

# Extension and Analysis of the $AR_\gamma$ algorithm to 2D

Jhonatan Collazos Ramírez, Pablo Emilio Jojoa Gómez and Juan Pablo Hoyos Sanchez.

**Abstract**—Two-dimensional (2D) adaptive filtering is a technique that has been used for denoising in applications such as biomedical image processing in recent years. In this paper, we design the extension of the 1D- $AR_\gamma$  adaptive filtering schemes to form new 2D- $AR_\gamma$  adaptive filters. To compare the performance of the proposed algorithm in noise reduction in digital images, three images of different sizes from the Matlab library, Moon, Pout, and Cameraman, are taken as reference. This reduction is compared with two other gradient algorithms least mean squares (LMS) and normalized least mean squares (NLMS) for 2D adaptive filter design. Based on the simulation results and the established metrics, we demonstrate that the proposed method achieves a noise reduction eventually superior to the other 2D gradient algorithms.

**Index Terms**—Adaptive Filter, 2D, Noise Cancellation, 2D- $AR_\gamma$ , TD, TWD.

## I. INTRODUCCIÓN

En áreas como el procesamiento de imágenes las técnicas o métodos para poder reducir el ruido contenido en las señales deseables son indispensables [1], [2], [3]. Se han propuesto varios enfoques de reducción de ruido en imágenes tanto en el dominio espacial como en el de la frecuencia [4], [5], [6].

Actualmente existen diferentes técnicas relacionadas con la reducción de ruido en imágenes digitales, tales como medios no locales (NLM) [7], procesamiento no local (BM3D) [8], algoritmos basados en inteligencia evolutiva los cuales se han usado ampliamente en los métodos de diseño de los filtros digitales 2D *FIR no adaptativos* [9]. Las redes neuronales convolucionales han logrado un gran éxito en la reducción de ruido, pero la complejidad computacional es muy alta debido a los numerosos parámetros a ser estimados en los procesos de entrenamiento [10], además que se debe disponer de un conjunto de imágenes disponibles para dicho proceso.

Una de las maneras de reducir el costo computacional es implementar un filtro adaptativo, debido a su proceso de aprendizaje en el que los coeficientes del filtro se ajustan en iteraciones para minimizar el error [11].

Cabe destacar que la esencia de los filtros adaptativos es el algoritmo que ajusta los coeficientes y que por lo general son implementados en filtros para señales o sistemas unidimensionales, implicando que los datos únicamente se correlacionan en una dirección, lo cual no es cierto en los datos de una imagen, ya que por su propia naturaleza cada

dato (pixel) está relacionado con su entorno. Para poder superar esta dificultad Hadhoud y Thomas [12], presentan un nuevo algoritmo bidimensional que puede rastrear las variaciones en las estadísticas locales de una imagen. Se basa en el método del gradiente y es una extensión directa del algoritmo LMS de Widrow [13]. El algoritmo se denomina de mínimos cuadrados bidimensional (TD-LMS o 2D-LMS) y demuestran que pueden hacer uso de éste para reducir el ruido en las imágenes. Incluso [14] y recientemente [15] y [16] entre otros, han implementado los algoritmos 2D en la disminución de ruido en imágenes biomédicas.

El presente artículo desarrolla el soporte matemático que permite extender el algoritmo 1D- $AR_\gamma$  [17] a un algoritmo bidimensional denominado 2D- $AR_\gamma$ , para ser aplicado en la disminución de ruido en imágenes digitales y según el estado de arte realizado, no ha existido ningún estudio en la literatura que describa el algoritmo del filtro adaptador 2D basado en algoritmo  $AR_\gamma$ .

El contenido de este artículo se ha organizado de la siguiente manera: en la Sección II, se presenta las ecuaciones del algoritmo  $AR_\gamma$ . En la Sección III, se indica el proceso del diseño del algoritmo 2D- $AR_\gamma$  a partir de 1D- $AR_\gamma$ . En la Sección IV, se presentan las simulaciones y resultados al comparar el algoritmo 2D- $AR_\gamma$  con otros algoritmos 2D. Por último en la Sección V se presentan las conclusiones.

## II. ALGORITMO $AR_\gamma$

El algoritmo  $AR_\gamma$  es una variante derivada del algoritmo acelerador en tiempo continuo propuesta por F. Pait [18] que ajusta la segunda derivada de parámetros, el cual al ser discretizado genera versiones conocidas como algoritmo acelerador completo (AAC), algoritmo acelerador progresivo (APCM) y algoritmo acelerador regresivo (ARCM). Una versión simplificada del algoritmo ARCM, es el algoritmo acelerador regresivo versión  $\gamma$  ( $AR_\gamma$ ) [17]. Que tiene tres parámetros de ajuste escalares positivos denominados:  $\alpha$ ,  $\gamma$  y  $m_1$ , por medio de los cuales se logra una buena velocidad de convergencia y paralelamente una considerable reducción del error de medida final [17].

