






Liènard Chaotic System based on Duffing and the Sinc Function for Weak

P. Pancóatl-Bortolotti , *Student Member, IEEE*, Rogerio A. Enríquez-Caldera  Antonio H. Costa ,
Member, IEEE, José Fermi Guerrero-Castellanos  Maribel Tello-Bello ,

Abstract—This article presents a modified Duffing system based on Liènard’s theorem and the integral of Melnikov, the first is used to propose the interpolation function ‘Sinc’ as a non-linear damping function and the second is used to assure an asymptotically stable limit cycle. The new Sinc-Duffing system is driven into chaos by using its corresponding bifurcation diagram, Lyapunov exponents, and the theory of Melnikov. Furthermore, the system was placed in a critical state which produces chaotic and periodic sequences, deriving it into a regime of intermittence between chaos and the self-sustained oscillations near the stable limit cycle. Intermittence is achieved by searching and tuning all involved parameters when a very systematic procedure is used. Also, such a regime is presented here as a useful mechanism to estimate the frequency of a very low weak signal for detection applications. The latest is made possible because the system capabilities to distinguish the intermittent periods were strengthened by a new method based on Melnikov’s function that only depends on the most influential parameter in the type-Liènard system. The complete system formed by the new Sinc-Duffing oscillator showed higher sensitivity compared to other chaotic systems such as the traditional Duffing or the Van der Pol-Duffing for weak signal detection with a signal-to-noise ratio down to -70 dB.

Index Terms—Sinc-Duffing, Liènard system, Melnikov detector, weak signal detection

I. INTRODUCCIÓN

El caos es un comportamiento común aparentemente aleatorio presente en ciertos sistemas dinámicos no lineales. Su estudio es relativamente reciente y ha permitido comprender la dinámica de sistemas empezando por modelos tan simples como lo son el crecimiento de población de especies regido por ecuaciones en diferencias de primer orden [1], hasta los sistemas complejos de orden superior con múltiples atractores y sus respectivos tipos de equilibrios [2]. La comprensión de los sistemas caóticos ha permitido su uso en ingeniería gracias a algunas propiedades benéficas tales como la resistencia a condiciones de ruido severo, su alta sensibilidad a perturbaciones periódicas débiles, y su alta capacidad para producir secuencias pseudo aleatorias. Estas propiedades se han extendido hacia áreas del conocimiento como lo son la medicina, las comunicaciones, la química y la economía.

A. Antecedentes

Los sistemas caóticos han emergido como una herramienta en instrumentación para detección de señales débiles en ambientes ruidosos [3] y en los que básicamente se aprovecha el fenómeno de intermittencia, el cual consiste en la aparición de

secuencias periódicas que se alternan con estallidos repentinos de caos. Las primeras contribuciones conocidas en esta área, se remontan al trabajo de L. Birk en 1992, quien utilizando los cambios de estados periódico y caótico pudo detectar señales débiles periódicas [4]. En 1999, Guangyu fue capaz de controlar la intermittencia de un oscilador Duffing implementado en circuitos electrónicos analógicos aprovechando la necesaria presencia de ruido en el sistema [5]. Luego, en 2017, esa misma característica de intermittencia fue usada por Yanhua Wu para la detección de señales débiles no estacionarias [6]. Dentro de las aplicaciones más recientes se encuentran: i) La detección de fallas mecánicas en [7], cuyos resultados demostraron que los sistemas caóticos Chen-Lee y Lorenz presentan una detección superior y con menor tiempo de procesamiento respecto a métodos tradicionales basados en la transformada de Fourier de tiempo corto, permitiendo extraer características de fallo en rodamientos con alta precisión. ii) La detección de señales ECG mencionado en [8], donde se combina la teoría del caos con herramientas de análisis tiempo-frecuencia autorregresivos para identificar de manera eficiente variaciones del ritmo cardíaco o arritmias; en este trabajo el análisis de caos, mejora la detección de los picos R para un mejor diagnóstico. iii) El sistema basado en sonar [9], donde se proponen dos métodos con oscilador Duffing en régimen de intermittencia para detección de objetivos submarinos, llegando hasta un umbral de relación señal-ruido (*SNR*) cercano a -20 dB, y sin la necesidad de procesamiento adicional.

Los sistemas caóticos emplean mecanismos para distinguir caos de cualquier otra perturbación o ruido y, de acuerdo a la revisión realizada en [10], los tres mecanismos más utilizados para diferenciar caos de componentes de frecuencia de señales débiles son: Diagramas de Bifurcación (DB), Exponentes de Lyapunov (EL), y trayectorias en el espacio fase (TF), que son aplicables tanto para sistemas caóticos discretos como para continuos.

B. Contribución

La presente investigación tiene como principal contribución el análisis y diseño de un sistema Duffing modificado que, configurado en régimen de intermittencia, permite ser usado como detector de señales débiles estacionarias. Este sistema presenta mayor sensibilidad a variaciones periódicas débiles inmersas en condiciones de ruido severo, en comparación con el sistema Duffing clásico o Van der Pol - Duffing (VDPD) mencionados en diversas investigaciones en la literatura. A continuación, se listan las principales características teóricas

y técnicas: i) A través del teorema de Liénard, se proponen a la función de interpolación Sinc como la función de amortiguamiento no lineal y a la función Duffing como la de restauración no lineal, quedando así definida una ecuación tipo Liénard. ii) A través de la integral de Melnikov para órbitas periódicas, se confirma que el sistema Liénard propuesto tiene un único ciclo límite asintóticamente estable, lo cual implica oscilaciones autosostenidas. iii) Para conducir al sistema hacia el régimen de caos intermitente, se sugiere un método iterativo basado en la integral de Melnikov, el cual proporciona una función en términos de uno de los parámetros involucrados en este nuevo sistema; este método se le ha denominado espectro de Melnikov (EM) dada su similitud al obtenido utilizando los EL. iv) A través de DB, EL y EM, se realiza la búsqueda y sintonización de cada parámetro del sistema para producir una bifurcación nodo-silla, lo que a su vez facilita la aparición de una dinámica de intermitencia [11]. v) Finalmente, se propone y desarrolla un mecanismo de detección que aprovecha la intermitencia para estimar la frecuencia de una señal débil estacionaria inmersa en ruido severo.

