ganancias constantes y positivas.

Se concluye la sección III-B con una proposición que resume el desarrollo presentado anteriormente.

Proposición 2 (Control por backstepping): Considere la ecuación de estado no lineal $\dot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u$ en lazo cerrado con la ley de control $u = [\dot{x}^* - f(x, \dot{x}) + K_1^2 e_2 - (K_1 + K_2)e_2]/g(x, \dot{x})$. El sistema en lazo cerrado garantiza la estabilidad asintótica para $x \rightarrow x^*$ y $\dot{x} \rightarrow \dot{x}^*$, con la función de Lyapunov $V(x) = e_1^2/2 + e_2^2/2$, donde $e_1 = x - x^*$, $e_2 = \dot{x} - \dot{x}^* + K_1 e_1$ y $K_1, K_2 > 0$.

IV. SIMULACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se realizaron simulaciones para verificar la efectividad del controlador no lineal basado en CMDD (Prop. 1) para el problema de regulación y seguimiento de trayectorias del cuadricóptero. Para analizar el desempeño del controlador CMDD se diseñó un controlador basado en *backstepping* (Prop. 2) con el objetivo de comparar las respuestas temporales del sistema usando cada uno de los controladores. Se busca demostrar a través de simulaciones cual técnica de control no lineal posee mayor idoneidad para atenuar las perturbaciones producidas por efectos aerodinámicos y ruidos en los sensores. El análisis basado en índices de desempeño se realizó para el problema de control de regulación. Las simulaciones fueron realizadas en un entorno virtual haciendo uso de la plataforma de simulación matricial MATLAB®.

A. Problema de Control de Regulación

El problema de control de regulación consiste en el posicionamiento del robot en el espacio euclidiano con una posición y orientación deseada. En la Fig. 5, Fig. 6 y Fig. 7 se muestran de forma comparativa la respuesta temporal de las señales que describen la posición, la orientación y las entradas del cuadricóptero, respectivamente, utilizando la Prop. 1 y Prop. 2. La Tabla IV muestra las ganancias usadas en CMDD y la Tabla V muestra las ganancias usadas en *backstepping*.

TABLA IV
GANANCIAS PARA CMDD

(λ_z, K_z)	(λ_x, K_x)	(λ_y, K_y)	$(\lambda_\varphi, K_\varphi)$	$(\lambda_\theta, K_\theta)$	(λ_ψ, K_ψ)
(0.6, 4.0)	(0.6, 0.5)	(0.6, 0.5)	(10, 10)	(10, 10)	(0.6, 4.0)

TABLA V
GANANCIAS PARA BACKSTEPPING

(K_1, K_2)	(K_3, K_4)	(K_5, K_6)	(K_7, K_8)	(K_9, K_{10})	(K_{11}, K_{12})
(0.8, 0.8)	(0.8, 0.8)	(0.8, 0.8)	(10, 10)	(10, 10)	(0.8, 0.8)

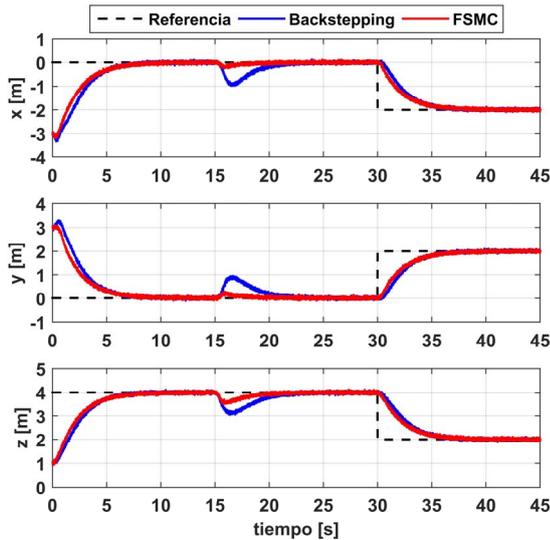


Fig. 5. Respuesta en el tiempo comparativa para la posición absoluta.

