

# Optimal Distribution Transformer Placement by Exploiting Graph Theory and Clustering Techniques

Darwin E. Vincent and Paul F. Vasquez, *Senior Member, IEEE*

**Abstract**— In the expansion of power distribution networks, the periodic task of determining the location, number, and capacity of the distribution transformers is still an open issue that needs to be systematically coped with. In this paper, a comprehensive approach for solving in practice the mentioned task is presented. The proposed methodology is based on an improved clustering technique, which considers not only the actual distances between consumers but also their electrical demand. Graph theory is exploited to represent the feasible paths of the complete system, so that, the distances and the obtained locations are accurate, and feasible in practice, respectively. The proposed objective function minimizes the total annual costs of the system, by considering investments, transformer losses, and operational costs. An approximate expression to calculate the maximum distance between each transformer and its furthest customer to accomplish voltage regulation has been obtained. Consequently, the outputs of the proposed model are the correct number of distribution transformers to be installed, their optimal locations and capacities, and the best consumer grouping with acceptable voltage drops. In order to validate the proposal, this methodology is applied to an urban system with 106 consumers, 23 vertices, and 31 streets with promising results.

**Index Terms**—Clustering, graph theory, optimal placement, optimization, power distribution planning, transformers.

## I. NOMENCLATURA

$\cos\varphi$ :	Factor de potencia en el lado de la fuente
$c_j$ :	Posición del transformador del grupo $G_j$
$d_{máx_i}$ :	Distancia máxima permitida entre el transformador $i$ y su usuario más lejano en m para cumplir con la regulación de voltaje
$d_{usu_{tr_i}}$ :	Distancia sujeta a la representación vial entre el transformador de posición $c_i$ y su usuario más alejado, de posición $ul_i$ , en metros.
$dist$ :	Distancia entre dos puntos considerando la representación vial, en [m]
$DMU_j$ :	Demanda máxima en kVA del consumidor $j$
$DMU_{x_i}$ :	Demanda máxima unitaria del consumidor de posición $x_i$ , en kVA
$F$ :	Valor al que tiende la asíntota de la curva del factor de coincidencia
$F_a$ :	Factor de amortización
$F_{coin_i}$ :	Factor de coincidencia del grupo $i$

$k$ :	Número de grupos, en unidades
$k_{ini}$ :	Valor inicial del número de grupos
$M$ :	Metodología
$MP$ :	Metodología propuesta
$r_u$ :	Resistencia unitaria del conductor en $\Omega/km$
$reg$ :	Regulación o caída máxima de voltaje
$S_g$ :	Conjunto de coordenadas de los vértices extremos de las aristas del grafo $G$
$S$ :	Potencia aparente suministrada en el extremo de envío en kVA
$SME$ :	Suma del producto cuadrático de los momentos de demanda eléctrica del sistema completo
$S_i$ :	Potencia de diseño encontrada para transformador $i$ en kVA
$S_{total}$ :	Carga total del sistema analizado en kVA
$S_{tri_i}$ :	Potencia nominal en kVA del transformador seleccionado para un grupo $i$
$S_{tr_{máx}}$ :	Capacidad nominal del transformador más grande disponible en kVA
$T$ :	Conjuntos de coordenadas de los vértices extremos de las aristas del grafo $G$
$TD$ :	Conjunto de capacidades nominales de los transformadores disponibles para la instalación en kVA
$TDs$ :	Transformadores de distribución
$u_i$ :	Número de consumidores del grupo $i$
$V_e$ :	Voltaje de línea de envío en el lado de la fuente en V
$w$ :	Conjunto de distancias entre vértices del grafo en metros

## II. INTRODUCCIÓN

Los objetivos principales en la planificación de sistemas eléctricos de distribución es la reducción de pérdidas y la minimización de los costos totales del sistema [1]. La ubicación de los transformadores de distribución, de forma que se minimice el recorrido de los circuitos secundarios, es crucial para la reducción los costos de inversión, de pérdidas, y, en general, del sistema, pues la infraestructura de este tipo de redes es bastante extensa. Las compañías eléctricas encargadas de la distribución generalmente no cuentan con métodos de optimización para resolver el problema de ubicación, número y capacidad de los transformadores de distribución [2]. Tal es el

caso del medio ecuatoriano, en el cual, aún no se toman en cuenta algoritmos de optimización en la planificación de las redes de distribución, sino que más bien se cuentan con normas que establecen procedimientos básicos, los cuales se limitan a cumplir con restricciones técnicas de caídas de voltaje y límite de pérdidas [3]. De ahí que las soluciones propuestas, al no minimizar los costos totales, pueden incurrir en sobredimensionamientos del número y capacidad de los transformadores o en aumentos innecesarios de las pérdidas al no considerar criterios de optimización ni en la agrupación de los usuarios ni en la ubicación de sus respectivos transformadores [4].

En consecuencia, se hace necesario incorporar estudios de optimización en la planificación de redes eléctricas de distribución para determinar la ubicación óptima de los transformadores que será de gran ayuda para obtener una reducción de pérdidas y una disminución de los costos asociados a la inversión de la red de distribución, puesto que al ubicar los transformadores del sistema de manera óptima, la longitud de las redes hacia los usuarios finales se verá reducida y, consecuentemente, las pérdidas también serán menores [5].

Para este propósito, varios autores plantean el uso de diferentes modelos matemáticos aplicando métodos de partición como k-means y k-medoids [6]-[7]. Sin embargo, una de las desventajas de estos algoritmos es que la distancia que se utiliza para la agrupación es bastante teórica, pudiendo ésta ser la distancia euclidiana a campo traviesa, o la distancia de la geometría del taxista [8], que considera únicamente distancias horizontales y verticales.

Otro acercamiento para la ubicación de transformadores se realiza por medio del algoritmo de enjambre de partículas (PSO, por sus siglas en inglés) [9]. No obstante, una clara limitación consiste en que el espacio de búsqueda es bastante limitado. En efecto, se conoce de antemano un reducido número de nodos del sistema como posibles ubicaciones de los transformadores de distribución; además, las distancias son nuevamente ortogonales. Esto provoca que no exista propiamente optimización en todo el sentido de la palabra, pues se descarta inicialmente un gran número de posibles ubicaciones, al tener una lista discreta.

En [10] se muestra un análisis con una lista discreta con un mayor número de alternativas de solución mediante el algoritmo de P-mediana para ubicar los transformadores de distribución y mediante el algoritmo de búsqueda de colonia de hormigas se mejora la solución. Sin embargo, tal análisis no considera la carga de los usuarios para su agrupación, sino únicamente distancias.

Otros autores han utilizado métodos basados en varios algoritmos como el algoritmo polinización de flores [11], algoritmos genéticos [12]-[13], programación entera [14], búsqueda tabú [15], y métodos heurísticos [16]. Estas propuestas han sido utilizadas en escenarios específicos, pero se encuentran limitadas por las características particulares de sus sistemas de aplicación.