C. Organización

El presente documento está organizado de la siguiente manera: la sección I, que incluye antecedentes y motivación, la sección II, que describe a la ecuación de Liénard compuesta por las funciones Sinc y Duffing como mecanismo de amortiguamiento y restauración no lineal respectivamente, en la sección III se propone el nuevo sistema Sinc-Duffing operando en régimen periódico, caótico e intermitente; en la sección IV se propone el nuevo método de detección basado en función de Melnikov para señales débiles estacionarias, aquí mismo se presentan los experimentos computacionales, sus resultados y su respectiva discusión; y finalmente en la sección V, menciona las conclusiones.

II. TEOREMA DE LIÈNARD Y FUNCIONES NO LINEALES

A. Oscilador Duffing

El sistema Duffing es descrito mediante la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = 0 \tag{1}$$

con δ como el parámetro de amortiguamiento lineal, y α, γ los parámetros de rigidez lineal y no lineal respectivamente. La ecuación de Duffing ha sido ampliamente estudiada, y los análisis matemáticos previos han permitido identificar sus bifurcaciones locales y globales [12]. Si en el sistema se descarta la función de amortiguamiento, la Ec.1 queda

$$\ddot{x} + \alpha x + \gamma x^3 = 0 \tag{2}$$

cuyos puntos de equilibrio en las variables de estado correspondientes se encuentran en

$$(x_{1*}, x_{2*}) = (\pm\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0). \tag{3}$$

Para $\alpha < 0$ y $\gamma > 0$, los puntos $x_{1*} = \pm\sqrt{-\alpha/\gamma}$ producen centros estables, y $x_{2*} = 0$ produce un nodo silla.

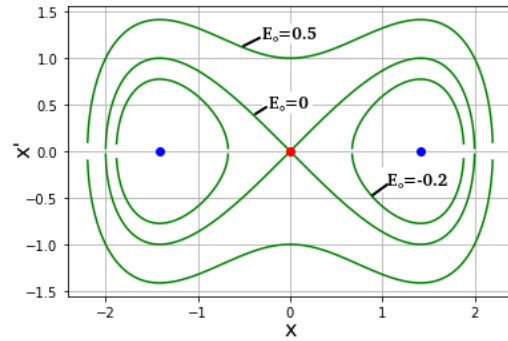


Fig. 1. Curvas de energía para $\alpha = -1$ y $\gamma = 0,5$ en Ec.5.

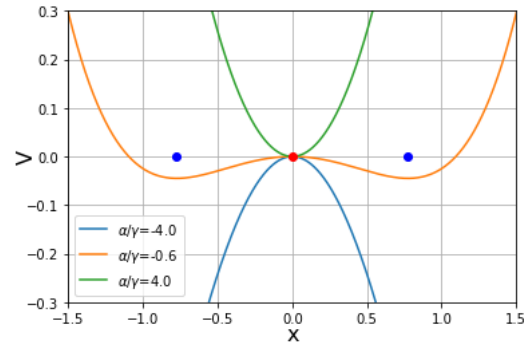


Fig. 2. Pozos de potencial (V) para $\gamma = 0,5$ en Ec.4.

Por otro lado, para la Ec.2, la energía cinética T y la energía potencial V proporcionan una energía total E escrita como

$$E = [T] + [V] = \left[\frac{\dot{x}^2}{2} \right] + \left[\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4} \right], \tag{4}$$

así pues, para una energía constante $E = E_0$ y una órbita específica en el espacio fase con posición x_0 y velocidad \dot{x}_0 se puede obtener la ecuación

$$\dot{x}_0 = \pm\sqrt{2E_0 - \alpha x_0^2 - \frac{\gamma x_0^4}{4}}. \tag{5}$$

La Fig.1 muestra las órbitas de energía constante para $\alpha = -1$ y $\gamma = 0,5$ tal como se presentan en [12].

El presente trabajo involucra la presencia de oscilaciones periódicas de baja amplitud, por lo que el análisis de pozos de potencial determinado por los puntos de equilibrio y sus correspondientes estabildades, facilitarían la identificación de tales oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio.

La Fig.2 muestra diversas curvas de potencial para varias razones α/γ resaltando que cualquiera de ellas es válida siempre que se preserven los puntos de equilibrio. Aquí, se establece $\gamma = 0,5$ obtenida de las curvas de energía total, quedando un valor fijo de $\alpha = -0,3$, de modo tal que los puntos de equilibrio se encuentren lo suficientemente cercano al nodo silla.

Cuando $E_0 = 0$ se producen un par de órbitas homoclínicas en relación al nodo silla lo cual facilita la transición hacia el régimen de caos [13].

B. Función Sinc

La función $\text{Sinc}(\cdot)$ ha sido utilizada para aplicaciones de procesamiento de señales como función de interpolación, pues es fácil de implementar, ofrece un bajo costo computacional y supera el problema de singularidad en funciones discontinuas [14]. Además, al tratarse de una función par, continua, y diferenciable, esta puede ser empleada como elemento no lineal de una ecuación diferencial.

C. Ecuación de Liènard

El teorema de Liènard es una generalización para sistemas no lineales de segundo orden, el cual establece las condiciones para producir un ciclo límite estable centrado en el origen [15].