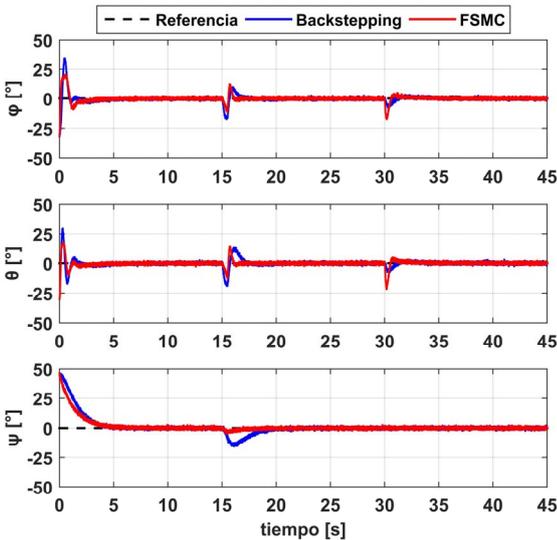


Fig. 6. Respuesta en el tiempo comparativa para la orientación.

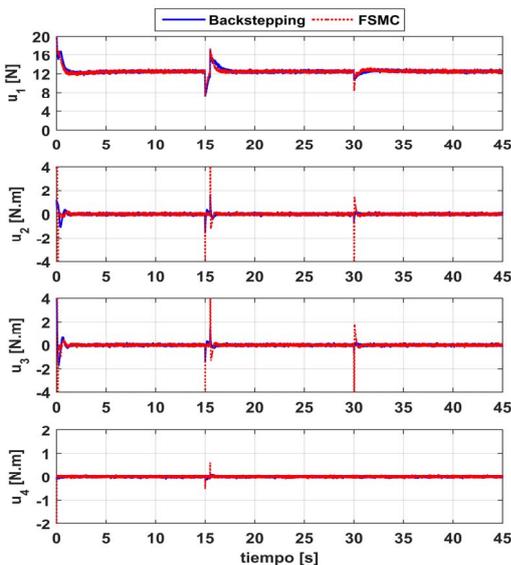


Fig. 7. Respuesta en el tiempo comparativa de las señales de control.

En la Fig. 5 se muestra la evolución temporal de las variables de estado que describen la posición absoluta del cuadricóptero frente a una señal de referencia constante. Los estados del robot empiezan desde una posición inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [-3, 3, 1]^T m$ y convergen asintóticamente a la posición deseada $[x^*, y^*, z^*]^T = [0, 0, 4]^T m$ sin sobre impulso en un tiempo de asentamiento aproximado de $t_s = 8 s$. En el instante de tiempo $t = 30 s$ se produjo un cambio de referencia, los nuevos valores de convergencia son: $[x^*, y^*, z^*]^T = [-2, 2, 2]^T m$ y se alcanzan en un tiempo de asentamiento aproximado de $t_s = 8 s$ sin sobre impulso.

En la Fig. 6 se muestra la evolución temporal de las variables de estado que describen la orientación del cuadricóptero. La evolución temporal para $[\varphi, \theta]^T$ son producidos por el lazo de control externo, donde se puede apreciar que sus valores de convergencia son $[\varphi^*, \theta^*]^T = [0, 0]^T (^\circ)$. La orientación inicial para el ángulo *yaw* es $\psi_0 = 45^\circ$ y converge asintóticamente a la orientación deseada $\psi^* = 0^\circ$ en un tiempo aproximado de $t_s = 5 s$.

En la simulación, se consideró la presencia de ruido Gaussiano blanco aditivo en los sensores, los mismos que fueron atenuados por acción del filtro de Kalman. En el instante de tiempo $t = 15 s$ se consideró el efecto de perturbaciones externas de magnitud: $d_1 = 5 N$, $d_2 = 1.5 Nm$, $d_3 = 1.5 Nm$, $d_4 = 1 Nm$, las cuales afectan a las cuatro entradas de control del cuadricóptero. En ese contexto, el efecto de las perturbaciones es rechazado en un tiempo de $t_s = 8 s$ y $t_s = 5 s$ para las variables de posición y orientación, respectivamente.

En la Fig. 7, se muestra una comparativa de las señales de control proporcionadas por los controladores no lineales diseñados. Se puede apreciar que las señales de control basadas en CMDD son suaves, continuas y acotadas, lo cual garantiza la efectividad de la estrategia de control propuesta (CMDD) para eliminar *chattering*.