Así mismo, el análisis de *tracking* del algoritmo  $AR_\gamma$  en ambientes no estacionarios determinó que éste presenta un buen seguimiento a los cambios de la señal de entrada. Las ecuaciones del algoritmo  $AR_\gamma$  vienen dadas por [17]:

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}[n-1] - d[n] \quad (1)$$

$$g[n] = \frac{e[n] + \gamma \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}[n-1]}{1 + \gamma m_1 \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]} \quad (2)$$

$$\mathbf{q}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [\mathbf{q}[n-1] - \alpha m_1 g[n]\mathbf{x}[n]] \quad (3)$$

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n] \quad (4)$$

Jhonatan Collazos Ramirez, Trabaja en la Facultad de Ingeniería Civil, Universidad del Cauca, Colombia. e-mail:jocollazos@unicauca.edu.co

Pablo Emilio Jojoa Gómez, trabaja en la Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca, Colombia. e-mail: pjojoa@unicauca.edu.co

Juan Pablo Hoyos Sanchez, Juan Pablo Hoyos Sanchez, trabaja en la Escuela de pregrados - Dirección Académica, Universidad Nacional de Colombia sede De La Paz, Colombia. e-mail: jhoyoss@unal.edu.co

donde  $d[n]$  corresponde a la señal deseada obtenida mediante la relación:

$$d[n] = \mathbf{x}^T \mathbf{w}_0 + r[n], \quad (5)$$

siendo (en el instante  $[n]$ ):

- $\mathbf{x}$ : Vector de la señal de entrada.
- $\mathbf{w}$ : Vector de coeficientes del filtro adaptativo.
- $d$ : Escalar que corresponde a la señal deseada.
- $e$ : Escalar que corresponde al error de medida.
- $g$ : Escalar auxiliar.
- $\mathbf{q}$ : Vector Auxiliar.
- $\mathbf{w}_0$ : Vector de coeficientes óptimo.
- $r$ : Ruido de medida.
- $\alpha, \gamma, m_1$ : Parámetros de ajuste.

### III. EXTENSIÓN DEL ALGORITMO 1D-AR $\gamma$ A 2D-AR $\gamma$

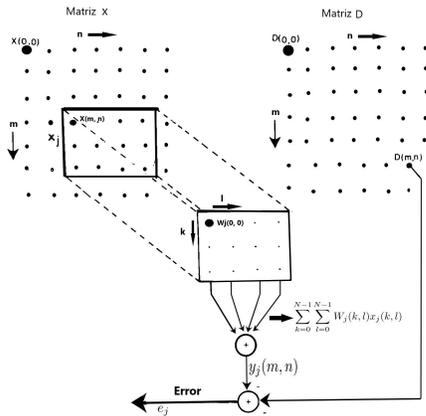


Fig. 1. Filtro de Wiener básico [12].

La Fig. 1, muestra el filtro Wiener básico para un sistema bidimensional, el cual tiene dos imágenes de entrada, la imagen principal  $\mathbf{D}$  (imagen “deseada”) y la imagen de entrada  $\mathbf{X}$  (imagen de “referencia”), donde las dos imágenes son de dimensiones  $M$  por  $M$ . La imagen de entrada principal  $\mathbf{D}$  es una matriz bidimensional que consta de la imagen ideal más un componente de ruido aditivo. Durante cada iteración, un píxel  $D(m, n)$  de la matriz  $\mathbf{D}$  se utiliza como entrada principal del filtro, donde  $0 \leq m \leq M - 1$  y  $0 \leq n \leq M - 1$ . La otra entrada (referencia), es la matriz de ruido o interferencia  $\mathbf{X}$  que se asume está correlacionada con el ruido o interferencia de la entrada principal. El filtro utilizado es un filtro FIR causal  $N$  por  $N$ . La salida del filtro corresponde a la convolución de la ventana del filtro  $\mathbf{W}_j$  con la imagen en la entrada de referencia, lo cual se calcula mediante la ecuación (6):

$$y(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \mathbf{W}_j(k, l) \mathbf{X}(m - k, n - l) \quad (6)$$

donde  $j$  es la  $j$ -ésima iteración, dada por  $j = mM + n$ . Durante la  $j$ -ésima iteración la ventana de datos de entrada  $\mathbf{X}_j$  (regresor) se define como:

$$\mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} X(m, n) & \cdots & X(m, n - N + 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X(m - N + 1, n) & \cdots & X(m - N + 1, n - N + 1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

en la cual la matriz de elementos para todos los valores de  $0 \leq k \leq N - 1$  y  $0 \leq l \leq N - 1$  es  $\mathbf{X}_j(k, l) = X(m - k, n - l)$ , y la matriz de coeficientes de dimensión  $N \times N$ , esta dada por

$$\mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} W_j(0, 0) & \cdots & W_j(0, N - 1) \\ W_j(1, 0) & \cdots & W_j(1, N - 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_j(N - 1, 0) & \cdots & W_j(N - 1, N - 1) \end{pmatrix} \quad (8)$$

En la  $j$ -ésima iteración, la salida del filtro  $y_j$ , es el producto punto (componente a componente) de la matriz de coeficientes del filtro  $\mathbf{W}_j$  con el regresor  $\mathbf{X}_j$ , por lo que la ecuación (6) se puede reescribir como

$$y_j(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_j(k, l) X_j(k, l) \quad (9)$$

