

Convex Formulation for Optimal Active and Reactive Power Dispatch

Mauro Viegas da Silva, Juan M. Home-Ortiz, Mahdi Pourakbari-Kasmaei, *Senior Member, IEEE*, and José Roberto Sanches Mantovani, *Member, IEEE*

Abstract— This paper proposes a convex programming model to solve the optimal power flow problem (OPF) related to the problems of generation active power dispatch and opportunity costs to meet the reactive power needs in energy markets. The problem is initially represented as a bilevel optimization problem where the upper level considers the minimization of opportunity costs of generating units through a second-order cone programming OPF model, and the lower level is a linear programming model that minimizes the value of active power offered by generators to the market energy. Subsequently, through the concept of strong duality, the problem is transformed into a one-level convex optimization model. Comparisons of the proposed modeling with other level formulations are presented. Results are presented for the IEEE14 and IEEE30 bus systems.

Index Terms— Bilevel optimization, convex programming, opportunity costs, optimal power flow, strong duality.

NOMENCLATURA

Conjuntos e parâmetros:

Ω_L, Ω_B	Conjunto de linhas e barras
a_i, b_i, C_i	Coefficientes de custo de geração de potência ativa na barra i (\$/MWh)
b_{ij}, g_{ij}	Susceptância e condutância da linha ij
G_{ij}, B_{ij}	Parte real e imaginária da matriz de admitância nodal
f_{ji}^0, \bar{f}_{ji}^0	Limites inferior e superior para os fluxos de potência ativa no segundo nível
$m_{i,y}^p$	Declive do bloco (yth) da potência gerada na barra i
$m_{ij,y}^\delta$	Declive do bloco (yth) da diferença angular na linha ij
P_i^d	Potência ativa demandada na barra i
Q_i^d	Potência reativa demandada na barra i
\bar{P}_i^g	Limite de geração de potência ativa na barra i
$\bar{P}_i^{g0}, \bar{P}_i^{g0}$	Limite de geração de potência ativa na barra i no segundo nível
\bar{Q}_i^g	Limite de geração de potência reativa na barra i
$\underline{V}_i, \bar{V}_i$	Limites mínimo e máximo de tensão na barra i
$\alpha_i, \bar{\alpha}_i$	Limites mínimo e máximo de custo quadrático de geração de potência ativa na barra i

$\underline{\beta}_i, \bar{\beta}_i$	Limites mínimo e máximo de custo de geração de potência ativa na barra i
$\bar{\delta}_{ij}$	Limite na abertura angular das barras ij
$\bar{\Delta}_i^p, \bar{\Delta}_{ij,y}^\delta$	Parâmetros de linearização
Variáveis:	
c_{ij}, s_{ij}	Variáveis auxiliares usadas na convexificação do fluxo de potência
f_{ij}^0	Fluxo de potência ativa no problema de segundo nível
P_i^g	Potência ativa gerada na barra i quando há necessidade de fornecer potência reativa ao sistema
P_i^{g0}	Potência ativa gerada na barra i quando não há necessidade de fornecer potência reativa
$P_i^{g0,sqr}$	Variável auxiliar para determinar o quadrado da potência ativa P_i^{g0}
p_{ij}	Fluxo de potência ativa na linha ij
Q_i^g	Potência reativa gerada na barra i
q_{ij}	Fluxo de potência reativa na linha ij
R_{ij}	Resistência na linha ij
V_i	Magnitude de tensão na barra i
α_i, β_i	Custo de geração de potência ativa na barra i
δ_i	Magnitude de fase de tensão na barra i
δ_i^0	Magnitude de fase de tensão na barra i no problema de segundo nível
$\delta_{ij}^{0,sqr}$	Variável auxiliar para determinar o quadrado da diferença angular das barras ij no segundo nível
$\Delta_{i,y}^p$	Variável auxiliar na linearização da potência ativa da barra i
$\Delta_{ij,y}^\delta$	Variável auxiliar na linearização da diferença angular da linha ij
$\Delta_{ij}^{\delta+}, \Delta_{ij}^{\delta-}$	Variáveis auxiliares na linearização da diferença angular da linha ij
π_i	Custo marginal de geração de potência ativa da barra i
Variáveis Duais	
$\theta_i, \kappa_i^{\max}, \kappa_i^{\min}, \phi_i, \lambda_{ij}, \bar{l}_{ij}, \underline{l}_{ij}, \eta_{ij}, \sigma_{ij}, \beta_{ij}^{\max D}, \beta_{ij}^{\min D}, \phi_{i,y}^{\max}, \phi_{i,y}^{\min}, \tau_{ij}, \epsilon_{ij}, \omega_{ij,y}^{\max}, \omega_{ij,y}^{\min}, \rho_{ij}^{\max}, \rho_{ij}^{\min}$	

I. INTRODUÇÃO

Mercados competitivos e equilibrados visam controlar as transações de oferta e demanda de energia. O sistema de potência opera para atender o consumo através da oferta da produção de energia pelos agentes de geração, respeitando restrições físicas e operacionais dos equipamentos e das redes e manter o equilíbrio técnico e econômico da indústria de eletricidade. Nos mercados competitivos a oferta de energia às vezes não reflete os custos de produção [1][2]. Nesse contexto, de despacho de potência ativa em mercados competitivos, o

M. Viegas is with the Department of Mathematic, Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT), Cáceres - MT. (e-mail mauroviegas@unemat.br)

J. M. Home-Ortiz and José Roberto Sanches Mantovani are with the Department of Electrical Engineering, Power System Planning Lab, Sao Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira-SP, Brazil (e-mails: juan.home@unesp.br, mant@dee.feis.unesp.br)

M. Pourakbari-Kasmaei is with the Department of Electrical Engineering and Automation, Aalto University, Maarintie 8, 02150 Espoo (e-mail: Mahdi.Pourakbari@aalto.fi).

operador independente do sistema recebe ofertas de produtores e lances de consumidores para determinar a produção de energia e preços equilibrados de mercado [3].

A necessidade de suprimento potência reativa pelos geradores para manter o sistema operando com qualidade e segurança reduz as suas capacidades de geração de potência ativa, devido às restrições impostas pelas curvas de capacidade térmica dos geradores. Esta característica física interfere nos custos de geração, e no cenário que o gerador deve reduzir a sua capacidade de geração de potência ativa para gerar potência reativa, sendo este aspecto, do ponto de vista de mercado, definido como perda de oportunidade. Em [4], é apresentada uma proposta de solução para o problema de despacho de geração em mercados competitivos através de um modelo de programação binível, que visa minimizar as perdas de oportunidades dos agentes geradores, e determinar os seus despachos ótimos de potências ativa e reativa.

No nível superior do modelo de despacho ótimo de potências ativa e reativa sob condições de mercados competitivos, deve-se resolver um problema de fluxo de potência ótimo de corrente alternada (FPO-CA) que apresenta uma complexidade computacional que está associada às suas características físicas, computacionais e não convexidade. Desta forma, tem-se relevância e importância o desenvolvimento de pesquisas de técnicas de solução robustas e eficientes para este problema. Na literatura o problema de FPO-CA é formulado como um modelo de programação não linear inteiro misto (PNLIM), considerando diferentes aplicações práticas e teóricas, e para sua solução podem ser empregados os métodos clássicos de otimização não linear, técnicas de linearização e convexificação, metas-heurísticas e técnicas de otimização matheurísticas que exploram as funcionalidades das técnicas de otimização clássica e algoritmos heurísticos para resolver problemas complexos eficientemente.