Teorema 1. *Considere el sistema no lineal de segundo orden descrito por la denominada ecuación de Liènard*

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (6)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones de amortiguamiento y restauración no lineal respectivamente, tales que [16]:

1. $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y diferenciables,
2. $g(x)$ es una función impar y no decreciente,
3. $f(x)$ es una función par, con $F(x) = \int_0^x f(u) du$,
4. $F(x)$ tiene un cero positivo en $x = a$, de tal forma que es negativa para $0 < x < a$, positiva y no decreciente para $x > a$, y además $F(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$,

entonces, el sistema de la Ec.6 tiene un ciclo límite asintóticamente estable alrededor del origen.

III. ANÁLISIS Y DISEÑO DEL SISTEMA LIÈNARD SINC-DUFFING

A. Validación de Ciclo Límite

Primero, se propone la función de restauración no lineal de manera similar a los elementos de Duffing descritos en la Ec.2 por lo que

$$g(x) = \alpha x + \gamma x^3, \quad (7)$$

y enseguida, se propone como función de amortiguamiento no lineal

$$f(x) = \varepsilon[1 - \beta \text{sinc}(x)], \quad (8)$$

donde se ha introducido un factor de amortiguamiento ε para contemplar posibles ajustes al sistema tal que $0 < \varepsilon \leq 1$.

La propuesta de tal función se basa en la extensión de la función de amortiguamiento del oscilador Van der Pol, como una forma trigonométrica que cumple con las condiciones de simetría, diferenciability y continuidad del teorema de Liènard, aunado a los criterios de que los parámetros cumplan con $\alpha, \beta < 0$, y $\varepsilon, \gamma > 0$.

Las dos funciones anteriores se ajustan perfectamente a las condiciones del teorema de Liènard. Sin embargo, la función $F(x)$ no tiene un cero único y tampoco tiende a infinito cuando x tiende a infinito; tal excepción incide directamente sobre la posibilidad de la generación de un ciclo límite en el sistema pudiéndose concretar al analizar las posibles familias de órbitas periódicas del sistema utilizando la teoría de Melnikov la cual, se establece a continuación acorde a [17] [18].

Definición: *La función de Melnikov para el sistema definido en la Ec.6 está dada por [19]:*

$$M(r, \mu) = \int_0^{T_r} e^{\left(-\int_0^t \nabla \cdot \mathbf{P}(\Gamma_r(s)) ds\right)} \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\Gamma_r(t), 0, \mu) dt \quad (9)$$

donde \mathbf{P} es el modelo del sistema no perturbado bajo una familia de órbitas periódicas identificadas por r , parametrizadas en t , y con periodo mínimo T_r dadas por $\Gamma_r(t)$. \mathbf{Q} modela al sistema perturbado dentro del intervalo $0 \leq t \leq T_r$, donde μ es uno y solo un parámetro seleccionado adecuadamente en las funciones de la Ec.6.

Teorema 2. *Si para r_0 y μ_0 dados sucede que $M(r_0, \mu_0) = 0$ y $\frac{\partial M}{\partial r} \neq 0$ entonces el sistema dinámico definido en la Ec.9 tiene un único ciclo límite hiperbólico cercano a $\Gamma_r(t)$ para $0 < \varepsilon \ll 1$; por el contrario, el sistema no tiene un ciclo límite cercano a $\Gamma_r(t)$ si $M(r_0, \mu_0) \neq 0$ [18].*

Para aplicar la teoría de Melnikov al nuevo sistema propuesto, primero se considera que la ecuación de Liènard y las restricciones de parámetros son válidas, por lo que se pueden sustituir las Ecs.7 y 8 en la Ec.6 quedando la siguiente ecuación de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon[1 - \beta \text{sinc}(x_1)]x_2 - \alpha x_1 - \gamma x_1^3 \end{aligned} \quad (10)$$

y segundo, se establece la familia de órbitas periódicas con periodo $T_r = 2\pi$ como

$$\Gamma_r(t) = (r \cos(t), r \sin(t)). \quad (11)$$

La Ec.10 permite obtener las funciones no perturbada y perturbada siguientes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{x}) &= (y, -(\alpha x + \gamma x^3)) \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \varepsilon) &= (0, -\varepsilon[1 - \beta \text{sinc}(x)]y). \end{aligned} \quad (12)$$

En este caso, $\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0$, de modo que la integral de Melnikov se simplifica a

$$\begin{aligned} M(r, \beta) &= \int_0^{T_r} \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q}(\Gamma_r(t), 0, \beta) dt \\ &= -\varepsilon \int_0^{2\pi} y^2 [1 - \beta \text{sinc}(x)] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Esta integral puede ser calculada utilizando la serie de Taylor de la función $\text{sinc}(x)$ y sustituyendo la familia de órbitas periódicas de la Ec.11 por lo que

$$M(r, \beta) = -\varepsilon \pi r^2 \left[1 + \beta - \frac{\beta \pi^2 r^2}{24} \right] \quad (14)$$

que tiene un cero en

$$r = \frac{2}{\pi} \sqrt{6 \frac{(1 + \beta)}{\beta}} \quad (15)$$

con $\beta \neq 0$. Por otro lado, al derivar la Ec.14 respecto de r , y sustituyendo la Ec.15 se obtiene

$$\frac{\partial M(r, \beta)}{\partial r} = -4\varepsilon \frac{\sqrt{6(1 + \beta)}}{\beta} \left[3 + \beta - \frac{2}{\beta} \right], \quad (16)$$

misma que es diferente de cero.

Así, y de acuerdo al Teorema 2, finalmente se confirma la existencia de un ciclo límite asintóticamente estable descrito por un círculo de radio dado por la Ec.15, y en donde además las oscilaciones autosostenidas están condicionadas únicamente por el parámetro β .

Al considerar el caso particular $\beta = 4$, con ε pequeño menor a 1, el ciclo límite tiene un radio aproximado de $r = \sqrt{\frac{30}{\pi}}$. Si además, específicamente se seleccionan $\varepsilon = 0,5$, $\alpha = -0,3$ y $\gamma = 0,5$, para asegurar la existencia de los puntos de equilibrio acorde a los análisis del sistema Duffing, puede constatarse la existencia de un único ciclo límite estable centrado en el origen.