La matriz de coeficientes  $\mathbf{W}_j$  y la matriz de entrada  $\mathbf{X}_j$  se pueden convertir a su forma unidimensional por orden lexicográfico. La ecuación (10) y la ecuación (11) presentan la forma unidimensional de la ecuación (7) y la ecuación (8) respectivamente:

$$\mathbf{X}_j = [X(m, n) \quad X(m, n - 1) \quad \cdots \quad X(m, n - N + 1) \quad \cdots \quad X(m - N + 1, n - N + 1)]^T \quad (10)$$

$$\mathbf{W}_j = [W_j(0, 0) \quad \cdots \quad W_j(0, N - 1) \quad W_j(1, 0) \quad W_j(1, 1) \quad \cdots \quad W_j(N - 1, N - 1)]^T \quad (11)$$

Los vectores anteriores  $\mathbf{X}_j$  y  $\mathbf{W}_j$  tienen dimensión  $(N \times N) \times 1$  y junto con la ecuación (9) en la iteración  $j$ -ésima, se obtiene:

$$y_j(m, n) = \mathbf{W}_j(m, n) \mathbf{X}_j^T(m, n), \quad (12)$$

sustituyendo este resultado en las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) del algoritmo AR $\gamma$ , se obtiene:

$$e_j = \mathbf{W}_j \mathbf{X}_j^T - d_j \quad (13)$$

$$g_j = \frac{e_j + \gamma \mathbf{X}_j^T \mathbf{W}_j}{1 + \alpha \gamma m_1 \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T} \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{j+1} = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [\hat{\mathbf{q}}_j - \alpha m_1 g_j \mathbf{X}_j] \quad (15)$$

$$\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{W}_j + \alpha \hat{\mathbf{q}}_j \quad (16)$$

donde  $d_j$  corresponde a la señal deseada obtenida mediante la expresión:

$$d_j = \mathbf{X}_j^T \mathbf{w}_0 + r_j, \quad (17)$$

siendo (en el instante  $j$ ):

$\mathbf{X}_j$ : Vector de la señal de entrada.

$\mathbf{W}_j$ : Vector de coeficientes del filtro adaptativo.

$d_j$ : Escalar que corresponde a la señal deseada.

$e_j$ : Escalar que corresponde al error de medida.

$g_j$ : Escalar auxiliar.

$\hat{q}_j$ : Vector Auxiliar.

$W_0$ : Vector de coeficientes óptimo.

$r_j$ : Ruido de medida.

$\alpha, \gamma, m_1$ : Parámetros de ajuste.

Para poder determinar  $X_j X_j^T$ , se puede observar que en la ecuación dada en (10), por orden lexicográfico corresponde a

$$T_j(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_j(k, l) X_j^T(k, l) \quad (18)$$

para algún vector  $T_j$  en el instante  $j$ .

Puesto que  $X_j(k, l) = X(m - k, n - l)$ , para todos los valores de  $0 \leq k \leq N - 1$  y  $0 \leq l \leq N - 1$ , entonces

$$T(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X(m - k, n - l) X(m - l, n - k) \quad (19)$$

es decir  $T_j$  es la convolución de dos matrices: el regresor  $X_j$  y su transpuesta. En la  $j$ -ésima iteración ( $j = mM + n$ ) la matriz de ponderación de dimensión  $N \times N$ , esta dada por

$T_j =$

$$\begin{pmatrix} T_j(0, 0) & T_j(0, 1) & \dots & T_j(0, N-1) \\ T_j(1, 0) & T_j(1, 1) & \dots & T_j(1, N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_j(N-1, 0) & T_j(N-1, 1) & \dots & T_j(N-1, N-1) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Por otra parte, el vector auxiliar  $\hat{q}_j$ , se obtiene de la siguiente forma: de la ecuación (16), se despeja  $\hat{q}_j$ , esto es:

$$\hat{q}_j(m, n) = \frac{1}{\alpha} [W_{j+1}(m, n) - W_j(m, n)], \quad (21)$$

así para  $0 < k < N - 1$  y  $0 < l < N - 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{q}_j(m, n) = & \frac{1}{\alpha} \left[ \underbrace{W_{j+1}(0, 0) X(m - 0, n - 0)}_{k=0, l=0} \right. \\ & - \underbrace{W_j(0, 0) X(m - 0, n - 0)}_{k=0, l=0} + \dots \\ & \left. + \underbrace{W_{j+1}(N-1, N-1) X(m - N + 1, n - N + 1)}_{k=N-1, l=N-1} \right. \\ & \left. - \underbrace{W_j(N-1, N-1) X(m - N + 1, n - N + 1)}_{k=N-1, l=N-1} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

es decir,

$$\hat{q}_j(m, n) = \frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_{j+1}(k, l) X(m - k, n - l) - W_j(k, l) X(m - k, n - l) \right], \quad (23)$$

por lo tanto, la ecuación (21) se puede escribir como:

$$\hat{q}_j(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left( \frac{W_{j+1}(k, l) - W_j(k, l)}{\alpha} \right) X(m - k, n - l), \quad (24)$$

en donde se puede observar que la expresión,

$$\frac{W_{j+1}(k, l) - W_j(k, l)}{\alpha}, \quad (25)$$

corresponde a la ecuación (4) a un instante en la iteración  $j$ -ésima del algoritmo AR $\gamma$ . Considerando, de la ecuación (25)

$$\frac{W_{j+1}(k, l) - W_j(k, l)}{\alpha} = q_j(k, l), \quad (26)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{q}_j(m, n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} q_j(k, l) X(m - k, n - l) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} q_j(k, l) X_j(k, l). \end{aligned} \quad (27)$$

Entonces  $\hat{q}_j(m, n)$  es la convolución de dos matrices: el regresor  $X_j$  y  $q_j$ .