Na literatura encontram-se vários modelos lineares, convexos e não lineares para o problema de FPO-CA adotando-se na formulação diferentes funções objetivo, tipos de restrições e variáveis de decisão reais, inteiras e discretas. As técnicas de solução propostas para o problema de FPO-CA são os métodos clássicos de otimização, métodos baseados em heurísticas e metas-heurísticas ou metodologias de otimização que combinam metas-heurísticas com técnicas clássicas de otimização e heurísticas. Na linha de pesquisa que considera o problema de FPO-CA através de técnicas de otimização clássica, o trabalho de Dommel e Tinney (1968) [5] deu origem e serviu de base à maioria dos trabalhos envolvendo a formulação e solução do problema de FPO-CA. Neste artigo incorpora-se à solução do problema de fluxo de potência calculado pelo método de Newton tradicional, uma função objetivo que considera a minimização da injeção de potência ativa da barra de referência, que visa minimizar as perdas no sistema de geração e transmissão. Propõe-se para a solução do problema de otimização resultante técnicas clássicas de programação não linear, como método do gradiente reduzido generalizado e sensibilidade de segunda ordem da função lagrangeana com relações às variáveis de controle, método das tangentes paralelas e uma técnica mista que utiliza informações desses dois métodos. As restrições de desigualdades referentes

às variáveis dependentes foram consideradas através do método das penalidades quadráticas. Em [6] propõe-se técnica de solução para o problema de FPO-CA formulado como um modelo de otimização de PNL e não convexo, baseado no método de segunda ordem de Newton, sem a necessidade do particionamento das variáveis nos subconjuntos de controle e dependentes. A função objetivo é o custo de geração de potência ativa ou a minimização de perdas, satisfazendo critérios tais como limites físicos para operação dos equipamentos do sistema, qualidade dos serviços prestados aos consumidores e atendimento da demanda. As restrições de desigualdade são consideradas por funções de penalidades do tipo quadráticas. A convergência do algoritmo do problema FPO-CA ocorre quando as condições de otimalidade de KKT (Karush-Khun-Tucker) são satisfeitas. Apresentam as versões acoplada e desacoplada do fluxo de carga ótimo pelo método de Newton e alguns algoritmos para verificar a factibilidade das restrições de desigualdades e quais devem ser efetivamente consideradas na estrutura matricial, que é a principal dificuldade do método proposto. Para validar a abordagem os autores testaram a metodologia em um sistema formado por uma parte do sistema de energia do nordeste dos Estados Unidos que possui 912 barras e 1637 linhas. Em [7] propõe-se a solução do problema de FPO-CA através do método de Pontos Interiores Preditor Corretor (MPI-PC). A função objetivo do problema é a minimização das perdas de potência ativa no sistema escrita em coordenadas retangulares. Considerando que o FPO-CA quando formulado desta forma tem uma função objetivo quadrática e restrições quadráticas, tais características permitem facilidade de organização das matrizes Jacobiana e Hessiana e facilitam a convergência do algoritmo MPI-PC. não linear. Os testes realizados com os sistemas IEEE 30, 57, 118 e 300 barras, confirmam a eficiência do algoritmo. Em [8] propõe-se um modelo multiobjetivo para o problema de FPO-CA que considera como funções objetivo o despacho de potências ativa e reativa e maximizar as restrições de segurança de tensão. Este problema foi resolvido através de uma metodologia que utiliza o método de pontos interiores juntamente com técnica de programação por metas, para contemplar a natureza multiobjetivo do modelo. Os testes foram realizados em dois sistemas conhecidos do IEEE 57 e 118 barras, e os resultados mostram a importância de se incluir o atual ponto de carregamento nos procedimentos de otimização utilizados para análises de estabilidade de tensão, uma vez que os limites deste ponto influenciam significativamente nos resultados obtidos no FPO-CA.

As heurísticas e metas-heurísticas são técnicas de solução que se baseiam em regras lógicas, comportamentais ou empíricas. De forma simples, estas metodologias são capazes de considerar problemas com variáveis contínuas e discretas, possuem mecanismos para saírem de pontos de ótimos locais, e não requerem uma modelagem matemática detalhada do problema, no entanto não garantem a obtenção de soluções ótimas globais, e em problemas de grande porte, onde existe um grande número de variáveis a serem otimizadas, é, geralmente, exigido um maior esforço computacional em relação aos métodos clássicos de otimização. Em [9] propõe-se um algoritmo genético (AG) melhorado para resolver o problema de FPO-CA. Esta abordagem tem a capacidade de codificar um grande número de variáveis de controle de um sistema elétrico

e, dessa forma, capaz de regular a geração de potência ativa de geradores, tensões nas barras, capacitores/reatores de derivação e configurações de taps de transformadores para minimizar os custos com combustível. Os testes foram realizados no sistema IEEE30-Barras, um sistema de pequeno porte. Em [10] também propõe-se um AG com um conjunto de operadores genéticos específicos para o problema de FPO-CA, para melhorar a velocidade de convergência e a qualidade das soluções. Estes operadores são: o *Gene Swap Operator (GSO)*, que seleciona de forma aleatória dois genes de um cromossomo e troca seus valores e, o *Gene Cross-Swap Operator (GCSO)*, que seleciona aleatoriamente dois cromossomos diferentes e dois genes, sendo um de cada cromossomo, e então seus valores são trocados. O problema é modelado utilizando-se variáveis de controle contínuas para a potência ativa e níveis de tensão nas barras; e variáveis discretas para configurações de taps dos transformadores e dispositivos de derivação. As restrições funcionais de operação, como limites de fluxo de potência nas linhas de transmissão, limites das magnitudes de tensões nas barras de carga do sistema e capacidades dos geradores são consideradas na solução do algoritmo genético através de termos de penalidades. A metodologia foi testada nos sistemas IEEE30-Barras e no IEEE RTS96s. Em [11] propõe-se uma abordagem baseada na técnica de evolução diferencial multiobjetivo para resolver o FPO-CA multiobjetivo. A função objetivo é composta por três objetivos, correspondente ao planejamento e operação do sistema de transmissão, sendo eles: minimização do custo do combustível, perdas no sistema de transmissão e melhoramento da condição de estabilidade de tensão do sistema. A metodologia proposta foi testada no sistema padrão IEEE 30-barras. Em [12] propõe-se resolver o problema de FPO-CA através de um algoritmo evolutivo multiobjetivo (AEMO). Na metodologia proposta as restrições de desigualdade violadas são tratadas como funções objetivo do problema, transformando assim o problema original em um problema de otimização multiobjetivo. O algoritmo foi baseado no conceito de não dominância de Pareto e utiliza uma estratégia elitista com o propósito de preservar as soluções não-dominadas encontradas e um procedimento para manter a diversidade das soluções. A implementação computacional do algoritmo foi testada nos sistemas de teste IEEE30-Barras, RTS-96 e IEEE354-Barras.