Para obtener un indicador fidedigno del desempeño de los controladores, se realiza un análisis comparativo basado en los índices de desempeño más usados en el análisis de sistemas de control [31-32], tales como, la integral del error cuadrático (ISE), la integral del tiempo por error cuadrático (ITSE), la integral del valor absoluto del error (IAE), la integral del tiempo por valor absoluto del error (ITAE) y el error cuadrático medio (RMSE). La Tabla VI muestra los índices de desempeño para el controlador basado en CMDD y la Tabla VII muestra los índices de desempeño para el controlador basado en *backstepping*.

TABLA VI
ÍNDICES DE DESEMPEÑO PARA CMDD

Variable	ISE	ITSE	IAE	ITAE	RMSE
x	1.42×10^4	1.55×10^4	7.84×10^3	1.96×10^4	5.96×10^{-1}
y	1.39×10^4	1.51×10^4	7.74×10^3	2.00×10^4	5.90×10^{-1}
z	1.22×10^4	1.92×10^4	8.12×10^3	4.07×10^4	5.52×10^{-1}
φ	1.99×10^2	1.72×10^2	2.98×10^2	1.58×10^3	7.05×10^{-2}
θ	2.11×10^2	1.30×10^2	3.07×10^2	1.57×10^3	7.27×10^{-2}
ψ	4.18×10^2	3.37×10^3	1.15×10^3	3.42×10^3	1.02×10^{-1}

Al analizar los índices de desempeño para cada variable, mostrados en la Tabla VI y Tabla VII, se puede concluir que el controlador no lineal basado en CMDD presenta un menor error

en cada variable, respecto al controlador basado en *backstepping*, lo cual se ve reflejado gráficamente en su dinámica transitoria y en su capacidad de atenuar rápidamente las perturbaciones, ver la Fig. 5 y Fig. 6. El análisis comparativo se realiza para el problema de regulación; no obstante, los resultados del análisis de desempeño de los controladores se mantienen inclusive cuando se extienden al problema de control de seguimiento de trayectorias.

[TABLA VII
ÍNDICES DE DESEMPEÑO PARA BACKSTEPPING

Variable	ISE	ITSE	IAE	ITAE	RMSE
x	1.98×10^4	5.77×10^4	1.15×10^4	7.94×10^4	7.03×10^{-1}
y	2.02×10^4	5.71×10^4	1.15×10^4	7.98×10^4	7.11×10^{-1}
z	1.58×10^4	5.30×10^4	1.04×10^4	8.03×10^4	6.27×10^{-1}
φ	2.57×10^2	1.44×10^3	6.38×10^2	5.26×10^3	8.01×10^{-2}
θ	4.06×10^2	1.74×10^3	7.40×10^2	5.72×10^3	1.01×10^{-1}
ψ	7.33×10^2	3.43×10^3	1.86×10^3	1.38×10^4	1.35×10^{-1}

B. Problema de Control de Seguimiento de Trayectorias

Una vez que el problema de control de regulación es resuelto, cumpliendo todos los requerimientos de diseño. El problema de control de regulación se extiende al problema de control de seguimiento de trayectorias, donde el cuadricóptero parte desde una posición inicial $[x_0, y_0, z_0]^T = [1, 0, 0]^T$ con el objetivo de alcanzar y seguir la trayectoria deseada. En la Fig. 8 y Fig. 9 se muestran las respuestas en el tiempo para la posición absoluta y la orientación del cuadricóptero, respectivamente.

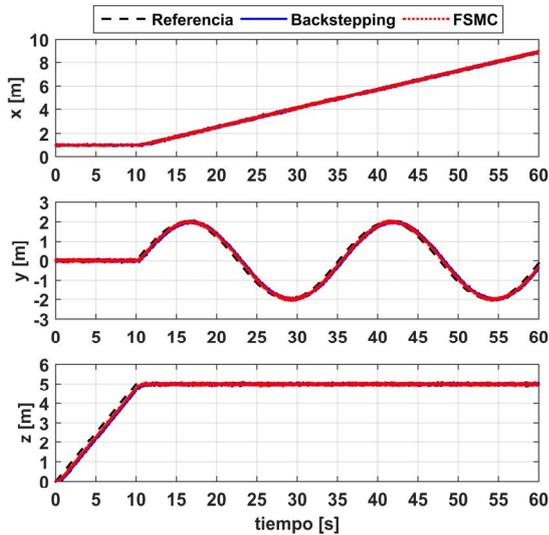


Figura 8. Respuesta en el tiempo comparativa para la posición absoluta.