De aquí que la matriz de ponderación de dimensión  $N \times N$ , esta dada por:

$$Q_j = \begin{pmatrix} q_j(0, 0) & \dots & q_j(0, N-1) \\ q_j(1, 0) & \dots & q_j(1, N-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_j(N-1, 0) & \dots & q_j(N-1, N-1) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Por lo tanto, el algoritmo 2D-AR $\gamma$  lo gobiernan las siguientes ecuaciones matriciales:

$$e_n = X_n^T W_n - d_n \quad (29)$$

$$g_n = \frac{e_j + \gamma X_n^T W_n}{1 + \alpha \gamma m_1 X_n^T X_n} \quad (30)$$

$$Q_{n+1} = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [Q_n - \alpha m_1 g_n X_n] \quad (31)$$

$$W_{n+1} = W_n + \alpha Q_n \quad (32)$$

donde (en el instante  $[n]$ ):

$X_n$ : Matriz de la señal de entrada.

$W_n$ : Matriz de coeficientes del filtro adaptativo.

$d[n]$ : Escalar que corresponde a la señal deseada.

$e[n]$ : Escalar que corresponde al error de medida.

$g[n]$ : Escalar auxiliar.

$Q_n$ : Matriz Auxiliar.

$\alpha, \gamma, m_1$ : Parámetros de ajuste.

#### IV. SIMULACIÓN Y RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados de la simulación con tres filtros adaptativos 2D: 2D-LMS, 2D-NLMS y el nuevo algoritmo adaptativo que se propone en este artículo 2D-AR $\gamma$ , en una de las aplicaciones más importantes de los filtros adaptativos como es la reducción de ruido en imágenes.

La Fig. 2 muestra la configuración de la cancelación de ruido adaptable 2D. La señal principal es la combinación de las señales deseada y de ruido, y la señal de referencia es el ruido que se correlaciona con el ruido de la señal principal.

$$e(n_1, n_2) = d(n_1, n_2) - y(n_1, n_2) \approx s(n_1, n_2). \quad (33)$$

Bajo la ecuación (33), el filtro adaptativo 2D intenta reducir la señal ruidosa, después de la convergencia de los coeficientes de filtro,  $e(n_1, n_2)$  será la estimación de la señal deseada.

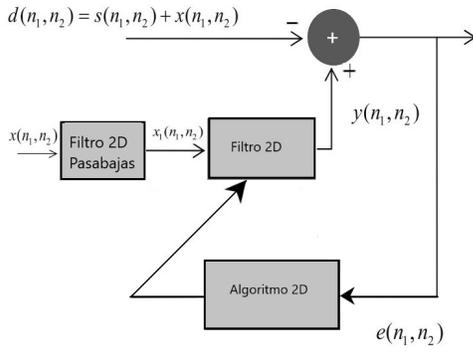


Fig. 2. Configuración de la reducción del ruido adaptativo 2D [14].

En esta simulación, se agrega un ruido gaussiano blanco con media cero y varianza unitaria  $x(n_1, n_2)$  a la imagen para producir una imagen con ruido, donde la relación señal/ruido (PSNR) se establece en aproximadamente 0 dB.

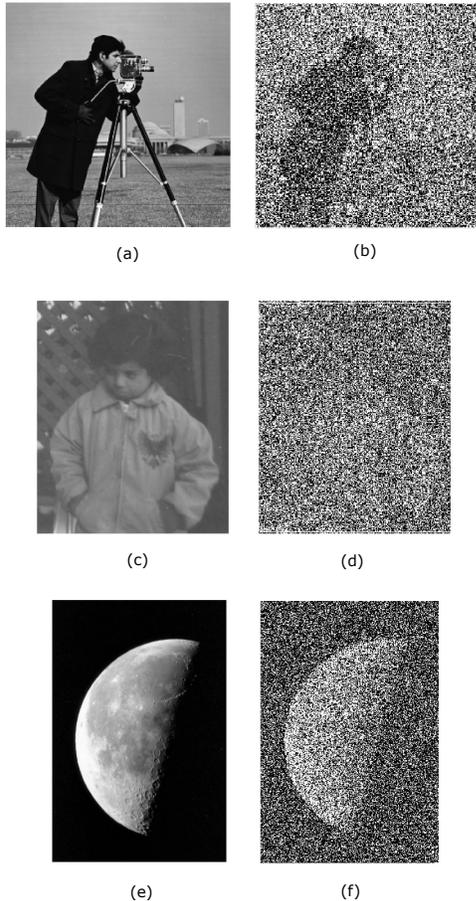


Fig. 3. Imágenes Originales, (a) Cameraman (c) Pout y (e) Moon. Imágenes con ruido, (PSNR = 0). (b) Cameraman (d) Pout (f) Moon.