Na linha de pesquisa que se propõe técnicas matheurísticas para solução do problema de FPO-CA, em [13] apresenta-se uma metodologia simples para resolver o problema de planejamento de reativos baseado em um AG simples e programação linear sucessiva (PLS). O problema é dividido nos subproblemas de planejamento e operação da rede; o subproblema de operação que é um modelo de FPO-CA é resolvido através da técnica de PLS, e o problema de planejamento de reativos através de um AG. A metodologia proposta foi testada nos sistemas IEEE30 e um sistema real de 309 barras. Em [14] o problema de FPO-CA é formulado como um problema de programação não linear inteiro misto (PNLIM) e não convexo, em que a função objetivo modela a minimização dos custos de geração de energia, sujeita às restrições físicas e operacionais do sistema. As variáveis inteiras deste modelo de PNLIM representam a posição dos taps dos transformadores e dos equipamentos de compensação de reativos. Para solução deste modelo de PNLIM propõe-se uma técnica matheurística

que combina o modelo de FPO-CA, modelado como um problema de programação não linear e não convexo, com uma heurística de vizinhança variável descendente (*Variable Neighborhood Descent*) para resolver o modelo de PNLIM de FPO-CA para sistemas de grande porte.

Nos últimos anos, as técnicas de relaxações como, por exemplo, programação cônica de segunda ordem e programação semidefinida, despertaram o interesse de pesquisadores da área de sistema de potência na busca por soluções que garantam o ótimo global e eficiência computacional para o problema de FPO-CA. As relaxações convexas do FPO-CA permitem explorar características importantes das soluções do problema, tais como, o grau de sub-otimalidade local, e se a solução é de alta qualidade ou ajustada, possibilitando verificar se o ótimo global foi alcançado, ou seja, se o gap de dualidade é zero. Quando o gap de dualidade do problema relaxado é zero a solução ótima do problema original é obtida [15]. Se o gap de dualidade é diferente de zero significa que a relaxação convexa do problema original apresenta inconsistência e o ótimo global não pode ser obtido mostrando que a solução do problema não é fisicamente consistente, ou até mesmo infactível [16]. Em [17] apresenta-se um sumário dos avanços recentes sobre relaxações convexas para solução do problema de FPO-CA, com o objetivo de analisar mais as suas propriedades estruturais do que os algoritmos para solução do problema. Na parte I apresentam-se dois modelos de fluxo de potência, formula o FPO-CA e as relaxações para cada modelo e prova as relações de equivalência entre eles. Em [18] apresentam-se as condições suficientes sob as quais as relaxações convexas são exatas. Em [19] apresenta-se uma técnica de solução para o problema de FPO-CA através de programação semidefinida (PSD). O método envolve a reformulação do problema de FPO-CA em um modelo de PSD e o desenvolvimento de um algoritmo de pontos interiores do tipo primal-dual para a PSD. O método proposto foi testado considerando quatro tipos de funções objetivo, normalmente, consideradas nos modelos de OPF-CA. São apresentados resultados para os sistemas testes da literatura de diferentes dimensões, incluindo o sistema IEEE30 barras.

A não convexidade FPO-CA dificulta a solução do problema de despacho de energia em mercados elétricos formulado como um modelo de otimização binível [20], [21], [1], [2]. Desta forma, neste trabalho como uma contribuição para melhorar a técnica de solução do modelo binível é proposto um modelo convexo para o problema de FPO-CA que faz parte do primeiro nível do modelo. Assim, é utilizada uma adaptação do modelo de FPO-CA de programação cônica de segunda ordem (PCSO) proposto em [22] para efetuar o despacho ótimo de geração e potência reativa do problema de mercados. Na relaxação proposta utilizam-se envelopes lineares, sendo que com esta técnica resolvem-se os problemas de não linearidade e não convexidade do problema cônico, devido à restrição arco tangente relacionada com os ângulos das tensões de barras do sistema.

A função objetivo do modelo de nível superior que é não convexa com variáveis bilineares, é transformada em um modelo convexo utilizando-se a técnica de partições de McCormick [23], proposta em [24]. Isto permite apresentar o modelo de programação binível como um modelo de

programação convexa, visto que o problema dos níveis superior e inferior passam a ser convexos. Com base no conhecimento dos autores, as principais contribuições deste trabalho, considerando técnicas propostas na literatura, são:

1. Obter a partir de um modelo de programação cônico de segunda ordem um modelo de programação convexa para o problema de FPO-CA. Embora o problema de nível inferior seja um FPO de corrente direta (FPO-CD), na solução do problema de despacho ótimo de potências ativa e reativa a sua função objetivo se transforma em uma função não linear que é convexificada neste trabalho através dos envelopes de *McCormick*.
2. Propor um modelo de programação convexa binível para efetuar o despacho ótimo de potências ativa e reativa. Os modelos de programação binível encontrados na literatura usam um modelo de FPO-CA não convexo, o que dificulta a solução do problema e a aplicação da teoria da dualidade forte para sua solução. Os modelos convexos de dois níveis facilitam a solução do problema sob estudo considerando condições e mercado e custos de oportunidades.
3. Desenvolver o modelo de programação binível de despacho de potência ativa e reativa em mercados elétricos, através de manipulações algébricas, como um modelo convexo de apenas um nível através da teoria da dualidade forte.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma. Na seção II apresentasse o modelo matemático do problema de FPO-CA e as técnicas de convexificação utilizadas. A Seção III fornece uma formulação geral para compensação de mercado baseada em preço sob preços marginais. Na seção IV são apresentadas discussões sobre as melhorias na formulação geral, ou seja, o modelo é proposto na forma de um modelo convexo binível para posteriormente exibi-lo como um modelo em um nível. Na seção V são apresentados a eficiência e robustez da abordagem proposta que são avaliadas através de testes executados nos sistemas IEEE-14 e IEEE30 e um sistema teste da literatura de 2 barras [4]. Finalmente conclusões do trabalho são apresentadas na seção VI.

II. OBTENÇÃO DE UM MODELO CONVEXO PARA O FPO-CA

A formulação do problema de FPO-CA como um modelo cônico é dada por (1)–(9) [32].

$$\min \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(p_i^g) \quad (1)$$

sujeito a:

$$p_i^g - p_i^d = G_{ii}c_{ii} + \sum_{j \in \delta(i)} [G_{ij}c_{ij} - B_{ij}s_{ij}] \quad i \in \Omega_B \quad (2)$$

$$q_i^g - q_i^d = -B_{ii}c_{ii} - \sum_{j \in \delta(i)} [-B_{ij}c_{ij} - G_{ij}s_{ij}] \quad i \in \Omega_B \quad (3)$$

$$V_i^2 \leq c_{ii} \leq \bar{V}_i^2 \quad i \in \Omega_B \quad (4)$$

$$c_{ij} = c_{ji}, s_{ij} = -s_{ji} \quad (5)$$

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = c_{ii}c_{jj} \quad (6)$$

$$p_i^{\min} \leq p_i^g \leq p_i^{\max} \quad (7)$$

$$q_i^{\min} \leq q_i^g \leq q_i^{\max} \quad (8)$$

$$\theta_j - \theta_i = \text{tg}^{-1}(s_{ij}, c_{ij}) \quad (i, j) \in \Omega_L \quad (9)$$

A função objetivo (1) representa o custo de geração de potência ativa. Para redes malhadas a formulação (1)–(9) não é válida, isto ocorre devido ao fato que a solução ótima c_{ij}, s_{ij} para todas as linhas (i, j) , na restrição (9) não garante que a soma de $\text{tg}^{-1}(c_{ij}, s_{ij})$ seja zero para todos os ciclos. A restrição (9) é não convexa, e a restrição (6) pode ser relaxada para obter uma restrição cônica de segunda ordem $c_{ij}^2 + s_{ij}^2 \leq c_{ii}c_{jj}$, mas essa relaxação não garante a factibilidade das soluções fornecidas pelo modelo do FPO-CA com relação ao subproblema reativo.