B. Tipos de Equilibrio y Estabilidad

Los tipos de equilibrio y estabilidad se obtienen de linealizar el sistema definido en la Ec.10, que al sustituir los tres puntos de equilibrio obtenidos de la Ec.3 en su respectivo jacobiano, se tienen

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & \varepsilon(\beta - 1) \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$J(\pm\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\alpha & \varepsilon(\beta \text{sinc}(\sqrt{-\alpha/\gamma}) - 1) \end{bmatrix}$$

Al calcular la traza τ y el determinante Δ para cada matriz jacobiana, se tiene

$$\tau = \varepsilon(\beta - 1), \Delta = \alpha \tag{18}$$

$$\tau = \varepsilon(\beta \text{sinc}(\sqrt{-\alpha/\gamma}) - 1), \Delta = -2\alpha$$

respectivamente.

Al considerar las restricciones a los que están sujetos los parámetros para cumplir con los teoremas de Liénard y Melnikov, los valores propios del sistema obtenidos a partir de la Ec.18, describen la siguiente dinámica [20]:

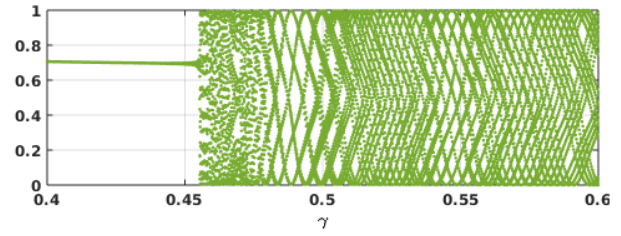
1. El punto $(0,0)$ corresponde a un nodo silla ya que sus valores propios ($\Delta = \alpha < 0$) son reales con signo opuesto.
2. Los puntos $(\pm\sqrt{-\alpha/\gamma}, 0)$, producen valores propios complejos conjugados lo que da lugar a centros estables cuando $\tau = 0$, o espirales inestables cuando τ es suficientemente pequeña y mayor a cero.

C. Análisis en Régimen Caótico

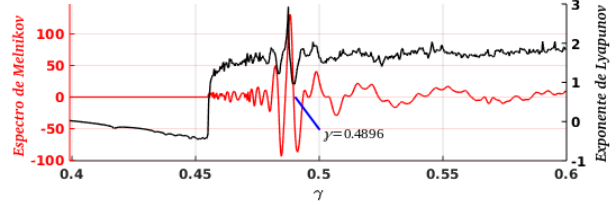
Para el análisis en régimen de caos, se emplea nuevamente la teoría de Melnikov y específicamente la Ec.13 utilizando ahora la familia de órbitas homoclinicas

$$\Gamma_r(t) = (\pm\sqrt{2}\text{sech}(t), \pm\sqrt{2}\text{sech}(t) \tanh(t)), \tag{19}$$

ya que facilitan el visualizar y localizar los puntos de equilibrio de manera más adecuada y práctica que la Ec.5. Por tanto, con esta familia de órbitas, la solución de la integral de Melnikov produce la condición general necesaria para la presencia de caos dependiente de su parámetro y que en este caso, se produce para $\beta \geq 1,1475$ [21]. De manera similar a la teoría de Lyapunov donde se obtienen los EL como un espectro en términos del parámetro de análisis, ahora bajo la teoría de Melnikov es necesario integrar iterativamente la Ec.13, lo



(a) DB numérica



(b) EL y EM

Fig. 3. Sensibilidad del sistema Sinc-Duffing no forzado a la variación del parámetro γ ($\beta = 4, \varepsilon = 0,5, \alpha = -0,3$).

que produce una secuencia que hemos denominado espectro de Melnikov (EM), el cual permite identificar las transiciones entre el estado caótico y periódico cuando varía el parámetro de interés μ .

El proceso iterativo de integración que se propone se realiza por el algoritmo descrito a continuación:

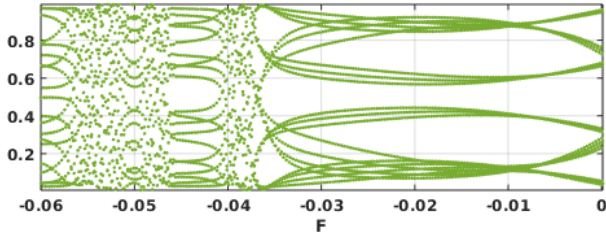
Algorithm 1 Implementación de EM

- 1: Definir condiciones iniciales en $(0,0)$
- 2: Definir el tiempo de integración a,b para la Ec.10
- 3: Definir el intervalo del parámetro de interés μ
- 4: **for** $i=1$ **to** longitud de μ **do**
- 5: $(x, y) =$ Solución de la Ec.10 en $\mu[i]$
- 6: **for** $j=1$ **to** longitud de (x, y) **do**
- 7: $m[j] = -\varepsilon y[j]^2 [1 - \beta \text{sinc}(x[j])]$
- 8: **end for**
- 9: $M[i] = \text{sum}(m)$
- 10: **end for**

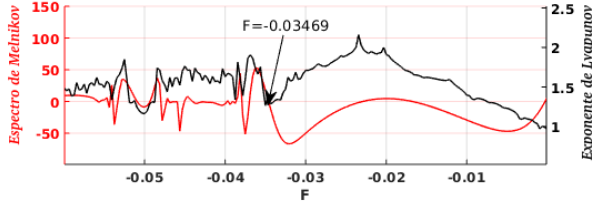
La Fig.3a es el DB que muestra las transiciones de estado del sistema cuando se varía el parámetro γ , manteniendo un estado periódico para $\gamma < 0,455$, e incrementando la dispersión de las secuencias para valores mayores, lo que indica de manera cualitativa una tendencia hacia el estado caótico. En la Fig.3b puede notarse cuantitativamente que EL conduce hacia el estado caótico conforme γ incrementa, pero no permite identificar eficazmente la frontera en donde esto sucede, dado que EL no cruza por el origen. En cambio, EM resalta los valores máximos y mínimos respecto del origen, es decir, en el estado crítico entre secuencias caóticas y periódicas, el caso más significativo sucede para el valor del parámetro en $\gamma \simeq 0,4896$ [22] [23].