TABLA I  
COMPARACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS REFERENCIADAS VS LA  
METODOLOGÍA PROPUESTA EN ESTE TRABAJO

Metodologías utilizadas	Características
Algoritmo de polinización de flores	Se necesita como dato de entrada una lista discreta de posibles ubicaciones de los TDs. Dentro de esta limitada lista de opciones se buscan las mejores ubicaciones de los transformadores de distribución [11].
M. propuesta	No se discretizan las posibles ubicaciones de los transformadores de distribución, sino que se toman en cuenta inicialmente, todos los puntos de coordenadas $(x, y)$ del área de análisis como una posible solución
Algoritmos genéticos	Se realizan aproximaciones utópicas que consideran calles siempre paralelas y perpendiculares entre sí [12], o bien se utilizan distancias euclidianas a campo traviesa, escenario poco real, con respecto al recorrido de las líneas de distribución [13].
M. Propuesta	Se omiten simplificaciones demasiado grandes, como representar toda un área con un solo punto, y además se consideran distancias reales que consideren el recorrido vial, por el cual se pueden instalar postes y tener tendido eléctrico de distribución.
Programación entera [14]	Mediante optimización lineal se busca dentro de una lista discreta de posibles nodos para la ubicación de TDs, aquellas alternativas que minimicen el costo total. Además, se realizan flujos de potencia en cada iteración.
M. propuesta	Las posibles ubicaciones del TDs de cada grupo de consumidores no se limita a una lista discreta, sino que se considera toda el área de estudio. Adicionalmente, no se requiere del cálculo de flujos de potencia de redes secundarias, pero sí se garantiza no exceder el valor máximo de la caída de voltaje.
Búsqueda tabú [15]	Se trata de una reagrupación de usuarios, previamente obtenida por un método de partición. Tal proceso corresponde a una segunda etapa para lograr una agrupación de consumidores a transformadores de distribución
M. propuesta	La agrupación no se divide en etapas para no alterar las iteraciones de optimización; es decir, se realizan ciclos iterativos hasta buscar la solución óptima, sin necesidad de multietapas.
Métodos heurísticos	Utiliza un método de partición clásico como k-means considerando distancias euclidianas para la agrupación de consumidores, el cual arroja un centroide en donde se coloca el transformador de distribución para cada grupo. No toma en cuenta la carga eléctrica al momento de realizar la partición [16].
M. propuesta	La función objetivo del algoritmo de agrupación propuesto está definida por momentos reales de demanda eléctrica, en lugar de únicamente por distancias euclidianas, en contraste a lo que hace el algoritmo k-means tradicional

Debido a que el problema de la planificación óptima de redes de distribución es bastante complejo por su elevado número de variables y combinaciones, se puede abordar desde dos etapas [17]. En primer lugar, se determina la ubicación de los transformadores para luego encontrar el recorrido del circuito secundario. Cada etapa representa un problema complejo.

El presente trabajo se enfoca en determinar la ubicación, número y capacidad óptima de los transformadores de distribución de un sistema a partir de un sofisticado agrupamiento de los consumidores del mismo. Tal agrupación considera momentos de demanda eléctrica; es decir, tanto distancias como cargas eléctricas, en donde se minimizan los costos de inversión del sistema cumpliendo con un valor de caída de voltaje que cumpla con lo que establecen de las normas y no buscar minimizarla [18], pues se puede incurrir en costos innecesarios.

### III. CONTRIBUCIONES

Las compañías eléctricas encargadas de la distribución generalmente no cuentan con métodos de optimización para resolver el problema de ubicación, número y capacidad de los transformadores de distribución [3]. En este trabajo se brinda una solución a esta problemática a fin de cumplir restricciones técnicas al menor costo.

Para ello se ha implementado un método de agrupación para asociar los consumidores a un transformador determinado, utilizando una técnica derivada del algoritmo k-means, con la diferencia que, mediante el empleo de la teoría de grafos, en lugar de distancias euclidianas se aplican distancias que simulan el recorrido real de las redes sobre las calles existentes de la zona bajo estudio. Como resultado de esta modelación, el diseño evita el paso de redes eléctricas a través de restricciones físicas, o zonas prohibidas como propiedad privada, es decir es un diseño ajustado a la realidad, lo cual muchos otros modelos adolecen.

Este algoritmo de agrupación óptima de usuarios minimiza la sumatoria de los momentos de demanda de los usuarios de cada grupo, a diferencia de los métodos tradicionales que omiten la carga eléctrica y consideran distancias únicamente.

La metodología propuesta no requiere el cálculo de flujos de potencia de las redes secundarias; no obstante, garantiza que no se viole la restricción de máxima caída de voltaje.

### IV. METODOLOGÍA PROPUESTA

La metodología propuesta ha sido desarrollada para trabajar con nuevas redes de distribución radiales. Cada transformador será ubicado en el centro de demanda eléctrica de un grupo de clientes. La distancia de cada cliente a su transformador se calcula respetando las restricciones físicas; es decir, evitando cruces por calles, parques, lagos, montañas, etc.

Los datos de entrada son la posición de los consumidores mediante sus coordenadas cartesianas, y la demanda de los mismos.

Las variables de decisión son: el número de transformadores de distribución a ser instalados, sus capacidades nominales en kVA y sus ubicaciones.

Se formula una restricción que determina la máxima distancia aproximada que puede existir entre un transformador de distribución y su usuario más alejado, el cual constituye el peor escenario para evitar una excesiva caída de voltaje [19].

La metodología propuesta busca minimizar los costos de inversión, operación y mantenimiento y nuevos tramos de red primaria para una red de distribución.

La Fig. 1 muestra el diagrama del algoritmo de optimización de ubicación y número de transformadores de distribución del sistema. Se ingresa como datos de entrada las coordenadas de los usuarios, su demanda, todos los vértices de calles de los sistemas, considerando cada esquina como un punto y cada tramo de calle como un segmento de recta. Además, en cuanto a los insumos, se dispone de las capacidades disponibles de los transformadores en kVA, los costos de energía y demanda.