Tomando como referencia el trabajo de [11], [19], en la configuración del filtro 2D pasabajas de la Fig. 2, la señal de referencia,  $x_1(n_1, n_2)$ , se genera pasando el ruido gaussiano blanco con media cero y varianza unitaria a través del filtro de paso bajo 2D; donde  $b(z_1)$  y  $b(z_2)$  son los coeficientes del

filtro y se determinan según la ecuación (34):

$$b(z_1) = 1 - 0.7z_1^{-1} + 0.5z_1^{-1} - 0.05z_1^{-3} + 0.0056z_1^{-4} - 0.0004z_1^{-5}. \quad (34)$$

$$b(z_2) = 1 - 0.7z_1^{-1} + 0.5z_1^{-1} - 0.045z_1^{-3} + 0.0046z_1^{-4} - 0.0003z_1^{-5}.$$

Debido al gran volumen que generaría trabajar con una base de datos completa y para facilitar la comparación con los filtros adaptativos, se consideran tres imágenes estándar de la biblioteca de Matlab: Cameraman, Pout y Moon a las cuales se les agrega ruido blanco gaussiano con media cero y varianza unitaria, ver Fig. 3.

La dimensiones de las imágenes originales Cameraman, Pout y Moon son  $256 \times 256$ ,  $291 \times 240$  y  $537 \times 358$  respectivamente.

El orden del filtro adaptativo 2D se establece en  $N_1 = N_2 = 6$ . El algoritmo se ejecutó 20 veces con diferentes semillas aleatorias. La simulación se procesó en una computadora personal con la siguiente especificación utilizando MATLAB: Intel(R) Core(TM) i7-9600 CPU @3.000GHz 3.00 GHz, RAM 8.00 GB.

La Tabla I presenta algunas de las métricas a utilizadas para comparar el rendimiento de los filtros adaptativos 2D respecto a la calidad de la imagen, donde  $I$  es la imagen original y  $J$  es la imagen filtrada,  $M_1$  y  $M_2$  son las dimensiones de la imagen.  $\mu_I$ ,  $\mu_J$ ,  $\sigma_I$ ,  $\sigma_J$  y  $\sigma_{IJ}$  son los promedios locales, las desviaciones estándar, y la covarianza cruzada para las imágenes  $I$ ,  $J$  respectivamente.  $c_1$  y  $c_2$  son dos variables para estabilizar la división.

TABLA I  
MEDIDAS DE CALIDAD DE IMAGEN [20], [14].

Métrica de calidad de imagen	Fórmula
SNR	$10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} I^2(i, j)}{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} [I(i, j) - J(i, j)]^2} \right)$
PSNR	$-10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} [I(i, j) - J(i, j)]^2}{M_1 M_2} \right)$
RMSE	$\sqrt{\frac{1}{M_1 M_2} \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} [I(i, j) - J(i, j)]^2}$
SSIM	$\frac{(2\mu_I \mu_J + c_1)(2\sigma_{IJ} + c_2)}{(\mu_I^2 + \mu_J^2 + c_1)(\sigma_I^2 + \sigma_J^2 + c_2)}$

La Tabla II presenta la comparación de las diferentes métricas. Un SNR de alto valor corresponde a bajo nivel de ruido. Si el valor de RMSE es bajo representa una mejor calidad de imagen y finalmente cuanto mayor sea el valor de PSNR, mayor será la tasa de calidad [21]. La medida del índice de la similaridad estructural (SSIM) es un método para medir la similaridad entre las imágenes de entrada y de salida. El

valor SSIM muestra la similaridad entre dos imágenes y debe en lo máximo posible aproximarse a 1 [14].

TABLA II  
COMPARACIÓN CON DISTINTAS MÉTRICAS. PSNR  $\approx$  0 DB.

Algoritmo	Imagen	$\mu$	Parámetros			SSIM	RMSE	SNR(OUT)	PSNR(OUT)
			$\gamma$	$\alpha$	$M_1$	After denoising		[dB]	[dB]
2D-LMS	Cameraman	0.001	-	-	-	0.1846	0.2019	8.3139	13.8963
	Pout	0.001	-	-	-	0.0571	0.2021	6.7965	13.8878
	Moon	0.001	-	-	-	0.0566	0.1879	5.8750	14.5195
2D-NLMS	Cameraman	0.05	-	-	-	0.1903	0.2094	7.9988	13.5812
	Pout	0.05	-	-	-	0.0588	0.2075	6.5677	13.6590
	Moon	0.05	-	-	-	0.0593	0.1865	5.9409	14.5854
2D-AR $\gamma$	Cameraman	-	180	1	11	0.1798	0.1902	8.8332	14.4156
	Pout	-	180	1	11	0.0579	0.1881	7.4215	14.5128
	Moon	-	180	1	11	0.0524	0.1860	5.9652	14.6097

La Fig. 4 muestra la rápida convergencia del algoritmo de filtro adaptativo 2D-AR $\gamma$  y los valores de MSE se aproximan a cero en la iteración cercana a 200, lo cual implica una valiosa eficiencia computacional del algoritmo de filtro adaptativo 2D-AR $\gamma$ .

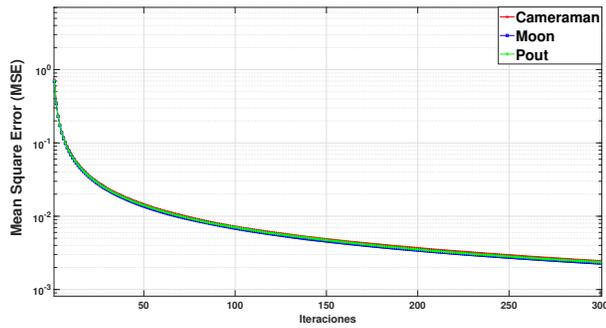


Fig. 4. Características de convergencia del algoritmo de filtro adaptativo 2D-AR $\gamma$  para todas las imágenes de prueba.