D. Régimen de Intermittencia Caótica

Como fue visto en la sección B, el sistema produce una bifurcación del tipo nodo silla, este último es un mecanismo



(a) DB numérica



(b) EL y EM

Fig. 4. Sensibilidad del sistema Sinc-Duffing forzado a la variación del parámetro F ($\beta = 4, \varepsilon = 0,5, \alpha = -0,3, \gamma = 0,4896$).

que puede destruir o crear los puntos de equilibrio por medio de la variación de sus parámetros, produciendo lo que se denomina intermitencia de tipo I [24]. Para favorecer tal comportamiento, se requiere incluir en el sistema una función de forzamiento periódica del tipo $F \cos \omega t$ por lo que la Ec.10 queda [25], [26]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon[1 - \beta \text{sinc}(x_1)]x_2 - \alpha x_1 - \gamma x_1^3 + F \cos \omega t. \end{aligned} \quad (20)$$

Por lo tanto, se requiere utilizar nuevamente el método de búsqueda y sintonización para la amplitud de forzamiento F , bajo las siguientes consideraciones:

1. $\beta = 4$, de manera que se asegure el ciclo límite estable.
2. $\alpha = -0,3$ y $\varepsilon = 0,5$ que aseguran la aparición de órbitas homoclínicas.
3. $\gamma = 0,4896$ que corresponde a la frontera de la bifurcación entre el estado caótico y periódico mostrado en la Fig.3b para el caso no forzado.
4. Se modifica la línea 7 del Algoritmo 1 para incluir la función de forzamiento, es decir, $m[j] = -\varepsilon y[j]^2 [1 - \beta \text{sinc}(x[j])] + y[j] F \cos(\omega t[j])$.
5. Se obtienen DB, EL y EM, en términos de la amplitud F .
6. Se localiza el valor en la frontera entre trayectorias caóticas y periódicas, esto sucede en la Fig.4b cuando EM cruza el cero en $F \simeq -0,03469$, lo cual coincide con la intersección entre las regiones densas y suaves en DB de la Fig.4a.

Con lo anterior, el sistema se encuentra sintonizado en régimen de intermitencia quedando finalmente como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega[-0,5[1 - 4 \text{sinc}(x_1)]x_2 + 0,3x_1 \\ &\quad - 0,4896x_1^3 - 0,03469 \cos \omega \tau + s(\tau)], \end{aligned} \quad (21)$$

donde ω resulta del cambio de variable $t = \omega \tau$ tal como se realiza en [27].

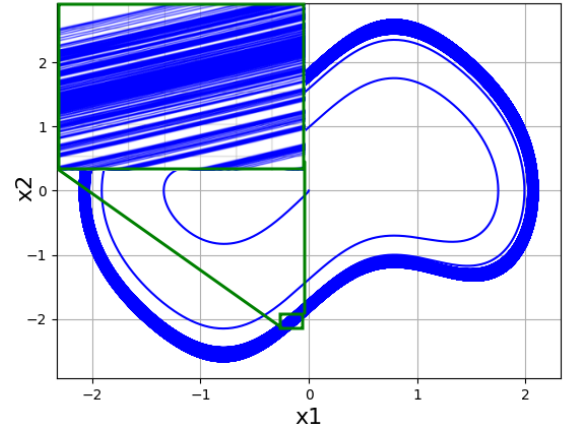


Fig. 5. Trayectorias intermitentes del sistema Sinc-Duffing.

Si por otro lado, se introdujera una señal de perturbación al sistema del tipo $s(\tau) = F_1 \cos \omega_1 \tau + \eta(\tau)$ de amplitud F_1 , frecuencia ω_1 y ruido blanco gaussiano $\eta(t)$, el sistema produce oscilaciones periódicas que se alternan con secuencias de caos. Tales cambios de estados son medibles, y ocurren con un periodo de intermitencia ΔT , el cual está directamente relacionado con la diferencia de frecuencias $\Delta \omega = |\omega_1 - \omega|$ entre la función de forzamiento y la señal de perturbación por lo que queda $\Delta T = 2\pi/\Delta \omega$. Por otro lado, la diferencia de amplitudes entre la función de forzamiento y la señal de perturbación periódica debe ser tal, que asegure los saltos entre estado caótico y periódico. Para un mejor entendimiento puede consultarse el trabajo de [13], donde se describe en forma fasorial tanto la diferencia de amplitudes F, F_1 como la de frecuencias. Un caso interesante de la presente investigación se considera para una perturbación de amplitud $F_1 = 0,02$, de modo que al obtener la solución de la Ec.21, el sistema produce las secuencias intermitentes de la Fig.5 y en donde, lo interesante se aprecia en su sección ampliada donde ocurren trayectorias que no convergen entre sí (por consecuencia son caóticas) coexistiendo en la vecindad de las oscilaciones autosostenibles del ciclo límite.

IV. DETECCIÓN DE SEÑALES DÉBILES

A. Método de Detección

Si bien las relaciones de frecuencia y amplitud vistas en la sección anterior aseguran el régimen de intermitencia, este no es lo suficientemente distinguible para medir los periodos intermitentes, por lo tanto, se requiere de un mecanismo eficiente que facilite la distinción entre estados caóticos y periódicos.