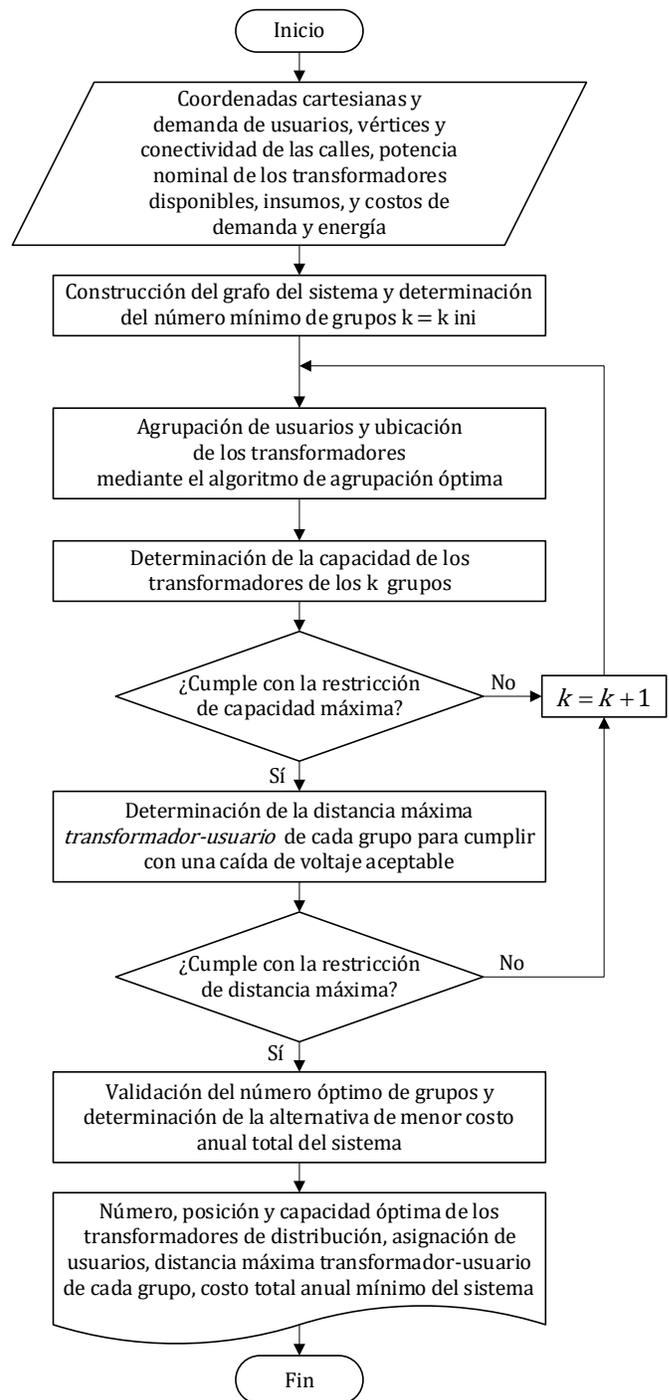


Fig. 1. Diagrama de flujo de la metodología propuesta.

El número final de grupos se determina como el menor número posible de transformadores de distribución que sean capaces abastecer al sistema y que, a la par, cumplan con las restricciones de capacidad disponible y caída máxima de voltaje de la red secundaria en cada grupo. Para determinar esta cantidad se realizan varias iteraciones, empezando por una primera iteración del algoritmo de agrupación con  $k = k_{ini}$ , donde  $k_{ini}$  será el número inicial de grupos. Luego, si se viola alguna de las restricciones mencionadas anteriormente, se realiza una nueva iteración con el valor de  $k$  aumentado en una

unidad; esto se repite hasta que se cumplan todas las restricciones.

Se podría iniciar con un valor  $k_{ini} = 1$ ; sin embargo, esto incrementa innecesariamente el espacio de búsqueda, por tanto, para reducirlo y mejorar el tiempo computacional, el valor inicial mínimo de grupos se calcula en función de la capacidad máxima de los transformadores disponibles como se muestra en la ecuación (1); donde  $S_{total}$  y  $S_{tr,m\acute{a}x}$  son la carga total del sistema analizado y la capacidad nominal del transformador más grande disponible, respectivamente, ambas expresadas en unidades de kVA.

$$k_{ini} = \frac{S_{total}}{S_{tr,m\acute{a}x}} \quad (1)$$

Además, se calcula el valor de las distancias de todos los puntos del sistema entre sí, tomando en cuenta la topología vial. Estos datos se almacenan en una matriz de distancias. Con el número  $k$  inicial y con las distancias que respetan la topología del sistema, se realiza una primera agrupación que optimiza el número de transformadores y su capacidad. Luego, se verifica que se cumplan con las condiciones de potencia máxima de los TDs disponibles caída máxima de voltaje. Es decir, si la potencia que un TDs necesita para abastecer a un grupo de consumidores o si se obtiene una caída de voltaje muy grande, la agrupación es invalidada y se realiza una nueva para un  $k$  mayor en una unidad, tomando en cuenta nuevamente todos los puntos del sistema. Finalmente, se verifica la alternativa que, de acuerdo los resultados obtenidos de número, capacidad y ubicación de TDs, permita generar el menor costo total anual del sistema.

## V. ETAPA PRELIMINAR

### A. Construcción del Grafo del Sistema

El modelo desarrollado requiere la posición de los consumidores en el plano y la demanda de los mismos como datos de entrada. La información de las coordenadas de cada consumidor puede ser levantada en campo o tomadas del sistema de información geográfica (SIG) de la correspondiente empresa distribuidora de energía eléctrica.

Sin embargo, para lograr una agrupación práctica, ligada a la realidad no basta con contar únicamente con la posición de los usuarios. En efecto, usuarios que se encuentran cercanos entre sí, de acuerdo a distancias solamente, podrían estar separados por restricciones físicas como lagos, ríos, monumentos, parques etc., las cuales impedirían la conexión directa entre tales usuarios. Por lo tanto, se debe contar también con información de la conectividad vial. Para esto, en primer lugar, se propone una representación de la topología vial con segmentos de recta. De esta manera, la conexión de las calles, sus vértices extremos y las restricciones físicas son almacenados en una base de datos. Al trabajar con la representación vial no se invade propiedad privada o zonas no permitidas como redondeles, lagos o edificaciones puesto que los tramos de calles limitan el recorrido de las redes eléctricas y postes precisamente a la topología vial existente.

Utilizando la teoría de grafos, se representa al sistema

estudiado como un grafo no orientado, simple que presenta pesos; es decir, no se considera direccionalidad, pero sí las distancias entre nodos, como se representa en la expresión (2); donde  $S_g$  y  $T$  son los conjuntos de coordenadas de los vértices extremos de las aristas del grafo  $G$  y  $w$  es el conjunto de distancias entre los vértices en metros; es decir, contiene la longitud de las aristas.

$$G = (S_g, T, w) \quad (2)$$

Los nodos o vértices del grafo corresponden a la ubicación de los consumidores y a los vértices de las calles. La conectividad de las aristas se determina utilizando la información de conectividad de los vértices del sistema y se representa con la lista de adyacencias con pesos del grafo.

Por otro lado, los pesos del grafo representan las distancias existentes entre cada par nodos conectados con una arista. Adicionalmente, se define en este trabajo como un camino factible entre dos nodos a aquel que conecta aquellos dos nodos respetando la conectividad del grafo. La Fig. 2 muestra la representación de la topología vial del sistema de prueba utilizado en este trabajo.

La ubicación de cada usuario se representa inicialmente como un único punto dentro de su propiedad, cuya cercanía a cualquier calle dependerá de la precisión de la información brindada. Generalmente, las posiciones de los usuarios tomadas de la base de datos de entrada no recaen directamente sobre los segmentos de recta que representan las calles. Por lo tanto, se asigna cada usuario sobre el tramo de calle más cercano, siempre que no exista ningún impedimento físico.