En las Tablas IV y V se muestran las ganancias, usadas en el problema de control de regulación, las cuales se mantienen iguales para el seguimiento de trayectorias. La efectividad de los controladores propuestos se verifica a través del seguimiento de un camino sinuoso (trayectoria deseada). La trayectoria deseada se planifica en función de las coordenadas de posición absoluta (x^*, y^*, z^*) , tal como se puede apreciar en la Fig. 8. De igual manera, se espera que el robot siga el camino sinuoso con un ángulo de orientación *yaw* deseado $\psi^* = 0^\circ$; por otro lado, los ángulos de orientación deseados para *pitch*

(φ^*) y *roll* (θ^*) son proporcionados por el controlador de posicionamiento ubicado en el lazo de control externo.

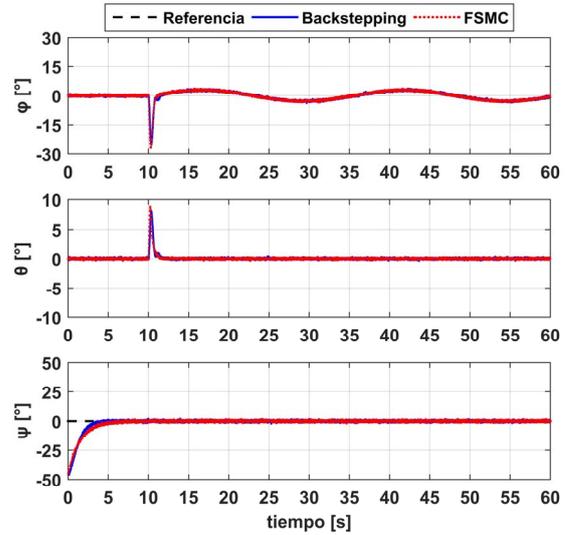


Figura 9. Respuesta en el tiempo comparativa para la orientación.

En la Fig. 10, se muestra al cuadricóptero siguiendo el camino sinuoso propuesto, donde se verifica que ambos controladores no lineales cumplen el objetivo de control de seguimiento; no obstante, las características de robustez de cada controlador son diferentes tal como se pudo apreciar en la sección IV-A.

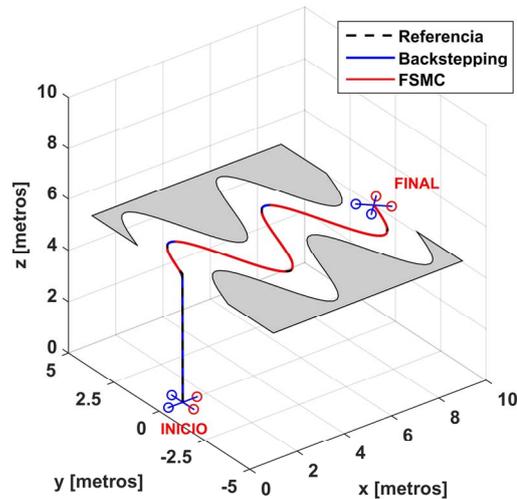


Figura 10. Cuadricóptero siguiendo un camino sinuoso.

V. CONCLUSIONES

En el presente artículo, para resolver el problema de posicionamiento y seguimiento de trayectorias de un cuadricóptero se ha propuesto una arquitectura de control jerárquica de dos lazos. Para esto, se propone un controlador que integra CMD con lógica difusa para eliminar el *chattering* en la ley de control, a esta combinación de técnicas de control se le ha denominado CMDD. Asimismo, para realizar un análisis comparativo se diseña un controlador recursivo no lineal basado en *backstepping*. El análisis de desempeño de los