A. Envelope de Arco Tangente

Apresenta-se nesta seção, a técnica usada para resolver o problema gerado pela não convexidade da restrição (9), $\theta_j - \theta_i = \text{tg}^{-1}(s_{ij}, c_{ij}) \quad (i, j) \in \mathcal{L}$. A ideia chave é incorporar uma aproximação convexa do ângulo da condição (9) para a relaxação do problema de PCSO. A proposta é obter envelopes lineares para a função arco tangente sobre uma caixa $\mathcal{C} := [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$, utilizando-se quatro inequações lineares para aproximar o envelope convexo. O conjunto definido para a restrição arco tangente para cada linha (i, j) do sistema de transmissão é dado por (10):

$$\mathcal{AT} := \left\{ (c, s, \theta) \in \mathbb{R}^3: \text{tg}^{-1}\left(\frac{s}{c}\right), (c, s) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}] \right\}. \quad (10)$$

Em que $\theta = \theta_j - \theta_i$, e por facilidade de notação o índice (i, j) não é mais adotado no desenvolvimento a seguir. Assume-se que $\underline{c} > 0$, os quatro vértices correspondentes à caixa para os quatros pontos (c, s, θ) no espaço são dados por (11).

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \left(\underline{c}, \bar{s}, \text{tg}^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{\underline{c}}\right) \right) & \zeta_2 &= \left(\bar{c}, \bar{s}, \text{tg}^{-1}\left(\frac{\bar{s}}{\bar{c}}\right) \right) \\ \zeta_3 &= \left(\bar{c}, \underline{s}, \text{tg}^{-1}\left(\frac{\underline{s}}{\bar{c}}\right) \right) & \zeta_4 &= \left(\underline{c}, \underline{s}, \text{tg}^{-1}\left(\frac{\underline{s}}{\underline{c}}\right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Na proposição 1, são descritas as duas inequações que descrevem os envelopes superiores de \mathcal{AT} .

Proposição 1: sejam $\theta = \gamma_1 + \alpha_1 c + \beta_1 s$ e $\theta = \gamma_2 + \alpha_2 c + \beta_2 s$ os planos que passam pelos pontos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ e $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_4$, respectivamente. Então duas inequações válidas para \mathcal{AT} podem ser obtidas como apresentado em (12).

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \geq \text{tg}^{-1}\left(\frac{s}{c}\right), \quad a \quad (12)$$

para todo $(c, s) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$ com $\gamma'_k = \gamma_k + \Delta\gamma_k$, onde,

$$\Delta\gamma_k = \max \left\{ \text{tg}^{-1}\left(\frac{s}{c}\right) - \gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s : c \in [\underline{c}, \bar{c}], s \in [\underline{s}, \bar{s}] \right\}; \quad k = 1, 2 \quad (13)$$

Observe que pela construção de (13), $\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s$ domina o termo $\text{tg}^{-1}\left(\frac{s}{c}\right)$ sobre a caixa \mathcal{C} . O problema de otimização não convexo (13) pode ser resolvido enumerando todas as possibilidades dos pontos de Karush-Khun-Tucker (KKT).

Na Proposição 2, são descritas as duas inequações que descrevem os envelopes inferiores de \mathcal{AT} .

Proposição 2: sejam $\theta = \gamma_3 + \alpha_3 c + \beta_3 s$ e $\theta = \gamma_4 + \alpha_4 c + \beta_4 s$ os planos que passam pelos pontos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4$ e $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$,

respectivamente. Então duas inequações válidas para \mathcal{AT} podem ser obtidas segundo (14):

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \leq t g^{-1} \left(\frac{s}{c} \right), \quad (14)$$

para todo $(c, s) \in [\underline{c}, \bar{c}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$ com $\gamma'_k = \gamma_k - \Delta\gamma_k$, onde,

$$\Delta\gamma_k = \max \left\{ t g^{-1} \left(\frac{s}{c} \right) - \gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s : c \in [\underline{c}, \bar{c}], s \in [\underline{s}, \bar{s}] \right\} k = 3, 4 \quad (15)$$

B. Modelo Convexo do FPO-CA

Considerando o modelo não convexo de FPO-CA (1)–(9) e a técnica do envelopamento apresentada na subsecção anterior, o modelo matemático convexo proposto para o problema de FPO-CA apresenta a formulação (12)–(27).

$$\min \sum_{i \in \mathcal{G}} C_i(p_i^g) \quad (16)$$

sujeito a:

$$p_i^g - p_i^d = g_{ii} c_{ii} + \sum_{j \in \delta(i)} p_{ij} \quad i \in \Omega_B \quad (17)$$

$$q_i^g - q_i^d = -b_{ii} c_{ii} + \sum_{j \in \delta(i)} q_{ij} \quad i \in \Omega_B \quad (18)$$

$$p_{ij} = -G_{ij} c_{ii} + G_{ij} c_{ij} - B_{ij} s_{ij} \quad (i, j) \in \Omega_L \quad (19)$$

$$q_{ij} = B_{ij} c_{ii} - B_{ij} c_{ij} - G_{ij} s_{ij} \quad (i, j) \in \Omega_L \quad (20)$$

$$c_{ij} = c_{ji}, \quad s_{ij} = -s_{ji} \quad s_{ij} = -s_{ji} \quad (21)$$

$$c_{ij}^2 + s_{ij}^2 \leq c_{ii} c_{jj} \quad (i, j) \in \Omega_L \quad (22)$$

$$\underline{V}_i^2 \leq c_{ii} \leq \bar{V}_i^2 \quad i \in \Omega_B \quad (23)$$

$$p_{ij}^2 + q_{ij}^2 \leq (S_{ij}^{\max})^2 \quad (i, j) \in \Omega_L \quad (24)$$

$$\underline{p}_i \leq p_i^g \leq \bar{p}_i \quad i \in \mathcal{G} \quad (25)$$

$$\underline{q}_i \leq q_i^g \leq \bar{q}_i \quad i \in \mathcal{G} \quad (26)$$

$$\theta = \gamma_k + \alpha_k c + \beta_k s \quad k = 1, \dots, 4 \quad (27)$$

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \geq t g^{-1} \left(\frac{s}{c} \right) \quad k = 1, 2. \quad (28)$$

$$\gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \leq t g^{-1} \left(\frac{s}{c} \right) \quad k = 3, 4. \quad (29)$$

$$\gamma'_k = \gamma_k + \Delta\gamma_k \quad k = 1, \dots, 4 \quad (30)$$

$$\Delta\gamma_k = \max \left\{ t g^{-1} \left(\frac{s}{c} \right) - \gamma'_k + \alpha_k c + \beta_k s \right\} \quad k = 1, \dots, 4 \quad (31)$$

$$\theta_j - \theta_i = t g_2^{-1}(s_{ij}, c_{ij}) \quad (i, j) \in \mathcal{L}$$

As equações de (23)–(27) substituem a equação (9) do arco tangente que tornava o problema não convexo. Os coeficientes das equações (23)–(27) são obtidos através de pré-processamento, e fixados como parâmetros do problema.