Para analizar la robustez del algoritmo de filtro adaptativo 2D-AR $\gamma$ , se analizó el rendimiento de salida de los algoritmos de filtro adaptativo 2D mediante diferentes valores de entrada PSNR. La Fig. 5 muestran los valores de PSNR de entrada y de salida utilizando los algoritmos de filtro adaptativo 2D-AR $\gamma$ , 2D-LMS y 2D-NLMS. Para condiciones de ruido cambiantes, el rendimiento del algoritmo de filtro adaptativo 2D-AR $\gamma$  es más eficiente en la eliminación de ruido que los otros dos algoritmos y su solidez es buena según los valores PSNR de entrada variables. El índice de la similaridad estructural (SSIM) en los tres algoritmos, se muestra en la Fig. 6. Lo cual indica que a partir de cierto PSNR de entrada el algoritmo 2D-AR $\gamma$  converge a 1 mucho más rápido que los otros dos algoritmos del gradiente.

La eficacia del algoritmo 2D-AR $\gamma$  en cuanto a robustez, solidez e índice de similaridad se ve contrastada con la desventaja en un tiempo de ejecución más extenso en comparación con los otros dos algoritmos. La Tabla III, muestra el tiempo de ejecución de todos los algoritmos.

Finalmente se presenta las imágenes restauradas con los distintos filtros adaptativos. Las Fig. 7, 8 y 9 muestran cada una de las imágenes ruidosas y restauradas mediante diferentes algoritmos de filtro adaptativo 2D.

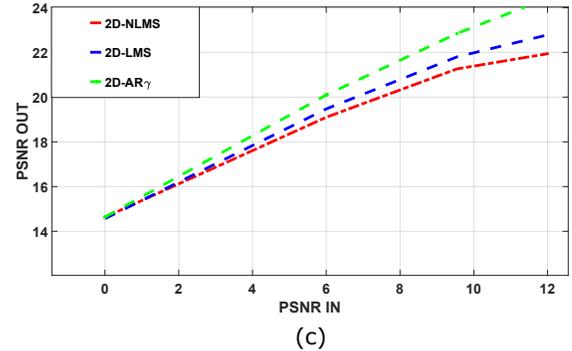
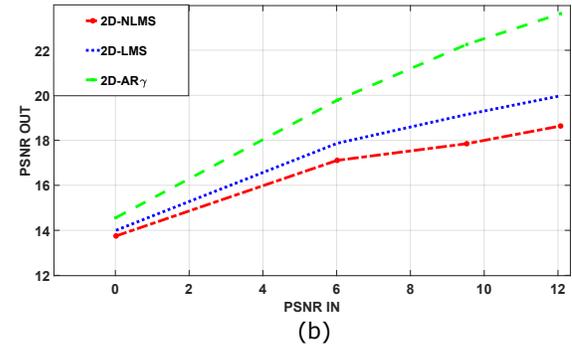
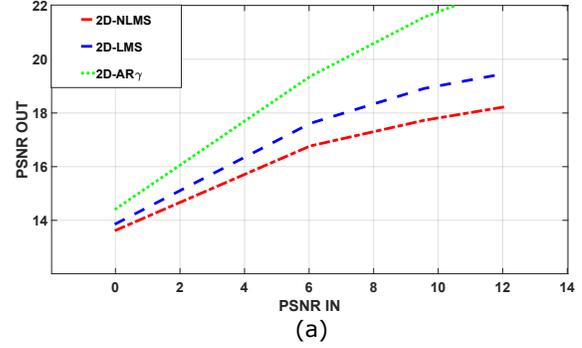
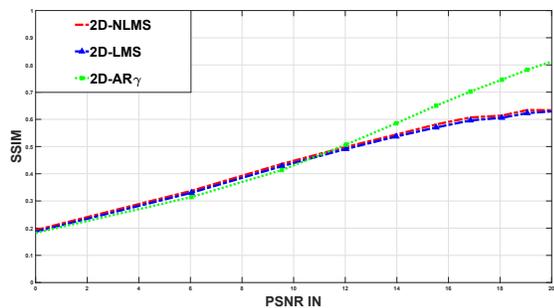


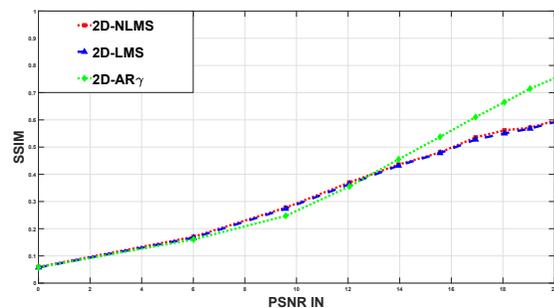
Fig. 5. Output PSNR versus input PSNR para 2D-LMS, 2D-NLMS, y 2D-AR $\gamma$ . (a) Cameraman (b) Pout (c) Moon.

TABLA III  
TIEMPO (SEGUNDOS) DE EJECUCIÓN DE LOS ALGORITMOS.