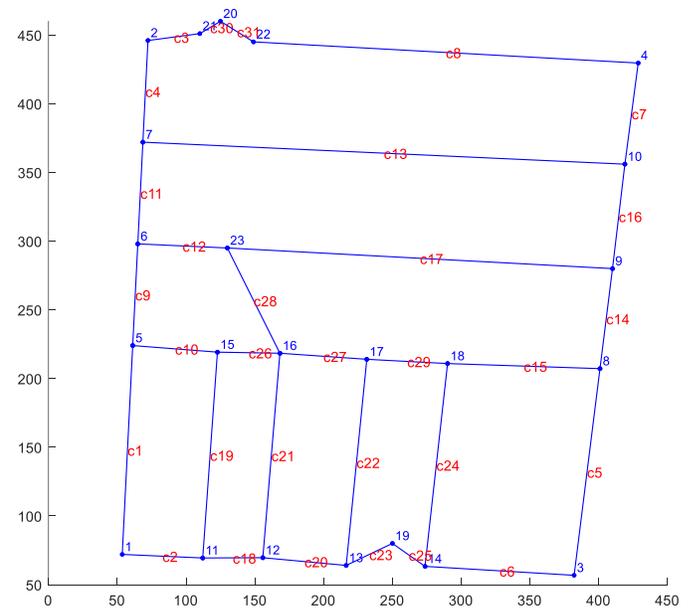


Fig. 2. Representación de la topología vial del sistema de prueba con segmentos de recta para cada tramo de calle.

Después se actualiza la ubicación de los usuarios proyectando su posición cartesiana sobre el tramo de calle asignado. Para esto, se calculan las pendientes de todos los segmentos de recta que conforman el sistema y se resuelve un sistema de ecuaciones lineales, cuyos resultados arrojan la posición en coordenadas cartesianas de los usuarios, esta vez restringidas a

la red vial, pues cumplen con la ecuación de su recta respectiva. Estas posiciones actualizadas serán las definitivas, utilizadas para el análisis de las etapas posteriores. Tales posiciones representan las coordenadas donde se ubicarán los contadores de energía; por lo cual, tiene sentido práctico que se encuentren directamente sobre la calle y no metros adentro de una propiedad [5].

En caso de que las coordenadas de los usuarios estén directamente sobre los segmentos de recta que representan las calles (caso ideal), no es necesario realizar esta determinación.

La Fig. 3 muestra de manera gráfica la actualización de la posición definitiva de los usuarios del sistema analizado a partir de datos iniciales.

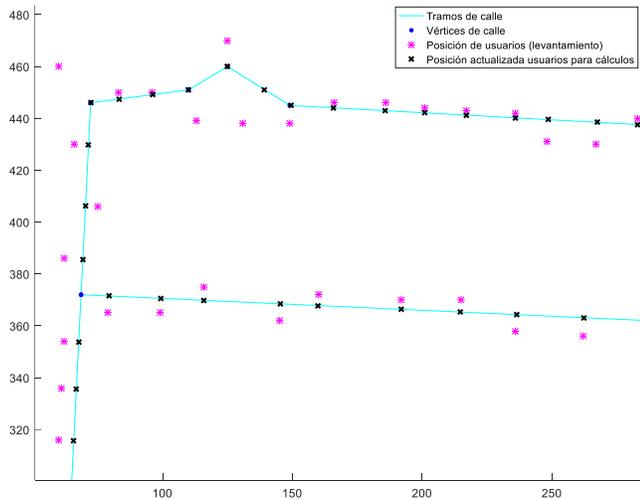


Fig. 3. Actualización de la posición de los usuarios sobre su segmento de calle más cercano.

La tradicional distancia euclidiana aplicada a la problemática de este trabajo simularía una conexión de los usuarios a campo traviesa, lo cual no es práctico ni se acerca a la realidad en redes secundarias de distribución, ya que no se consideran ciertas restricciones importantes como, por ejemplo, que la red de bajo voltaje no deberá atravesar la infraestructura existente, ni deberá invadir propiedad privada.

En este trabajo se calcularon las distancias,  $dist$ , las cuales se sujetan a las rutas existentes dentro del grafo de la representación vial. Esta distancia resulta de aplicar el concepto de la ruta más corta a través del algoritmo de búsqueda en anchura o BFS por sus siglas en inglés (*Breadth-first search*) [20]. De esta manera se obtiene una matriz cuadrada  $n \times n$  que contiene las distancias mínimas factibles entre todos los nodos del grafo del sistema, siendo  $n$  el número de nodos. Por lo tanto, se determina la distancia entre cualquier par de nodos  $i$  y  $j$ , encontrando el valor del elemento  $ij$  de la matriz.

Esta distancia,  $dist$ , se emplea tanto en el algoritmo de agrupación de los usuarios como para determinar el usuario más alejado al transformador de cada grupo respectivo.

## VI. AGRUPACIÓN DE USUARIOS Y UBICACIÓN DE LOS TRANSFORMADORES

El algoritmo de optimización para la agrupación toma como premisa que a cada grupo de usuarios le corresponderá uno y

solo un transformador asociado. Además, el modelo propuesto contempla el momento eléctrico de demanda; es decir, además de considerar las distancias entre los usuarios y los transformadores, considera también la demanda de los usuarios del sistema analizado. En consecuencia, para realizar una agrupación óptima se minimiza la ecuación (3).

$$SME = \sum_{j=1}^k \sum_{x_i \in G_j} [DMU_{x_i} \cdot dist(x_i, c_j)] \quad (3)$$

La ecuación (3) corresponde a la suma del producto cuadrático de los momentos de demanda eléctrica del sistema completo,  $SME$ ; donde  $DMU_{x_i}$  es la demanda máxima unitaria en kVA del consumidor de posición  $x_i$ ,  $dist$  la distancia en metros entre dos puntos del sistema respetando la representación vial,  $c_j$  la posición del transformador del grupo  $G_j$ , y  $k$  el número total de grupos.

La agrupación óptima se realiza para un número determinado,  $k$ , de transformadores. El algoritmo de agrupación se desarrolla de la siguiente manera:

- 1) Se escoge arbitrariamente dentro de la representación vial la posición de  $k$  puntos, los cuales simulan la posición de los transformadores de distribución para el análisis.
- 2) Se calcula el producto cuadrático entre las distancias desde los  $k$  transformadores hacia los  $n$  consumidores del sistema, y la demanda correspondiente. De acuerdo con los valores obtenidos, cada consumidor es asignado al centro que produce el menor valor, formando así  $k$  grupos.
- 3) Se encuentra el valor de la suma total del producto cuadrático de los momentos eléctricos del sistema empleando la ecuación (3).
- 4) Se actualiza la posición de los  $k$  transformadores, buscando que el valor de la  $SME$  disminuya. Luego, se repiten los pasos 2 y 3.
- 5) Cuando el valor de la  $SME$  disminuye con respecto a la iteración anterior se actualiza la agrupación de los usuarios del sistema.
- 6) Se repiten los pasos 4 y 5 hasta encontrar la ubicación de los transformadores que no pueda disminuir el valor actual de la  $SME$  o hasta alcanzar un criterio de convergencia de  $10^{-7}$ .