La Fig.6, muestra la descripción del sistema *Detector-Estimador de Frecuencia Estacionaria basado en la integral de Melnikov (DEFEM)*, el cual detecta una señal perturbación y permite estimar su frecuencia, esto gracias a que la integral de Melnikov proporciona la sensibilidad suficiente para distinguir los periodos de intermitencia. Las entradas al sistema que inician el proceso de detección son: una señal de perturbación contaminada de ruido y la frecuencia de la función de forzamiento. Luego, se obtiene la solución de la ecuación

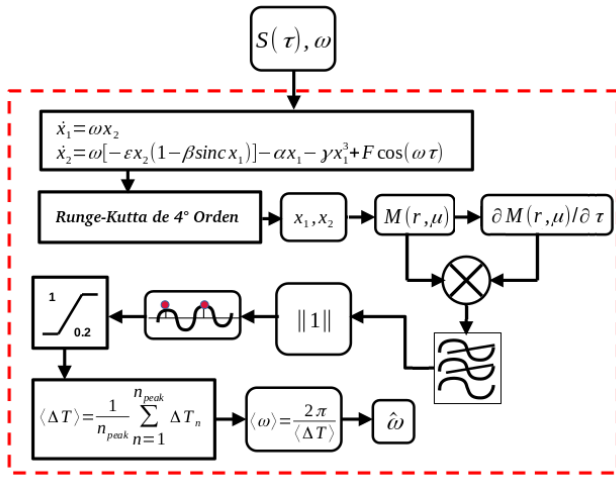


Fig. 6. Diagrama de bloques del DEFEM.

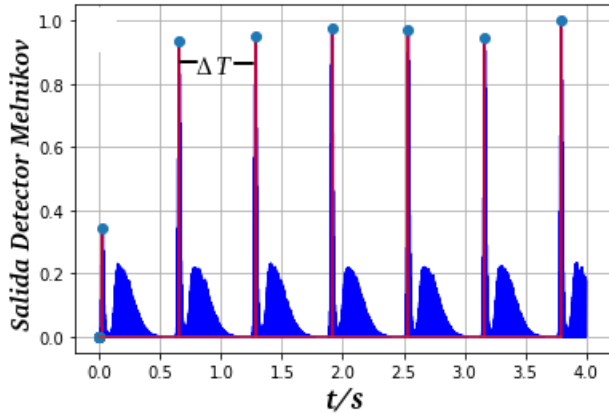


Fig. 7. Salida del DEFEM en régimen intermitente.

de Liènard mediante el método Runge-Kutta de 4º orden, lo que produce los correspondientes estados x_1, x_2 , después estos estados se sustituyen en la función de Melnikov $M(r, \mu)$ así como en su derivada $\partial M(r, \mu)/\partial t$, en este paso se omite el proceso de integración para ambos casos, y el resultado final será una secuencia producto de las dos funciones mencionadas a la salida de un proceso de normalización y filtrado, tal y como se muestra en la Fig.7. El trabajo de Bermudez del 2012 [28] menciona que para obtener el máximo de intermitencia con el oscilador Duffing, la diferencia de frecuencias entre la perturbación y la función de forzamiento debe establecerse en $\Delta\omega/\omega = 0,01$ y que bajo esa condición es posible la estimación de la frecuencia de la perturbación débil a través de la relación $\hat{\omega} = 2\pi/0,01\Delta T$ cuando estadísticamente se mide el periodo de intermitencia ΔT .

B. Experimentos

Para llevar a cabo el proceso computacional del DEFEM, se desarrollaron programas en lenguaje Python versión 3.7.3 sobre la plataforma Spyder 3, utilizando un equipo con CPU Corei5-8250U @1.60GHz, 8GB de RAM en un sistema GNU-Linux con distribución Debian 10.

El experimento computacional se inicia al obtener la solución de la ecuación diferencial, utilizando el método numérico Runge-Kutta de 4º orden de paso fijo temporal de $h = 10^{-5}s$, para un tiempo de integración de $t = 4s$ y frecuencia de forzamiento $\omega = 1000rad/s$ cuyo valor fue seleccionado también con fines de comparación con otros sistemas de detección.

Una vez obtenida la solución, se implementa el proceso DEFEM cuya salida produce una secuencia intermitente, y se procede a medir 15 periodos de intermitencia para una señal débil estacionaria de amplitud $F_1 = 0,02$. Esta señal es sometida a diversos niveles de ruido blanco gaussiano aditivo con varianza σ^2 y media cero para varias SNR dadas por $10 \log F_1^2/2\sigma^2 (dB)$.

Para evaluar el desempeño y fiabilidad de DEFEM, se realizan varios experimentos donde tan solo se procede a reemplazar el oscilador caótico propuesto Sinc-Duffing por otros osciladores caóticos que han sido ampliamente estudiados: Duffing y VDPD. Para que estos últimos osciladores operen en régimen de intermitencia, se usan los valores de parámetros descritos en [13], [25], [26].

C. Resultados y Discusión

Los resultados mostrados en la Fig.8 confirmaron que el sistema DEFEM puede soportar cualquier oscilador Liènard operando bajo caos-periodicidad, de modo que la detección de señales estacionarias se logra aun cuando existan condiciones de ruido severas. En esta misma figura es posible apreciar que el nuevo sistema Sinc-Duffing presenta una mayor sensibilidad, pues al tomar como referencia un error porcentual del 2%, el nuevo sistema detecta fluctuaciones periódicas para SNR de hasta -70 dB. En contraste, el oscilador Duffing alcanza este valor error en -45 dB, y aunque el sistema VDPD tolera ruido del orden de -50 dB, su error incrementa dramáticamente conforme el ruido crece.