controladores no lineales diseñados, dio como resultado que el controlador basado en CMDD presenta menor error en todos los índices de desempeño estudiados; además, proporciona una señal de control que permite atenuar las perturbaciones externas más rápido en comparación con *backstepping*. Este resultado es satisfactorio, ya que coincide con la teoría, justificando que CMD puede llegar a ser considerada un tipo de técnica de control robusta; además, permite concluir que el enfoque de control propuesto (CMDD) mantiene las características de robustez propias de CMD. Por lo tanto, tras el análisis del sistema en lazo cerrado se concluye que el mejor desempeño se obtiene al utilizar un controlador no lineal basado en CMDD, con lo cual se asegura que el robot seguirá cualquier trayectoria incluso en presencia de perturbaciones. La efectividad de la arquitectura de control y de los controladores no lineales diseñados ha sido verificada en un entorno virtual, simulando el posicionamiento y seguimiento de trayectorias del cuadricóptero. En ambos casos el cuadricóptero converge asintóticamente a la posición deseada y sigue la trayectoria deseada lo más cerca posible. La siguiente etapa de la investigación consiste en implementar el controlador basado en CMDD en uno de los cuadricópteros del Laboratorio de Control Avanzado de la PUCP.

REFERENCIAS

- [1] Z. Weidong, Z. Pengxiang, W. Changlong and C. Min, "Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV based on terminal sliding mode control," *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)*, Hangzhou, 2015, pp. 3398-3404.
- [2] M. J. Reinoso, L. I. Minchala, P. Ortiz, D. F. Astudillo and D. Verdugo, "Trajectory tracking of a quadrotor using sliding mode control," in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 5, pp. 2157-2166, May 2016.
- [3] J. Saenz, "Studies on Nonlinear Robust Tracking Control for a Quadcopter System," Master Thesis, Technische Universität Ilmenau, Aug. 2017.
- [4] J. J. Xiong and E. H. Zheng, "Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV," in *ISA Transactions*, vol. 53, no. 3, pp. 725-731, May 2014.
- [5] W. Wang and X. Yu, "Chattering free and nonsingular terminal sliding mode control for attitude tracking of a quadrotor," *2017 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, Chongqing, 2017, pp. 719-723.
- [6] A. S. Huaman-Loayza, "Accurate Trajectory Tracking for a 3D-Plotter Using Optimal Preview Control and Unknown Input Observer," *2018 IEEE XXV International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*, Lima, 2018, pp. 1-4.
- [7] S. Bouabdallah, A. Noth and R. Siegwart, "PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor," *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)* (IEEE Cat. No.04CH37566), Sendai, 2004, pp. 2451-2456 vol.3.
- [8] S. Khatoon, D. Gupta and L. K. Das, "PID & LQR control for a quadrotor: Modeling and simulation," *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*, New Delhi, 2014, pp. 796-802.
- [9] J. P. Ortiz, L. I. Minchala and M. J. Reinoso, "Nonlinear Robust H-Infinity PID Controller for the Multivariable System Quadrotor," in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 3, pp. 1176-1183, March 2016.
- [10] Y. K. Alexis, G. Nikolakopoulos and A. Tzes, "Model predictive quadrotor control: attitude, altitude and position experimental studies," in *IET Control Theory & Applications*, vol. 6, no. 12, pp. 1812-1827, 16 Aug. 2012.
- [11] Z. T. Dydek, A. M. Annaswamy and E. Lavretsky, "Adaptive Control of Quadrotor UAVs: A Design Trade Study With Flight Evaluations," in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 1400-1406, July 2013.
- [12] D. Lee, H. Jin Kim and S. Sastry, "Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter," in *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol.7, no. 3, pp. 419-428, June 2009.
- [13] M. Faessler, A. Franchi and D. Scaramuzza, "Differential Flatness of Quadrotor Dynamics Subject to Rotor Drag for Accurate Tracking of High-Speed Trajectories," in *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 2, pp. 620-626, April 2018.
- [14] K. Benzaid, N. Mansouri and O. Labbani-Igbida, "Robust trajectory tracking control of a quadrotor UAV," *3rd International Conference on Systems and Control*, Algiers, 2013, pp. 206-211.
- [15] Y. Choi and H. Ahn, "Nonlinear Control of Quadrotor for Point Tracking: Actual Implementation and Experimental Tests," in *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 20, no. 3, pp. 1179-1192, June 2015.