## VII. DETERMINACIÓN DE LA CAPACIDAD DE LOS TRANSFORMADORES Y RESTRICCIONES

### A. Determinación de Capacidad de los Transformadores de los $k$ Grupos

Una vez obtenida la agrupación óptima de los usuarios del sistema en función del número de grupos, así como la ubicación óptima de los transformadores de distribución, se determina la capacidad del transformador de cada grupo mediante la ecuación (4), tomando en cuenta la respectiva coincidencia.

$$S_i = \sum_{j=1}^{u_i} DMU_j \cdot F_{coini} \quad (4)$$

La ecuación (4) muestra la potencia de diseño en kVA del transformador del grupo  $i$ ; donde  $DMU_j$  es la demanda máxima

unitaria en kVA del consumidor  $j$ ,  $F_{coini}$  el factor de coincidencia del grupo  $i$ , y  $u_i$  el número de consumidores del grupo  $i$ .

El factor de coincidencia del grupo  $i$  en función del número de usuarios se determina empleando la ecuación (5), la cual proviene de un modelo probabilista [20]; donde  $u_i$  es el factor de utilización del grupo  $i$ , mientras que  $F$  corresponde al valor de la asíntota a la que tiende la curva del factor de coincidencia. Su valor generalmente oscila entre 0.25 y 0.75, en función del tipo de carga: residencial, comercial, industrial [21]. Debido al tipo de carga del sistema de prueba, principalmente residencial, se trabaja con un valor de  $F = 0.35$ .

$$F_{coini} = F + (1 - F) \frac{1}{u_i} \quad (5)$$

$$S_{tri} = \min (x \in TD | x \leq S_i) \quad (6)$$

Por otro lado, empleando la expresión (6) se puede determinar la potencia nominal en kVA del transformador seleccionado para un grupo  $i$ ,  $S_{tri}$ , donde  $S_i$  es el valor en kVA de la potencia de diseño encontrada para transformador  $i$ , y  $TD$  es el conjunto de capacidades nominales en kVA de los transformadores disponibles para la instalación.

No obstante, si la potencia de diseño de un transformador supera los kVA de la capacidad máxima disponible,  $S_{nom\max}$ , no existirá ninguna opción que abastezca la carga que requiere el grupo. Por lo tanto, se plantea una restricción de capacidad que establece que a cada grupo le será asignado el transformador de menor capacidad capaz de abastecer la carga de su grupo; sin embargo, si la capacidad de diseño sobrepasa la capacidad del transformador más grande disponible, se realizará una nueva iteración del algoritmo de agrupación óptima para el sistema, pero esta vez con un número de grupos igual a  $k = k + 1$ .

### B. Determinación de la Distancia Máxima Transformador-Usuario de Cada Grupo para Cumplir con una Caída de Voltaje Aceptable

Se trabaja con redes de distribución radiales, por lo cual, aprovechando sus propiedades, se ha determinado una expresión aproximada de máxima distancia entre un transformador de distribución y su usuario más alejado, en función de la carga del transformador, que asegure que no se supere el valor máximo de caída de voltaje permitido por las normas. Esta distancia se encuentra conociendo los valores en el extremo de envío como una alternativa al tradicional cálculo de flujos en los tramos de la red que se usa en el medio local para encontrar la caída de voltaje total en función de las caídas parciales [7].

$$d_{máxi} = V_e^2 \cdot \frac{\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - \text{reg}(2 - \text{reg})}}{S \cdot r_u} \quad (7)$$

La ecuación (7) muestra el máximo valor de distancia en m que deberá existir entre el transformador  $i$  y su usuario más lejano para cumplir con la regulación de voltaje  $\text{reg}$ ; donde  $\cos\varphi$  es el factor de potencia en el lado de la fuente,  $r_u$  es la resistencia unitaria del conductor en  $\Omega/\text{km}$ ,  $V_e$  y  $S$  son el voltaje de envío en voltios y la potencia aparente en kVA

suministrada, respectivamente, ambos también vistos desde el lado de la fuente [5].

$$d_{usu\_tri} = \text{dist}(c_i, ul_i) \quad (8)$$

La ecuación (8) permite encontrar la distancia en metros sujeta a la representación vial entre el transformador de posición  $c_i$  y su usuario más alejado, de posición  $ul_i$ . Por lo tanto, existe una restricción de distancia que indica que si  $d_{usu\_tri} > d_{máxi}$ , se realizará una iteración adicional del algoritmo de agrupación, aumentando en uno el número  $k$  de grupos.

### C. Número Óptimo de Grupos

Desde el punto de vista técnico el número  $k$  de grupos, encontrado luego de las iteraciones correspondientes para cumplir con las restricciones eléctricas es válido. Sin embargo, desde un punto de vista económico podría ocurrir que un número superior de transformadores arrojará menores costos. Esto debido a que la creación de nuevos grupos implica una redistribución de los usuarios, con lo cual los niveles de carga del nuevo número de transformadores tienden a bajar al igual que sus pérdidas y sus costos asociados [17]. Este fenómeno se analizó evaluando la metodología propuesta para varios valores de  $k$  partiendo de manera ascendente desde aquel número mínimo que permite cumplir con las restricciones eléctricas. Entonces, el número óptimo de transformadores, o de grupos, es aquel  $k$  que brinda los costos totales mínimos para el sistema, además de cumplir con las restricciones técnicas.

Puesto que la formulación debe ser analizada en un horizonte de tiempo y al no disponer de datos de demanda para cada año, puesto que se trata de una planificación desde cero, se han utilizado valores anualizados.

## VIII. MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE COSTOS MÍNIMOS

El problema de optimización del problema planteado consiste en minimizar el costo total anualizado del sistema en dólares por año,  $C_{totan}$ , como se muestra en la ecuación (9); donde  $C_{invAP}$  es el costo de inversión de nuevos tramos de alimentadores primarios,  $C_{invtr}$  el costo de inversión de transformación,  $C_{péra}$  el costo anual de pérdidas de transformación,  $C_{OMa}$ , el costo anual de operación y mantenimiento del sistema,  $C_{CV}$ , un costo anual de penalización por exceso de caída de voltaje; todos en unidades de dólares por año.

$$\min C_{totan} = C_{inva} + C_{péra} + C_{OMa} + C_{CV} \quad (9)$$

### A. Costo de Inversión

El costo de inversión abarca tanto la inversión del número de transformadores de distribución adquiridos y su costo de instalación, como los nuevos tramos de la red primaria a ser instalados para conectar tales transformadores a la red de medio voltaje. Además, puesto que el costo de inversión se realiza en el primer año, se requiere obtener un valor anualizado utilizando un factor de amortización como se muestra en la ecuación (10) para que sea consecuente con los costos anuales de pérdidas y operación y mantenimiento.  $C_{ina}$  es el costo de

inversión anual en dólares por año.

$$C_{in_a} = C_{inv_{tr}} + C_{inv_{AP}} \\ = \frac{T_d}{1 - (1 + T_d)^{-T}} \left( \sum_{i=1}^k (C_{tr_i} + C_{inst_i}) + C_{in_{AP}} \right) \quad (10)$$

$T_d$  es la tasa de descuento porcentual para la amortización,  $T$  el horizonte de estudio en años,  $C_{tr_i}$  el precio en dólares americanos (USD) del transformador del grupo  $i$ ,  $C_{inst_i}$  el costo en USD de instalación del transformador  $i$ ,  $C_{in_{AP}}$  el costo asociado a los nuevos tramos de red de medio voltaje también en USD y,  $k$  el número analizado de grupos o transformadores del sistema.