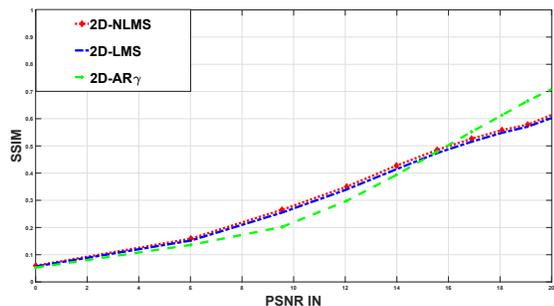
Algoritmo	Cameraman	Pout	Moon
2D-LMS	4.189153	4.328553	11.641359
2D-NLMS	4.942175	5.300619	14.013441
2D-AR $\gamma$	7.556363	7.878038	21.549461



(a)



(b)



(c)

Fig. 6. SIMM versus input PSNR para 2D-LMS, 2D-NLMS, y 2D- $AR_\gamma$ . (a) Cameraman (b) Pout (c) Moon.

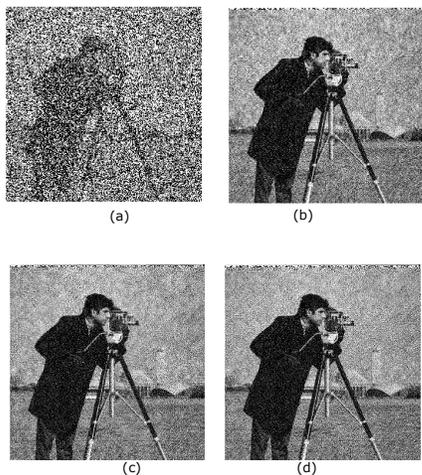


Fig. 7. (a) Cameraman con ruido, Imágenes restauradas por (b) 2D- $AR_\gamma$  (c) 2D-LMS (d) 2D-NLMS.

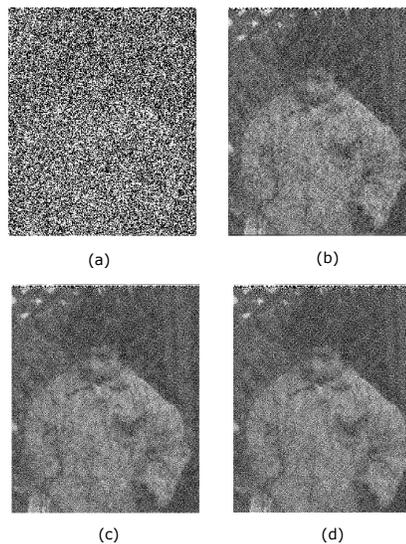


Fig. 8. (a) Pout con ruido, Imágenes restauradas por (b) 2D- $AR_\gamma$  (c) 2D-LMS (d) 2D-NLMS.

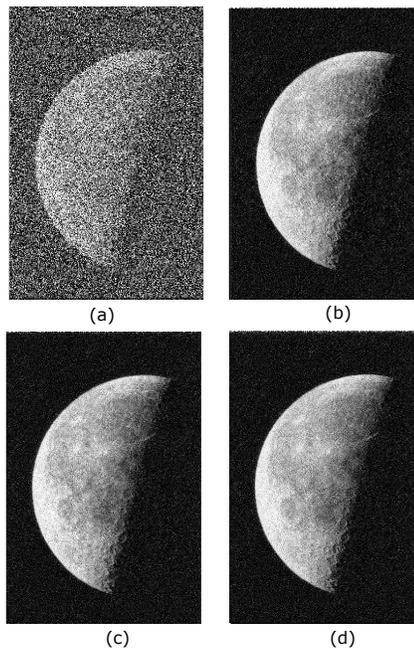


Fig. 9. (a) Moon con ruido, Imágenes restauradas por (b) 2D- $AR_\gamma$  (c) 2D-LMS (d) 2D-NLMS.

## V. CONCLUSIÓN

En este artículo, el algoritmo  $AR\gamma$  se adaptó al filtrado adaptativo 2D y se propuso por primera vez en la literatura existente un nuevo algoritmo de filtro adaptativo 2D- $AR\gamma$ . Bajo las condiciones según lo recomendado en la literatura, el rendimiento de este algoritmo se demostró en la configuración de cancelación de ruido adaptable 2D. Los resultados de la simulación mostraron que el algoritmo de filtro adaptativo 2D- $AR\gamma$  supera el rendimiento de los dos algoritmos respecto a las métricas utilizadas, demostrando una buena capacidad para reducir el ruido en imágenes digitales. Además, el algoritmo propuesto presenta una convergencia más rápida. En trabajos futuros sería deseable realizar un análisis con una base de datos completa.