Na Fig. 1 é apresentado um resumo de solução do modelo iterativo de FPO-CA convexificado. Considere as nomenclaturas limite inferior LI, limite superior LS e erro ϵ :

1. O solver de otimização local KNITRO resolve as equações (23) – (27) em um pré-processo, e encontra os envelopes que são os parâmetros necessários para resolver o modelo de FPO-CA convexo proposto.
2. Ao modelo cônico são adicionados os envelopes encontrados no processo de otimização anterior para obter o FPO-CA modelo relaxado (12)–(27)
3. Usando um solver de otimização convexa resolve-se o FPO-CA relaxado.
4. Apresentam-se os resultados do FPO-CA modelo relaxado que agora é denominado como $FPO(x)$, se

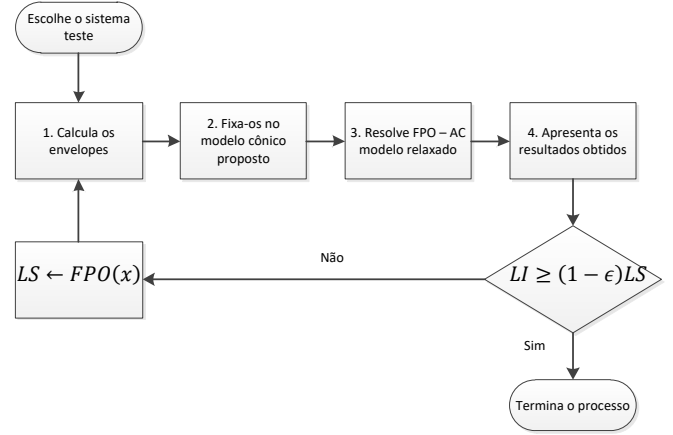


Fig. 1. Etapas de resolução do modelo convexo proposto.

$LI \geq (1 - \epsilon) LS$, e então, finaliza-se o processo de solução de FPO-CA, caso contrário ir para o passo 5.

5. $LS \leftarrow FPO(x)$ para melhoria dos limites, retornar ao passo 1.

III. APLICAÇÃO DO MODELO CONVEXO: DESPACHO ÓTIMO DE POTÊNCIA EM MERCADOS ELÉTRICOS

Nesta seção apresenta-se um modelo binível para despacho ótimo de potências ativa e reativa, para explorar o modelo de programação convexo do FPO-CA proposto. No nível superior, minimiza-se a função custo de oportunidade e no nível inferior, minimiza-se o preço ofertado de potência ativa [4].

A. O Mercado de Potência Ativa

A participação de geradores no mercado de potência ativa é afetada pelo custo para produzir potência reativa, o que do ponto de vista de mercado, gera perdas de oportunidades para os geradores. Neste caso de perda de oportunidade o agente do mercado oferece um benefício a esse gerador para que ele opere de uma maneira rentável, ou seja, pela sua não participação no mercado de potência ativa.

O modelo binível de despacho de potência ativa, pode ser formulado considerando três estágios e tem início com a necessidade de potência ativa para suprir o mercado. No segundo estágio, considerando as restrições nas linhas de transmissão, capacidades de geração e ofertas dos geradores o despacho de potência ativa é realizado através da simulação de um modelo de FPO-CD. Na sequência, considera-se o modelo de FPO-CA factível, realiza-se o despacho de potências ativa e reativa pela minimização de custo total de oportunidade em termos dos custos marginais obtidos no segundo estágio. Os preços de potência ativa podem sofrer modificações, para que sejam respeitados os limites preestabelecidos dos geradores, isto é, as suas restrições físicas e operacionais relacionadas com as capacidades máximas de geração de potências ativa e reativa.

As ofertas dos geradores são variáveis de decisões e os dois estágios devem interagir até que não sejam mais observadas modificações nos coeficientes dos custos marginais. No nível inferior do problema binível, calcula-se a quantidade de potência ativa que cada gerador fornece ao mercado.

B. O Despacho Ótimo de Potência Ativa

O montante de potência ativa que cada gerador está disposto a vender respeitando seus limites de geração são dados por $(Pg_i^o, P\bar{g}_i^o)$, é dado pela solução do problema (32). O despacho de geração começa quando o operador do sistema recebe uma oferta de compra de potência ativa pelo mercado. A função linear o_i representa o preço em MWh, onde Pg_i^o é a potência ofertada.

$$o_i(Pg_i^o) = \alpha_i Pg_i^o + \beta_i \quad (32)$$

em que α_i (/MWh) e β_i (/MWh) são coeficientes constantes lineares da função representada por o_i .

IV. DESPACHO DE POTÊNCIA PARA O MERCADO

Considere inicialmente o problema de otimização (33):

$$\begin{aligned} \min_{Pg_i^o, \delta^o} f &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i^o)^2 + \beta_i Pg_i^o \\ \text{s. a} \\ Pg_i^o - Pd_i - P_i^o(\delta^o) &= 0 \\ \underline{Pg}_i^o \leq Pg_i^o \leq \overline{Pg}_i^o & \quad i, k = 1, \dots, n \\ |f_{lik}^o(\delta^o)| &\leq \overline{f}_{lik} \end{aligned} \quad (33)$$

O critério de preço mínimo é usado para calcular a quantidade de potência ativa que cada gerador vende para o mercado através dos multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de potência, que são os custos marginais de geração em cada barra i , representados por λ_i^o . A receita é formada pelo produto entre o custo marginal e a geração de potência ativa, ou seja, $\lambda_i^o Pg_i^o$. O preço total de potência ativa por hora, usa integralmente as ofertas dos geradores. O lucro do gerador é modelado pela equação (34):

$$Pr_i^o = \lambda_i^o Pg_i^o - \left(\frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i^o)^2 + b_i Pg_i^o \right) \quad (34)$$

o segundo termo de (30) descreve o custo de geração em que α_i (/MWh) e b_i (/MWh) são os coeficientes da curva custos de geração. Para evitar problemas de interpretação entre os coeficientes utilizados (α_i, b_i) na equação (34) e os coeficientes (α_i, β_i) da equação (33), ambos são parâmetros e iguais, ou seja, $(\alpha_i = \alpha_i, b_i = \beta_i)$.

Para uma compreensão melhor deste trabalho, o lucro do gerador dado pela equação (34) é afetado fortemente com a necessidade de potência reativa pelo sistema elétrico. Assim, conhecer a necessidade ou não de potência reativa no sistema, afeta positivamente o gerador, suscitando uma oportunidade.