### B. Costo por Pérdidas

El costo por pérdidas corresponde a las pérdidas en el hierro y en el cobre de los transformadores de distribución. Existen tanto pérdidas de potencia como pérdidas de energía. Las pérdidas de energía son más representativas [22]; sin embargo, también es posible considerar las pérdidas de potencia.

$$C_{pér_a} = C_{pér_P} + C_{pér_E} \quad (11)$$

La ecuación (11) corresponde al costo anual representativo de pérdidas de transformación en USD/año; donde  $C_{pér_P}$  y  $C_{pér_E}$  son los costos anuales de pérdidas de potencia y energía del sistema, respectivamente, en USD/año.

Para poder calcular la expresión (11) se tienen las siguientes expresiones.

$$C_{pér_P} = \sum_{i=1}^k c_p (P_{Fe_i} + P_{Cu_i} \cdot F_{u_i}^2) \quad (12)$$

$$C_{pér_E} = 8760 \cdot \sum_{i=1}^k c_e (P_{Fe_i} + P_{Cu_i} \cdot F_{u_i}^2 \cdot F_{pér}) \quad (13)$$

En las ecuaciones (12) y (13) se tiene que  $c_p$  es el costo de la demanda en USD/kW/año y  $c_e$  es el costo de la energía en USD/kWh, mientras que  $P_{Fe_i}$  y  $P_{Cu_i}$  son las pérdidas en kW en el hierro y en el cobre del transformador  $i$ , respectivamente. Además,  $F_{pér}$  es el factor de pérdidas.

Adicionalmente, el factor de utilización del transformador  $i$ ,  $F_{u_i}$ , se encuentra con la ecuación (14); donde  $D_i$  es el valor anual representativo de la demanda en kVA del grupo  $i$ .

$$F_{u_i} = \frac{D_i}{S_{tr_i}} \quad (14)$$

Como se observa, la metodología propuesta contempla un valor representativo anual de pérdidas para el transformador de cada grupo. La ecuación (15) se emplea para calcular el valor representativo de demanda de cada grupo; donde  $r$  es la tasa geométrica de crecimiento anual de la demanda y  $S_i$  es la potencia de diseño en kVA del transformador  $i$ . Se ha definido para este trabajo una tasa de crecimiento del 3% anual [5]. Además, se define un horizonte de estudio de  $T = 10$  años, valor correspondiente para redes secundarias de distribución según las normativas locales [3].

$$D_i = \frac{S_i [r - (1 + r)^{-T}]}{T(r - 1)} \quad (15)$$

### C. Costo de Operación y Mantenimiento

Este costo corresponde a la operación y mantenimiento del sistema completo. Generalmente, se fija un valor anual que es porcentaje del costo inicial de inversión en USD/año. Este trabajo utiliza un valor correspondiente al 2% de la inversión inicial [23]. Por lo tanto, empleando la ecuación (16) es posible encontrar el valor del costo de operación y mantenimiento anual en USD/año,  $C_{OM_a}$ .

$$C_{OM_a} = 0.02 \left( C_{in_a} \cdot \frac{1 - (1 + T_d)^{-T}}{T_d} \right) \quad (16)$$

### D. Costo por Incumplimiento de Regulación de Voltaje

Para poder cuantificar la caída de voltaje en la función objetivo del modelo desarrollado, en este trabajo se introduce un factor de penalización  $f_{pen} = 100 \text{ m} \times \text{USD/año}$ . Tal factor multiplicado por el exceso de distancia transformador-usuario, sobre el límite establecido para no exceder la caída de voltaje, permite introducir un costo de penalización  $C_{CV}$  en USD/año, como se muestra en la ecuación (17); donde  $d_{exc}$  es la distancia en metros excedente que produciría la violación de caída de voltaje.

$$C_{CV} = d_{exc} \cdot f_{pen} \quad (17)$$

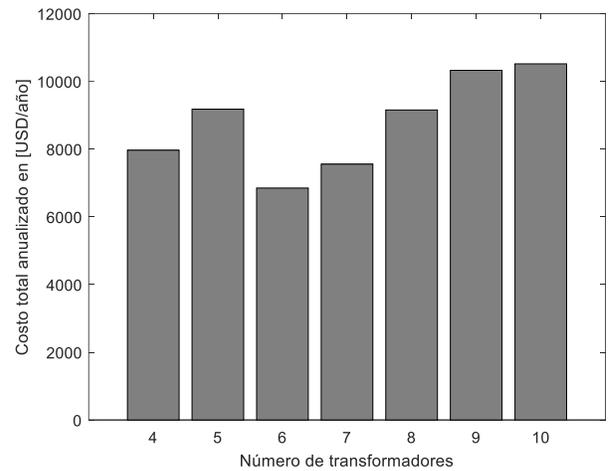


Fig. 4. Costo anualizado total del sistema para diferente número  $k$  de transformadores de distribución.

## IX. RESULTADOS

La metodología propuesta fue implementada en un sistema de prueba urbano conformado por 106 usuarios predominantemente residenciales, y 23 vértices de calle que forman una topología vial 31 tramos de calle, tomados de la referencia [24]. Su representación en el plano se observa en las gráficas de la Fig. 2 y la Fig. 5

Luego de aplicar el modelo de optimización, se obtiene que el número óptimo de grupos es de 6. De una manera visual se puede interpretar que, en el sistema analizado, conforme aumenta el número de grupos de consumidores, también lo hace el costo anual total del sistema (Fig. 4). Es así que, aunque el

número óptimo de transformadores en este trabajo fue 6, se observó que al aumentar este número hasta 11 las caídas de voltaje fueron menores al tener transformadores más cercanos a los usuarios, pero los costos totales aumentaron proporcionalmente debido a costos de inversión y aumento de pérdidas.