## REFERENCES

- [1] N. Sasaoka, K. Shimada, S. Sonobe, Y. Itoh, and K. Fujii, "Speech enhancement based on adaptive filter with variable step size for wide-band and periodic noise," in *2009 52nd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, pp. 648–652, IEEE, 2009.
- [2] M. S. Ahmad, O. Kukrer, and A. Hocanin, "A 2-d recursive inverse adaptive algorithm," *Signal, Image and Video Processing*, vol. 7, no. 2, pp. 221–226, 2013.
- [3] P. U. Kim, Y. Lee, J. H. Cho, and M. N. Kim, "Modified adaptive noise canceller with an electrocardiogram to enhance heart sounds in the auscultation sounds," *Biomedical Engineering Letters*, vol. 1, no. 3, p. 194, 2011.
- [4] W. W. A.J. Wright, "Adverse effects of vancomycin administered in the perioperative period," in *Mayo Clinic Proceedings*, vol. 61, pp. 721–724, Elsevier, 1986.
- [5] Y. Liu, Z. Gui, and Q. Zhang, "Noise reduction for low-dose x-ray ct based on fuzzy logical in stationary wavelet domain," *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 124, no. 18, pp. 3348–3352, 2013.
- [6] L. Wang, J. Lu, Y. Li, T. Yahagi, and T. Okamoto, "Noise removal for medical x-ray images in wavelet domain," *Electrical Engineering in Japan*, vol. 163, no. 3, pp. 37–46, 2008.
- [7] J.-K. Park, S.-H. Kang, M. Park, D. Lee, K. Kim, and Y. Lee, "Noise level and similarity evaluations of non-local means algorithm in chest digital tomosynthesis x-ray imaging system: An experimental study," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 1029, p. 166404, 2022.
- [8] X. He, C. Wang, R. Zheng, Z. Sun, and X. Li, "Gpr image denoising with nsst-unet and an improved bm3d," *Digital Signal Processing*, vol. 123, p. 103402, 2022.
- [9] C. Rajesh and S. Kumar, "An evolutionary block based network for medical image denoising using differential evolution," *Applied Soft Computing*, vol. 121, p. 108776, 2022.
- [10] Y. Zhang, W. Li, L. Zhang, X. Ning, L. Sun, and Y. Lu, "Agcnn: adaptive gabor convolutional neural networks with receptive fields for vein biometric recognition," *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, p. e5697, 2020.
- [11] M. S. E. Abadi and S. N. Aali, "The novel two-dimensional adaptive filter algorithms with the performance analysis," *Signal processing*, vol. 103, pp. 348–366, 2014.
- [12] M. M. Hadhoud and D. W. Thomas, "The two-dimensional adaptive lms (tdlms) algorithm," *IEEE transactions on circuits and systems*, vol. 35, no. 5, pp. 485–494, 1988.
- [13] B. Widrow, J. R. Glover, J. M. McCool, J. Kaunitz, C. S. Williams, R. H. Hearn, J. R. Zeidler, J. E. Dong, and R. C. Goodlin, "Adaptive noise cancelling: Principles and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, no. 12, pp. 1692–1716, 1975.
- [14] S. Kockanat and N. Karaboga, "A novel 2d-abc adaptive filter algorithm: a comparative study," *Digital Signal Processing*, vol. 40, pp. 140–153, 2015.
- [15] B. Gupta and A. R. Verma, "A novel approach of 2d adaptive filter based on mpso technique for biomedical image," *Augmented Human Research*, vol. 5, no. 1, pp. 1–8, 2020.
- [16] P. K. Gupta, S. Lal, and F. Husain, "Artificial bee colony optimization based despeckling framework for ultrasound images.," *Journal of Engineering Science & Technology Review*, vol. 13, no. 5, 2020.
- [17] P. E. Jojoa Gómez, *Um Algoritmo Acelerador de Parâmetros*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de Sao Paulo, 2003.
- [18] F. M. Pait, "A tuner that accelerates parameters," *Systems & Control Letters*, vol. 35, no. 1, pp. 65–68, 1998.
- [19] A. M. S. ESFAND and S. Nikbakht, "Image denoising with two-dimensional adaptive filter algorithms," 2011.
- [20] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, "Digital image processing, prentice hall," *Upper Saddle River, NJ*, 2008.
- [21] T. B. Chandra and K. Verma, "Analysis of quantum noise-reducing filters on chest x-ray images: A review," *Measurement*, vol. 153, p. 107426, 2020.



**Jhonatan Collazos Ramírez.** Mathematician from the University of Cauca, Colombia (2016). He is currently pursuing a Doctor in science of Electronic of the Universidad del Cauca, Colombia. He is currently a professor in the construction Department of the Faculty of civil Engineering of the Universidad del Cauca. His main research interests include the His research areas include signal processing and adaptive systems.



**Pablo Emilio Jojoa Gómez.** Electronic Engineer from the Universidad del Cauca, Colombia (1993), Magister (1999) and Doctor (2003) in Electrical Engineering in the area of concentration of Electronic Systems from the Escola Politécnica of the Universidade de São Paulo, Brazil. He is currently a professor in the Telecommunications Department of the Faculty of Electronic Engineering and Telecommunications of the Universidad del Cauca. His research areas include signal processing and adaptive systems.



**Juan Pablo Hoyos Sanchez.** Received the Engineer, Magister in Electronics and Telecommunications and Doctor in Electronic Sciences degrees from Universidad del Cauca, Popayan, Colombia, in 2010, 2016, and 2018 respectively. From 2019 to 2021, he was a Postdoctoral fellow at the GNTT of the of the Universidad del Cauca, and from 2020 to 2022 he was a Postdoctoral Researcher at the Center for Mathematical Modeling (CMM) at Universidad de Chile. He is currently an assistant professor at the Universidad Nacional de Colombia, sede De La Paz. His research interest are in signal processing, machine learning, wavelet theory, and compressed sensing.