Por otro lado, el procedimiento de búsqueda y sintonización de parámetros que se presenta en [29] utiliza DB y EL para identificar el estado crítico de cada parámetro del sistema. Sin embargo, DB permite solo una aproximación cualitativa de los cambios de estados en el sistema, por lo que se emplea alternativamente EL para obtener cuantitativamente la información de dichos estados de manera más precisa. Desafortunadamente, EL resulta sensible al tamaño de paso del parámetro incidiendo en la aproximación de la medición. Por el contrario, EM propuesto en el Algoritmo 1 del presente trabajo, mejora la aproximación de los parámetros, reduciendo tanto las iteraciones, el tiempo de ejecución, y la sensibilidad al tamaño de paso.

Respecto a los métodos de distinción de intermitencia caos y periodicidad, el trabajo de [30] presenta al método “STILE”, el cual produce una función cuasi continua que contiene los periodos de intermitencia necesaria para la estimación de la frecuencia de la señal. Si bien este método es bastante preciso y elimina máximos espurios debido al ruido, requiere de procedimientos iterativos para segmentar la señal bajo estudio en ventanas de corta duración, por lo que la resolución de la secuencia intermitente es dependiente del tamaño de ventana.

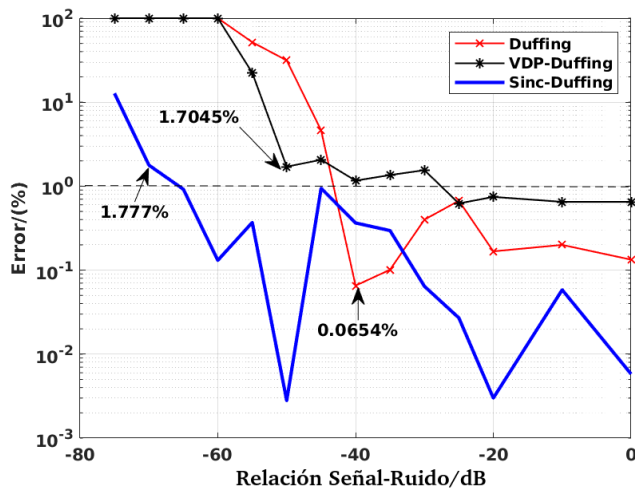


Fig. 8. Error relativo de detección vs SNR.

En cambio, el método DEFEM evita el uso de ventanas y reduce el número de iteraciones.

Como desventajas del sistema propuesto, al igual que otros sistemas basados en intermitencia, se pueden identificar i) la pérdida de resolución temporal debido a que el periodo ΔT es mucho mayor que el periodo de la frecuencia de la señal desconocida y ii) que la estimación de frecuencia se logra para una amplitud fija de la señal perturbadora, ya que de no ser así, la dinámica de intermitencia puede ceder y dificultar la medición; lo último lleva a pensar como trabajo futuro el establecer un mecanismo adaptativo que asegure la intermitencia aunque tal amplitud varíe.

V. CONCLUSIONES

Un nuevo sistema basado en el oscilador Duffing fue presentado. Los resultados analíticos y experimentales demostraron que mediante la selección adecuada de las funciones de amortiguamiento y restauración no lineal, obedeciendo tanto al teorema de Liénard como al Método de Melnikov, el sistema produce un ciclo límite asintóticamente estable, lo que produce oscilaciones autosustentadas. Además, a través de la combinación de DB, EL y EM, fue posible la sintonización adecuada de parámetros para conducir al sistema hacia el régimen de intermitencia. Con este mecanismo se presentó un caso práctico de detección de señales estacionarias mediante un nuevo método basado en funciones de Melnikov, el DEFEM, el cual permitió identificar de manera eficiente el ciclo límite de intermitencia. Al comparar con otros sistemas caóticos y utilizando DEFEM, el nuevo sistema Sinc-Duffing demostró una mayor sensibilidad para la estimación de la frecuencia de una señal débil estacionaria con relación señal ruido de -70 dB.

En trabajos futuros, se investigarán y extenderán los conceptos para sistemas de orden superior, y su aplicación en detección no estacionaria, para el tratamiento de señales Doppler, radar, sonar, comunicaciones, entre otras.

AGRADECIMIENTOS

Pedro Pancóatl-Bortolotti agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT por su beca de Doctorado CVU: 331405.