La Tabla II muestra una comparación entre los resultados que arroja el algoritmo de optimización de la metodología propuesta (MP), en cuanto al número óptimo de grupos y los costos desglosados del sistema en USD/año, con respecto a los resultados obtenidos con la metodología (M) de la referencia [24] que aplica una optimización multietapa con k-means como algoritmo de agrupación inicial y con un reagrupamiento mediante diagramas de Voronoi y búsqueda tabú. Consecuentemente, en este trabajo se han obtenido resultados alentadores con una reducción de pérdidas de transformación de 36.8% y una disminución del costo total anual de 5.15% con respecto a los resultados obtenidos con la metodología de la referencia [24]. Además, se obtuvo un mejoramiento del tiempo computacional en 53.7% para la iteración de la solución óptima.

TABLA II

COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LA METODOLOGÍA DESARROLLADA			
Denominación	M [24]	MP	Unidades
Número óptimo de transformadores	6	6	N/A
Costo de inversión anual	6 461	6 137	USD/año
Costo anual por pérdidas	31	19	USD/año
Operación y mantenimiento anual	730	693	USD/año
Costo total anualizado del sistema	7 222	6 849	USD/año
Pérdidas de transformación	4.54	2.87	kW
Tiempo computacional	11.99	5.56	s

El modelo propuesto encuentra la ubicación óptima de los transformadores de distribución, así como también la capacidad y los usuarios asociados a cada transformador. Estos valores se muestran en la Tabla III y su representación gráfica se muestra en la Fig. 5.

TABLA III

RESULTADOS OBTENIDOS PARA LOS TRANSFORMADORES				
Id Transf.	Coordenada X	Coordenada Y	Usuarios por grupo	Capacidad del transformador
T1	122.69	217.68	25	15 kVA
T2	162.89	68.94	18	15 kVA
T3	77.03	371.62	27	30 kVA
T4	200.92	442.14	12	15 kVA
T5	54.04	80.75	13	30 kVA
T6	287.79	286.55	11	15 kVA

TABLA IV

VALORES TRANSFORMADOR-USUARIO MÁS LEJANO DE CADA GRUPO			
Id Transf.	Id usuario más lejano	Distancia transf. - usuario más lejano	% caída de voltaje al usuario más lejano
1	63	120.72 m	0.40
2	101	133.32 m	0.26
3	100	234.25 m	0.47
4	80	97.77 m	0.09
5	23	100.12 m	0.13
6	64	126.19 m	0.09

Finalmente, la Tabla IV muestra la distancia en metros del usuario más alejado a cada transformador del sistema, con la respectiva verificación de la regulación de voltaje que, como se observa, no viola el valor establecido por las normas.

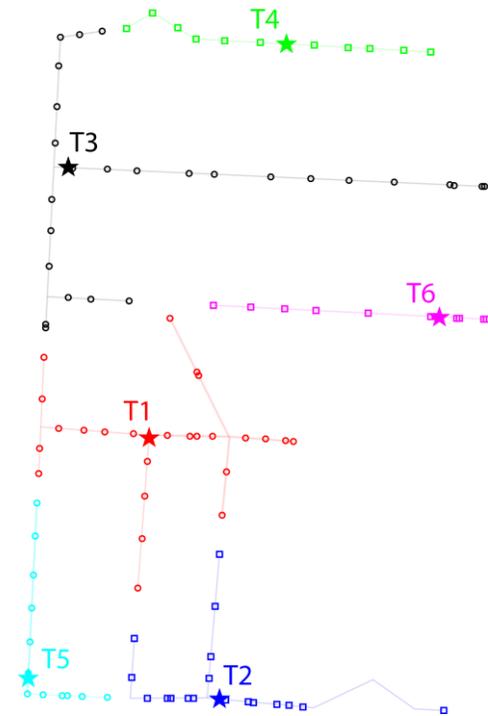


Fig. 5. Agrupación óptima de los usuarios y ubicación óptima de los transformadores de distribución obtenidas con la metodología propuesta.

## X. CONCLUSIONES

En este artículo se presenta una propuesta metodológica sólida y menos compleja respecto de otras propuestas, para optimizar la capacidad y ubicación de los transformadores, así como el agrupamiento de los usuarios de un sistema de distribución urbano. Para esto se consideraron momentos de demanda (y no únicamente distancias) y se encontraron los verdaderos centros de demanda (no centros geográficos) de forma que la ubicación de los transformadores tomó en cuenta distancias, pero también la demanda de los usuarios.

El algoritmo de agrupación propuesto se desarrolló tomando como punto de partida el algoritmo de partición tradicional k-means, pero éste fue modificado para calcular las distancias determinadas con recorridos reales de las redes, mediante el uso de la teoría de grafos.

La variable de decisión capacidad nominal de los transformadores es una variable discreta que considera únicamente capacidades estándar existentes en el mercado. Mientras mayor sea el número de alternativas, mayor será la probabilidad de evitar sobredimensionamientos y disminuir pérdidas en el cobre.

Aunque algunos trabajos buscan minimizar la caída de voltaje de la red secundaria como función objetivo, se verificó en este trabajo que aquello podría reflejar sobreinversión. Por lo tanto, aunque en términos eléctricos una caída de voltaje mínima es algo positivo, en términos económicos no lo es, pues basta con no violar la restricción de caída máxima de voltaje impuesta por la distribuidora del medio.

En consecuencia, una vez cumplidas las restricciones eléctricas, el número óptimo de transformadores se determina como aquel que genera el menor costo total anual.

Esta metodología puede ser aplicada a escalas de alimentadores primarios aguas abajo; sin embargo, para considerar problemas de mayor escala se podría considerar en trabajos futuros la ubicación de las subestaciones de distribución.

#### APÉNDICE: MODELO DE OPTIMIZACIÓN COMPLETO

A continuación, se muestra el modelo completo de optimización, incluyendo sus restricciones.

$$\text{Min } C_{totan} = C_{inv_{tr}} + C_{inv_{AP}} + C_{pér_a} + C_{OMa} + C_{CV}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} R_1: S_i &\leq S_{tr_{máx}} \\ R_2: d_{usu_{tri}} &\leq d_{máx_i} \\ R_3: reg &\leq 3\% \end{aligned}$$

$$C_{in_a} = \frac{T_d}{1 - (1 + T_d)^{-T}} \left( \sum_{i=1}^k (C_{tr_i} + C_{inst_i}) + C_{in_{AP}} \right)$$

$$\begin{aligned} C_{pér_a} &= C_{pér_P} + C_{pér_E} \\ C_{pér_P} &= \sum_{i=1}^k c_p (P_{Fe_i} + P_{Cu_i} \cdot F_{u_i}^2) \\ C_{pér_E} &= 8760 \cdot \sum_{i=1}^k c_e (P_{Fe_i} + P_{Cu_i} \cdot F_{u_i}^2 \cdot F_{pér}) \\ C_{OMa} &= 0.02 \times \frac{C_{in_a}}{F_a} \\ F_a &= \frac{T_d}{1 - (1 + T_d)^{-T}} \end{aligned}$$