- [16] S. Bouabdallah and R. Siegwart, "Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor," *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, 2005, pp. 2247-2252.
- [17] M. Herrera, W. Chamorro, A. P. Gómez and O. Camacho, "Sliding Mode Control: An Approach to Control a Quadrotor," *2015 Asia-Pacific Conference on Computer Aided System Engineering*, Quito, 2015, pp. 314-319.
- [18] A. S. Huaman-Loayza, "Path-Following of a Quadrotor Using Fuzzy Sliding Mode Control," *2018 IEEE XXV International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*, Lima, 2018, pp. 1-4.
- [19] H. Wang, X. Ye, Y. Tian, G. Zheng and N. Christov, "Model-free-based terminal SMC of quadrotor attitude and position," in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 52, no. 5, pp. 2519-2528, October 2016.
- [20] H. Ramirez-Rodriguez, V. Parra-Vega, A. Sanchez and O. Garcia, "Integral sliding mode backstepping control of quadrotors for robust position tracking," *2013 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, Atlanta, GA, 2013, pp. 423-432.
- [21] L. Moraes et al., "Autonomous Quadrotor for accurate positioning," in *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 32, no. 3, pp. 58-62, March 2017.
- [22] A. Babb and M. Yilmaz, "Student research highlights: Quadrotor electronics and intelligent control," in *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, vol. 32, no. 6, pp. 61-64, June 2017.
- [23] H. J. de Jesus Rubio, J. Humberto Perez Cruz, Z. Zamudio and A. J. Salinas, "Comparison of two quadrotor dynamic models," in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 12, no. 4, pp. 531-537, June 2014.
- [24] M. Ryll, H. H. Bühlhoff and P. R. Giordano, "A Novel Overactuated Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle: Modeling, Control, and Experimental Validation," in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23, no. 2, pp. 540-556, March 2015.
- [25] S. Bouabdallah, "Design and control of quad rotors with application to autonomous flying," Ph.D. Thesis, École Polytechnique Federale de Lausanne, 2007.
- [26] J. J. Xiong and E. H. Zheng, "Optimal Kalman Filter for state estimation of a quadrotor UAV," in *ISA Transactions*, vol. 126, no. 21, pp. 2862-2868, Nov. 2015.
- [27] V. I. Utkin, "Sliding Modes in Control and Optimization", Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [28] J. J. E. Slotine and W. Li, "Applied Nonlinear Control," vol. 199, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [29] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. SMC-15, no. 1, pp. 116-132, Jan.-Feb. 1985.
- [30] J. Zhou and C. Wen, "Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems: Nonsmooth nonlinearities, interactions, or time-variations," Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [31] K. Krishnanand and G. Karpagam "Comparison of PID Controller Tuning Techniques for a FOPDT System," in *International Journal of Current Engineering and Technology*, vol. 4, no. 4, pp. 2667-2670, Aug. 2014.
- [32] A. Thameemul, K. Tharani, K. Sujitha, H. Kala and S. Abirami, "Assessment of Diverse Controllers for a Cylindrical Tank Level Process," in *IJIRST - International Journal for Innovative Research in Science & Technology*, vol. 1, no. 6, pp. 82-86, Nov. 2014.



Alex Smith Huaman Loayza received the degree in Electronic Engineering from the Peruvian University of Applied Sciences (UPC), Lima, Peru in 2017. Currently he is a graduate student in a double degree program in Engineering Cybernetics and Systems Theory at Technische Universität Ilmenau, Germany, and Control and Automation Engineering at Pontifical Catholic University of Peru (PUCP). His current research interests include digital, optimal, nonlinear and intelligent control for underactuated mechanical systems.



Carlos Gustavo Pérez Zuñiga received the Ph.D. degree in Control Engineering from the Federal University of Toulouse Midi- Pyrénées (UFTMP), Toulouse, France in 2017. He received the master degree in Control and Automation Engineering from Pontifical Catholic University of Peru (PUCP), Lima, Peru in 2008. Currently he is associate professor and coordinator of the master program in Control and Automation Engineering at PUCP. His current research interests include fault diagnosis, supervision and advanced control for complex industrial systems with special focus on qualitative and model-based methods. Dr. Pérez is a member of the International Federation of Automatic Control.