A. Despacho de potências ativa e reativa

Na resolução do problema (33) considera-se apenas o despacho de potência ativa, mas quando os geradores fornecem potência reativa como suporte, isso pode levar a um custo de oportunidade elevado, tendo um impacto negativo no preço da energia. Para reduzir o impacto na geração de potência reativa sobre o preço da potência ativa, o despacho necessita ser factível para uma rede CA, considerando suas restrições físicas e operacionais. Deste modo, o despacho de potências ativa e reativa é realizado por meio de um processo iterativo com o objetivo de minimizar o custo total de oportunidade, denotado por O . Seja Pr_i o lucro do gerador i quando é suprida potência reativa, e Pg_i é a potência ativa fornecida pelo gerador i , e que

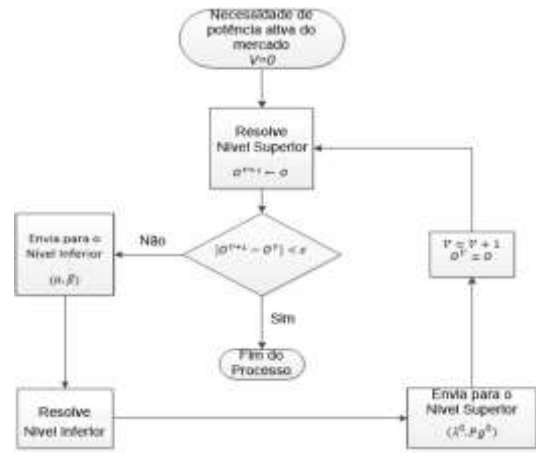


Fig. 2. Representação do processo iterativo de solução do modelo binível.

seja factível para as restrições da rede CA, a equação (35) expressa essa condição:

$$Pr_i = \lambda_i^o Pg_i - \left(\frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i)^2 + \beta_i Pg_i \right) \quad (35)$$

Na equação (35), α_i e β_i são variáveis do primeiro nível de um problema binível. A equação (36) representa a oportunidade O_i , que é igual ao somatório da diferença entre o lucro do gerador i quando se considera o modelo da rede CD e quando a potência reativa é gerada.

$$O = \sum_{i=0}^n O_i = \sum_{i=0}^n (Pr_i^o - Pr_i) \quad (36)$$

onde,

$$\begin{aligned} (Pr_i^o - Pr_i) &= \left[\lambda_i^o Pg_i^o - \left(\frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i^o)^2 + b_i Pg_i^o \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[\lambda_i^o Pg_i - \left(\frac{1}{2} \alpha_i (Pg_i)^2 + \beta_i Pg_i \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (37)$$

O problema (33) e as equações e (38)–(46) representam o problema de otimização binível [4]. Este modelo é modificado nas próximas seções não considerando as restrições (41) e (43), de modo que, possa ser apresentado como um modelo convexo binível, bem como um modelo unível convexo por meio da teoria da dualidade forte.

$$\min_x O = \sum_{i=1}^n [Pr_i^o - Pr_i] \quad (38)$$

sujeito a:

$$Pg_i - Pd_i - P_i(V, \delta, t) = 0 \quad (39)$$

$$Qg_i - Qg_i - Q_i(V, \delta, t) = 0 \quad (40)$$

$$|f_{lik}(V, \delta, t)| \leq f_{lik}^{max} \quad (41)$$

$$\underline{V}_i \leq V_i \leq \overline{V}_i \quad (42)$$

$$0 \leq Pg_i \leq Pg_i^M(Qg_i) \quad (43)$$

$$\underline{Qg}_i \leq Qg_i \leq \overline{Qg}_i \quad (44)$$

$$\underline{\alpha}_i \leq \alpha_i \leq \overline{\alpha}_i \quad (45)$$

$$\underline{\beta}_i \leq \beta_i \leq \overline{\beta}_i \quad (46)$$

os valores de (λ_i^o, Pg_i^o) são determinados pela solução do problema (33). Onde $P_i(\cdot)$ e $Q_i(\cdot)$ são as injeções de potências ativa e reativa.

B. Técnicas de Soluções do Problema de Otimização Binível

Nesta subsecção apresentam-se as estratégias propostas para solução do modelo binível do problema de despacho de potência ativa em mercados de energia. Os problemas de programação binível são intrinsecamente difíceis de resolver,

mesmo na sua versão mais simples, considerando funções objetivo e restrições lineares, sendo que os problemas de programação binível são NP (*nondeterministic polynomial time*) difíceis [25]. Alguns autores, considerando a geometria da região induzida, têm proposto condições de otimalidade para esses problemas. Porém, essas condições somente são aplicáveis quando o problema do nível inferior é estritamente convexo [26].

C. Solução Iterativa dos Problemas dos Níveis Superior e Inferior

A interação entre o problema do nível inferior (33) e o problema do nível superior (38)–(46) que está ilustrada na Fig. 2 pode ser descrita da seguinte forma: no início do processo de solução os valores de α_i e β_i são fornecidos para o nível inferior que minimiza o padrão de geração, considerando a quantidade disponível de potência ativa do gerador, a restrição de balanço de potência e os limites físicos de operação para o modelo de fluxo de potência CD, problema (33).

Resolvendo-se o problema de nível inferior (33) obtêm-se os valores ótimos de (λ^0, Pg^0) que são parâmetros do problema do nível superior (38)–(46), que leva em consideração as restrições da rede real do modelo CA, modifica o preço de potência ativa bem como a geração de potência ativa e reativa, e o sistema restante de variáveis de modo a minimizar o custo de oportunidade. Assim, todos esses estágios são executados de forma iterativa durante a solução do modelo binível, este processo iterativo é finalizado quando a função que minimiza o custo de oportunidade deixa de melhorar com as variáveis (λ^0, Pg^0) fornecidas pelo modelo de nível inferior. Desta forma, o critério de parada para a heurística é quando $|0^{V+1} - 0^V| < \epsilon$, sendo V o número de iterações e 0^V o custo de oportunidade na iteração V , e ϵ uma tolerância preestabelecida.

D. Solução do Modelo Binível em um Único Nível Através da Teoria da Dualidade Forte

O modelo iterativo convexo resolvido em IV-C, é manipulado algebricamente para o problema de competição ser formulado como um problema de apenas um nível, sendo que a vantagem desta técnica em comparação à solução iterativa dos subproblemas dos níveis inferior e superior está no fato que os competidores, neste caso, os geradores e o mercado comprador, não precisam esconder suas apostas (ofertas, as oportunidades ocorrem baseadas na necessidade do mercado e nas ofertas). O modelo deixa de ser iterativo para ser resolvido em um único nível, da seguinte forma, o segundo nível é manipulado algebricamente via dualidade forte e incorporado ao primeiro nível como uma nova restrição. Devido a esse acoplamento com a nova restrição os parâmetros (λ^0, Pg^0) que no modelo binível são fornecidos pelo nível inferior ao nível superior agora são variáveis bilineares no modelo unível, ou seja $\lambda^0 Pg^0$. Este fato, traz uma dificuldade adicional ao problema, porque o FPO-CA e as variáveis bilineares são NP- difícil, e a dificuldade é aumentada devido ao fato que manter a dualidade forte é uma tarefa desafiadora.