REFERENCIAS

- [1] M. K. J S Armand Eyebe Fouda, J Yves Effa, "The three-state test for chaos detection in discrete maps. applied soft computing journal," *Applied Soft Computing*, vol. 13, no. 1, pp. 4731–4737, 2013.
- [2] A. A.-H. E. Zambrano-Serrano, "A novel antimonotonic hyperjerk system: Analysis, synchronization and circuit design," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 424, 2021.
- [3] X. G. D. Chen, S. Shi, "Weak signal frequency detection using chaos theory: A comprehensive analysis," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 70, p. 8950–8963, 2021.
- [4] S. P. D.L. Birx, "Chaotic oscillators and complex mapping feed forward networks (cmffns) for signal detection in noisy environments," 1992.
- [5] J. L. Guanyu Wang, Dajun Chen, "The application of chaotic oscillators to weak signal detection," *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 61, pp. 440–444, 1999.
- [6] R. Z. Yanhua Wu, "Analysis of internal frequency's influence on blind detection weak psk signal by using duffing oscillator," 2017.
- [7] H. Y. B.L. Jian, X.Y. Su, "Bearing fault diagnosis based on chaotic dynamic errors in key components," *IEEE Access*, vol. 9, p. 53509–53517, 2021.
- [8] V. M. V. Gupta, M. Mittal, "Chaos theory and artifa: Emerging tools for interpreting ecg signals to diagnose cardiac arrhythmias," *Wireless Personal Communications*, vol. 118, p. 3615–3646, 2021.
- [9] H. Y. G. Li, Y. Hou, "A new duffing detection method for underwater weak target signal," *Alexandria Engineering Journal*, vol. 61, p. 2859–2876, 2022.
- [10] P. M. J.S. Muthu, "Review of chaos detection techniques performed on chaotic maps and systems in image encryption," *SN Computer Science*, vol. 2, 2021.
- [11] E. C. R.J. Escalante-González, "Emergence of hidden attractors through the rupture of heteroclinic-like orbits of switched systems with self-excited attractors," *Complexity*, pp. 1–24, 2021.
- [12] M. B. I. Kovacic, *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. John Wiley and Sons, 2011.
- [13] T.L.Lou, "Frequency estimation for weak signals based on chaos theory," pp. 361–364, IEEE, 2008.
- [14] L. T. M. Richardson, "A sinc function analogue of chebfun," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 33, no. 5, pp. 2519–2535, 2011.
- [15] J. Giné, "Center conditions for polynomial liénard systems," *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 16, no. 11, pp. 119–126, 2017.
- [16] B. J. M. Sinha, F. Dorfler, "Synchronization of liénard-type oscillators in uniform electrical networks," *2016 American Control Conference (ACC)*, pp. 4311–4316, 2016.
- [17] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.
- [18] S. Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Python. In Dynamical Systems with Applications using Python*. No. 1, Springer International Publishing AG, 2018.
- [19] M. M. J Awrejcewicz and Holicke, "Smooth and non-smooth high dimensional chaos and melnikov type methods," *Journal of Vibration and Control*, no. 1, p. 318, 2007.
- [20] S. Strogatz, *ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system*, vol. 2. CRC Press, 2015.
- [21] P. W. M. Siewe, C. Tchawoua, "Melnikov chaos in a periodically driven rayleigh-duffing oscillator," *Mechanics Research Communications*, vol. 37, no. 4, pp. 363–368, 2010.
- [22] Z. Y. F. Cheng, "A new method to determine the bifurcation threshold value of the duffing chaos detection system," pp. 1143–1146, IEEE, 2012.
- [23] Q. D. C.Wang, C. Fan, "Constructing discrete chaotic systems with positive lyapunov exponents," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 28, no. 7, p. 1850084, 2018.
- [24] M. L. A. Venkatesan, "Bifurcation and chaos in the double-well duffing-van der pol oscillator: Numerical and analytical studies," *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, vol. 56, no. 6, pp. 6321–6330, 1997.
- [25] B. Y. H.H. Peng, X.M. Xu, "Implication of two-coupled differential van der pol duffing oscillator in weak signal detection," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 85, no. 4, pp. 1–8, 2016.

- [26] Y. S. Z.Zhihong, "Application of van der pol–duffing oscillator in weak signal detection," *Computers & Electrical Engineering*, vol. 41, pp. 1–8, 2015.
- [27] Y. L. Y. Xie, T. Lin, "Weak signal frequency detection based on intermittent chaos," 2014.
- [28] J. M.-C. C. Bermúdez-Gómez, R. Enriquez-Caldera, "Chirp signal detection using the duffing oscillator," pp. 344–349, IEEE, 2012.
- [29] R.-C. P. Pancóatl-Bortolotti, A. Costa, "A novel chaotic system based on binomial functions for detection of ultra weak signals," pp. 102–107, 2021.
- [30] R.-C. P. Pancóatl-Bortolotti, A. Costa, "Design and analysis of a new chaotic system inspired on duffing," pp. 160–165, 2021.



Maribel Tello-Bello Obtuvo el grado de Doctorado en Electrónica por el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE) en 2016. Desde 1998 al 2014 fue profesora e investigadora por el Instituto de Ingeniería de Cómputo y Electrónica de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, en Oaxaca, México. Obtuvo el grado de Maestra en Ciencias por el (INAOE) en 1998, y el Título de Ingeniera Electrónica por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP) en 1994.



caóticos.

Pedro Pancóatl-Bortolotti Recibió el grado de Ingeniero en Electrónica por el Instituto Tecnológico de Puebla en 2007, el grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Telecomunicaciones, por el Instituto Politécnico Nacional en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME) Zacatenco en 2011. Actualmente, es estudiante de Doctorado en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla México (INAOE). Sus principales líneas de investigación de interés son la instrumentación, comunicaciones y diseño de sistemas no lineales y



Rogerio A. Enríquez-Caldera Recibió el grado de Maestro en Ciencias en la Universidad of Brunswick en 1990, y Doctorado en 1994 en la Universidad of Brunswick con el título de tesis: 'Costas Tanlock Loop with an adaptive filter for detection of Doppler shifted Signals'. Actualmente, es profesor investigador y representante docente en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla México. Sus recientes líneas de investigación son procesamiento GPS, instrumentación astronómica, simulación y modelado de sistemas de navegación.



Antonio H. Costa Recibió el grado de Doctor en Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Rhode Island, Kingston RI, en 1994. Y obtuvo el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Eléctrica y Licenciado en Ingeniería Eléctrica, Ingeniería de Computación, Ciencias Computacionales, y Matemáticas, por la Universidad de Dartmouth en 1985 y 1983 respectivamente. Sus principales líneas de investigación son procesamiento de señales e imágenes, procesamiento invariante en el tiempo y métodos de tiempo-frecuencia.



Universidad Autónoma de Puebla. Sus principales líneas de interés son sistemas de Control y potencia, y su investigación se centra en modelado, estimación y control no lineal en sistemas ciber físicos.

José Fermi Guerrero-Castellanos Recibió el grado de Licenciado en Electrónica por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México en 2002. Obtuvo el grado de Maestro en Ciencias y Doctorado en control automático por el Instituto de Tecnología de Grenoble y la Universidad Joseph Fourier, en Grenoble, Francia, en 2004 y 2008, respectivamente. En 2008, realizó su investigación Postdoctoral en Laboratorio GIPSA-Lab, en Grenoble Francia. Recientemente, es Profesor e investigador en la facultad de Electrónica de la Benemérita