#### REFERENCIAS

- [1] A. A. Sallam y O. P. Malik, *Electric Distribution Systems*, IEEE, 2019.
- [2] J. E. Parra, F. L. Quilumba y H. N. Arcos, «Customers' demand clustering analysis — A case study using smart meter data,» *2016 IEEE PES Transmission & Distribution Conference and Exposition-Latin America (PES T&D-LA)*, pp. 1-7, 2016.
- [3] Empresa Eléctrica Quito, «Normas para Sistemas de Distribución - Parte A. Guía para Diseño de Redes de Distribución,» Quito, 2015.
- [4] R. Hasan, M. Viele, W. Winters y D. J. Allen, «Optimization of Transformer Sparing and Replacement Strategies using Probabilistic Simulation,» *2020 IEEE International Conference on Power Systems Technology (POWERCON)*, pp. pp. 1-6, 2020.
- [5] S. Ramírez, *Redes de Distribución de Energía, Manizales: Centro de Publicaciones Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales*, 2004.
- [6] M. García-Sanz y M. Otorongo, «Planificación y Diseño Automático Óptimo de Grandes Redes Eléctricas de Distribución: Aplicación al Centro Histórico de Quito,» *Revista técnica "energía"*, vol. 12, no.1, pp. 157-166, 2016.
- [7] P. F. Vásquez-Miranda y R. M. Vásquez-Villarruel, «A more realistic approach for electric power distribution networks design that considers existing electric infrastructure and geographic constraints,» *2020 IEEE ANDESCON*, pp. 1-6, 2020.
- [8] P. Ghosh, T. Goto y S. Sen, «Computing Skyline Using Taxicab Geometry,» *2017 5th Intl Conf on Applied Computing and Information Technology/4th Intl Conf on Computational Science/Intelligence and Applied Informatics/2nd Intl Conf on Big Data, Cloud Computing, Data Science (ACIT-CSII-BCD)*, pp. 7-12, 2017.
- [9] J. P. Avilés, O. Erives y O. Micheloud, «Optimal Design of Low Voltage Distribution Networks Using a PSO-PRIM Algorithm,» *2018 IEEE Third Ecuador Technical Chapters Meeting (ETCM)*, pp. 1-6, 2018.
- [10] C. Muñoz y E. M. Toro, «Ubicación y dimensionamiento óptimo de transformadores de distribución aplicando el modelo de P-mediana y resuelto a través del Algoritmo Colonia de Hormigas,» *Scientia et Technica*, vol. 2, no. 48, pp. 287 - 292, 2011.
- [11] S. Huang, P. Gu, W. Su, X. Liu y T. Tai, «Application of flower pollination algorithm for placement of distribution transformers in a low-voltage grid,» *2015 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, pp. 1280-1285, 2015.
- [12] J. E. Mendoza, M. E. López, H. E. Peña y D. A. Labra, «Low voltage distribution optimization: Site, quantity and size of distribution transformers,» *Electric Power Systems Research*, vol. 91, pp. 52-60, 2012.
- [13] Sarjiya, A. Husni Rois y B. P. Reynold, «Application of genetic algorithm for optimal sizing and placement of distribution transformers in PT PLN East Medan Indonesia,» *AIP Conference Proceedings*, vol. 1755, no. 1, pp. 1-9, 2016.
- [14] D. M. Jovanovic, «Planning of optimal location and sizes of distribution transformers using integer programming,» *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 25, no. 9, pp. 717-723, 2003.
- [15] A. Navarro y H. Rudnick, «Large-Scale Distribution Planning—Part II: Macro-Optimization With Voronoi's Diagram And Tabu Search,» *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 24, no. 2, pp. 752-758, 2009.
- [16] D. Carrión, E. García, J. W. González, I. A. Isaac, G. J. López y R. Hincapié, «Método Heurístico de Ubicación Óptima de Centros de Transformación y Enrutamiento de Redes Eléctricas de Distribución,» *Revista Técnica "energía"*, vol. 13, no. 1, pp. 90-96, 2017.
- [17] G. C. Cabrera-Celi, E. G. Novoa-Guaman y P. F. Vasquez-Miranda, «Design of secondary circuits of distribution networks using clustering and shortest path algorithms,» *2017 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference - Latin America (ISGT Latin America)*, pp. 1-6, 2017.
- [18] V. Hegde, C. G. Raghavendra, P. Nayak, S. Pradeep y T. Woleng, «Optimal placement of distribution transformers in radial distribution system,» *International Journal of Smart Grid and Clean Energy*, vol. 3, n°o.2, pp. 193-199, 2014.
- [19] E. Inga, M. Campaña, R. Hincapié y O. Moscoso-Zea, «Optimal Dimensioning of Electrical Distribution Networks Considering Stochastic Load Demand and Voltage Levels,» *Applications of Computational Intelligence. ColCACI 2018. Communications in Computer and Information Science*, vol. 833, pp. 200-215, 2018.
- [20] T. Z. Breadth-first search, S. X. Gao y W. G. Yang, «Determining the connectedness of an undirected graph,» *Journal of University of Chinese Academy of Sciences*, vol. 35, no. 5, pp. 582-588, 2018.
- [21] G. I. Casillas, N. Kagan y M. Poveda, «Voltage regulators, capacitor banks and distributed resources allocation in a distribution network system,» *2017 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference - Latin America (ISGT Latin America)*, pp. 1-6, 2017.
- [22] M. Kundu, S. Jadhav y K. Bagdia, «Technical loss reduction through active repair of distribution transformers: Results from the field,» *2017 7th International Conference on Power Systems (ICPS)*, pp. 265-268, 2017.
- [23] C. A. Solís, *Planificación de redes eléctricas de distribución en zonas urbanas consolidadas considerando criterios de confiabilidad*, Quito: Escuela Politécnica Nacional, 2018.
- [24] M. García-Sanz, *Herramienta de diseño óptimo de redes eléctricas de distribución. Manual de usuario*, CodyPower LLC, 2014.
- [25] A. B. Gupta, T. Alpcan y A. B. Morton, «Predicting Voltage Variations in Low Voltage Networks with Prosumers,» *2018 IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC)*, pp. 183-188, 2018.



**Darwin E. Vincent** was born in Quito, Ecuador in 1992. He received his B.S. degree in electrical engineering from Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador in 2021, and is currently pursuing an M.S. degree in renewable energy at Valencian International University, Valencia, Spain. His research interests

include distribution networks, photovoltaic systems, renewable energy, and smart grids.



**Paul F. Vásquez** was born in Ecuador. He received his B.S. degree in electrical engineering from Escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador, in 2002 and a Ph.D. degree in electrical engineering from Universidad Nacional de San Juan, Argentina, in 2009. From 2007 to 2009, he was an invited Researcher at Otto-von-

Guericke University Magdeburg. He was also a chapter chairman PES IEEE Ecuador from 2010 to 2012. His research interests include distribution networks, power distribution planning, pattern clustering, search problems, optimization, graph theory and evolutionary algorithms. Since 2015, Dr. Vásquez is Professor with the Electrical Energy Department, Escuela Politécnica Nacional.