As equações de (47)–(48) e (51)–(70) são a formulação primal completa da formulação (33). As equações (49), (71)–(85) representam o modelo dual da formulação (33). A equação (50) representa a relação primal igual à dual da função objetivo, condição necessária para garantir o uso da dualidade forte e

apresentar o problema de despacho ótimo de potências ativa e reativa como um problema de competição via programação binível em apenas um nível.

$$\min_{Pg_i^0, P g_i^{02}, r_{ij}^0, \delta_i^0} \sum_{i \in \Omega_B} \frac{1}{2} \alpha_{oi} P g_i^{02} + \beta_{oi} P g_i^0 \quad (47)$$

$$P g_i^0 - \sum_{ij \in \Omega_L} \left(f_{ij}^0 + \frac{1}{2} r_{ij}^0 \right) + \sum_{j \in \Omega_L} \left(f_{ji}^0 - \frac{1}{2} r_{ji}^0 \right) = P d_i, \quad (48)$$

$$\forall i \in \Omega_B: \pi_i$$

Modelo matemático Dual do Despacho Econômico:

$$\max_{\pi, \lambda, \alpha, \phi, \theta, \eta, \tau, \sigma, \bar{\kappa}, \underline{\kappa}, \bar{l}, \bar{v}, \underline{v}, \bar{\varphi}, \underline{\varphi}, \bar{\beta}, \underline{\beta}} \sum_{i \in \Omega_B} \left(P d_i \pi_i + \overline{P g_i^0} \bar{\kappa}_i - \underline{P g_i^0} \underline{\kappa}_i + \sum_{y \in Y} \Delta_i^p \bar{\varphi}_{y,i} \right) \quad (49)$$

$$+ \sum_{ij \in \Omega_L} \left(\bar{f}_{ij}^0 \bar{l}_{ij} + \bar{f}_{ij}^0 \bar{l}_{ij} + \bar{\delta}_i^0 \bar{\delta}_{ij} - \underline{\delta}_i^0 \underline{\beta}_{ij} \right)$$

Nova restrição que surge da união das funções objetivo dos problemas primal menos a do dual é dada pela equação (46).

$$\sum_{i \in \Omega_B} \frac{1}{2} (\alpha_{oi} P g_i^{02} + \beta_{oi} P g_i^0) - \sum_{i \in \Omega_B} \left(P d_i \pi_i + \overline{P g_i^0} \bar{\kappa}_i - \underline{P g_i^0} \underline{\kappa}_i + \sum_{y \in Y} \Delta_i^p \bar{\varphi}_{y,i} \right) \quad (50)$$

$$+ \sum_{ij \in \Omega_L} \left(\bar{f}_{ij}^0 \bar{l}_{ij} + \bar{f}_{ij}^0 \bar{l}_{ij} + \bar{\delta}_i^0 \bar{\delta}_{ij} - \underline{\delta}_i^0 \underline{\beta}_{ij} + \sum_{y \in Y_1} \Delta_{ij}^{\delta} \bar{w}_{y,i} \right) = 0$$

$$f_{ij}^0 + B_{ij} (\delta_i^0 - \delta_j^0) = 0, \forall ij \in \Omega_L: \lambda_{ij} \quad (51)$$

$$\delta_i^0 = 0, \forall i \in \Omega_B / Slack: \alpha_i \quad (52)$$

$$P g_i^{02} - \sum_{y=1}^Y m_{y,i}^p \Delta_{y,i}^p = 0, \forall i \in \Omega_B: \varphi_{y,i} \quad (53)$$

$$P g_i^0 - \sum_{y=1}^Y \Delta_{y,i}^p = 0, \forall i \in \Omega_B: \theta_i \quad (54)$$

$$r_{ij}^0 - G_{ij} (\delta_{ij}^{02}) = 0, \forall ij \in \Omega_L: \eta_{ij} \quad (55)$$

$$\delta_{ij}^{02} - \sum_{y=1}^Y m_{y,ij}^{\delta} \Delta_{y,ij}^{\delta} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \tau_{ij} \quad (56)$$

$$\delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^- - \sum_{y=1}^Y \Delta_{y,ij}^{\delta} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \varepsilon_{ij} \quad (57)$$

$$(\delta_i^0 - \delta_j^0) - \delta_{ij}^+ + \delta_{ij}^- = 0, \forall ij \in \Omega_L: \sigma_{ij} \quad (58)$$

$$P g_i^0 \leq \overline{P g_i^0}, \forall i \in \Omega_B: \bar{\kappa}_i \quad (59)$$

$$-P g_i^0 \leq -\underline{P g_i^0}, \forall i \in \Omega_B: \underline{\kappa}_i \quad (60)$$

$$f_{ij}^0 + \frac{1}{2} r_{ij}^0 \leq \bar{f}_{ij}^0, \forall ij \in \Omega_L: \bar{l}_{ij} \quad (61)$$

$$-f_{ij}^0 + \frac{1}{2} r_{ij}^0 \leq \underline{f}_{ij}^0, \forall ij \in \Omega_L: \underline{l}_{ij} \quad (62)$$

$$-\delta_{ij}^+ \leq 0, \forall ij \in \Omega_L: \bar{v}_{ij} \quad (63)$$

$$-\delta_{ij}^- \leq 0, \forall ij \in \Omega_L: \underline{v}_{ij} \quad (64)$$

$$\Delta_{y,i}^p \leq \bar{\Delta}_i^p, \forall i \in \Omega_B, y \in 1 \dots Y: \bar{\varphi}_{y,i} \quad (65)$$

$$-\Delta_{y,i}^p \leq \underline{\Delta}_i^p, \forall i \in \Omega_B, y \in 1 \dots Y: \underline{\varphi}_{y,i} \quad (66)$$

$$\Delta_{y_1,i}^{\delta} \leq \bar{\Delta}_i^{\delta}, \forall i \in \Omega_B, y_1 \dots Y_1: \bar{w}_{y_1,i} \quad (67)$$

$$-\Delta_{y_1,i}^{\delta} \leq 0, \forall i \in \Omega_B, y_1 \dots Y_1: \underline{w}_{y_1,i} \quad (68)$$

$$\delta_i^0 - \delta_j^0 \leq \bar{\delta}_i^0, \forall ij \in \Omega_L: \bar{\beta}_{ij} \quad (69)$$

$$-\delta_i^0 + \delta_j^0 \leq \underline{\delta}_i^0, \forall ij \in \Omega_L: \underline{\beta}_{ij} \quad (70)$$

$$\pi_i + \theta_i + \bar{\kappa}_i - \underline{\kappa}_i = \beta_i, \forall i \in \Omega_B: P g_i^0 \quad (71)$$

$$\phi_i = \frac{1}{2}\alpha_{oi}, \forall i \in \Omega_B: P g_i^{02} \quad (72)$$

$$-\pi_i + \pi_j + \lambda_{ij} + \bar{l}_{ij} - \underline{l}_{ij} \in \Omega_L: f_{ij}^0 \quad (73)$$

$$-\frac{1}{2}\pi_i - \frac{1}{2}\pi_j + \eta_{ij} + \frac{1}{2}\bar{l}_{ij} + \frac{1}{2}\underline{l}_{ij} \in 0, ij \in \Omega_L: r_{ij}^0 \quad (74)$$

$$\sum_{ij \in \Omega_L} (+B_{ij}\lambda_{ij} + \sigma_{ij} + \bar{\beta}_{ij} - \underline{\beta}_{ij}) + \quad (75)$$

$$+ \sum_{ji \in \Omega_L} (-B_{ji}\lambda_{ji} - \sigma_{ji} - \bar{\beta}_{ji} + \underline{\beta}_{ji}) = 0, \quad \forall i \in \Omega_B / i \neq \text{slack}: \delta_i^0$$

$$\alpha_{oi} + \sum_{ij \in \Omega_L} (+B_{ij}\lambda_{ij} + \sigma_{ij} + \bar{\beta}_{ij} - \underline{\beta}_{ij}) + \quad (76)$$

$$+ \sum_{ji \in \Omega_L} (-B_{ji}\lambda_{ji} - \sigma_{ji} - \bar{\beta}_{ji} + \underline{\beta}_{ji}) = 0, \quad \forall i \in \Omega_B / i = \text{slack}: \delta_i^0$$

$$-m_{y,i}^p \phi_i - \theta_i + \bar{\varphi}_{y,i} - \underline{\varphi}_{y,i} = 0, \forall i \in \Omega_B, y \in 1 \dots Y: \Delta_{y,i}^p \quad (77)$$

$$-G_{ij}\eta_{ij} + \tau_{ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \delta_{ij}^{02} \quad (78)$$

$$-m_{y,ij}^\delta \tau_{ij} - \varepsilon_{ij} + \bar{\omega}_{y,ij} - \underline{\omega}_{y,ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L, y_1 \in 1 \dots Y_1: \Delta_{y,ij}^\delta \quad (79)$$

$$\varepsilon_{ij} - \sigma_{ij} - \bar{v}_{ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \delta_{ij}^+ \quad (80)$$

$$\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} - \underline{v}_{ij} = 0, \forall ij \in \Omega_L: \delta_{ij}^- \quad (81)$$

$$\bar{\kappa}_i, \underline{\kappa}_i \leq 0, \forall i \in \Omega_B \quad (82)$$

$$\bar{l}_{ij}, \underline{l}_{ij}, \bar{v}_{ij}, \underline{v}_{ij}, \bar{\beta}_{ij}, \underline{\beta}_{ij} \leq 0, \forall ij \in \Omega_L \quad (83)$$

$$\bar{\varphi}_{y,i}, \underline{\varphi}_{y,i} \leq 0, \forall i \in \Omega_B, \forall y \in Y \quad (84)$$

$$\bar{\omega}_{y_1,ij}, \underline{\omega}_{y_1,ij} \leq 0, \forall ij \in \Omega_L, y_1 \in Y \quad (85)$$

Duas considerações importantes sobre a nova restrição (50) do problema unível proposto; a primeira está no fato que o uso da dualidade forte possibilita o problema binível ser modelado como unível, mas manter essa dualidade forte é uma tarefa desafiadora. Outro aspecto matemático é que agora o modelo primal CD do problema de otimização binível possui variáveis bilineares, devido a dualidade forte utilizada, ou seja, nesta abordagem (α, β) tornam-se variáveis. Por esse motivo, devem ser estabelecidos limites arbitrados para as variáveis (α, β) . Neste trabalho, os limites são fixados da seguinte maneira, $\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$ e $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$ em que $\bar{\alpha} = 2\alpha$ e $\bar{\beta} = 2\beta$. Uma consideração a ser feita sobre os limites mínimos e máximos é que eles representam os preços que o operador está disposto a pagar, sendo que em todos os testes conduzidos foi adotado esse padrão. Para contornar o problema com variáveis bilineares que aparecem no modelo foi utilizado os envelopes de *McCormick*. Outra dificuldade a ser destacada é o custo marginal (multiplicador de Lagrange) λ_0 , que teoricamente é uma variável irrestrita para as restrições de igualdade de acordo com as condições de KKT, mas λ_0 apresenta alta sensibilidade na solução geral do problema. Uma possibilidade explorada neste trabalho é o uso de análise de sensibilidade associada às restrições de igualdade para definir valores relaxados para estas variáveis, definindo os seus valores máximos e mínimos, $\underline{\lambda}_i^0 \leq \lambda_i^0 \leq \bar{\lambda}_i^0$. Escolhas impróprias destes multiplicadores podem levar à infactibilidade do problema, ou a resultados inconsistentes.

V. TESTES E RESULTADOS

Nos testes e resultados do problema de despacho ótimo de potência ativa convexo em mercados competitivos de energia, mostra-se que as técnicas propostas para a solução do modelo conduzem a um ótimo global. Desta forma, as propostas de otimalidade global não podem ser discutidas sem antes ter a

certeza de que existem ótimos locais, pois algoritmos de otimização global são técnicas que procuram encontrar ótimos globais, mas essas técnicas globais são muito mais lentas comparadas às locais, por isso só devem ser usadas para problemas onde os ótimos locais existem [27]. Os resultados são dados em p.u. e de agora em diante o custo total de potência ativa considerando a geração de potência reativa é definido como $f^* = \sum_i (\frac{1}{2}\alpha_i(Pg_i^0)^2 + \beta_i Pg_i^0)$, e considerando apenas a geração de potência ativa o custo total é dado por $f = \sum_i (\frac{1}{2}\alpha_i(Pg_i)^2 + \beta_i Pg_i)$. O problema de despacho econômico é abordado da seguinte forma:

- 1 Problema de otimização binível resolvido através do processo iterativo e de comunicação entre os níveis superior e inferior.
 - i Modelo de otimização de PNL;
 - ii Modelo de otimização convexo.
- 2 Modelo de otimização de um único nível formulado através da teoria da dualidade forte. (Modelo de otimização convexo)

As formulações são testadas e validadas considerando os sistemas testes da literatura IEEE14, e IEEE de 30 barras e, para fins de comparação com o modelo não linear e não convexo, o sistema de 2 barras encontrado em [4]. Os dados dos sistemas estão disponíveis em [30] Nestes sistemas testes, para o modelo binível de PNL no primeiro nível é utilizado o solver Knitro [28] e no segundo nível é utilizado o solver CPLEX. Para o modelo binível convexo é utilizado o solver Xpress no primeiro nível e o solver CPLEX para o segundo nível.

Os experimentos foram realizados usando um computador com processador Intel Core i7-6700 e 8 GB de memória RAM.

A. Sistema de 2 Barras

O sistema teste utilizado possui 2 barras e 2 geradores, 1 barra de carga com demandas de 220 MW e 110 MVar, a magnitude de tensão máxima é de 1,05 p.u. e a mínima é de 0,95 p.u. Os custos de geração da barra 1 são $a = 0$ (\$/pu²h) e $b = 1000$ (\$/pu²h), os custos de geração da barra 2 são iguais aos custos de geração da barra 1. Considere $\alpha = 0$, $1000 \leq \beta_1 \leq 1000$ e $1000 \leq \beta_2 \leq 1250$.

Para os dois modelos os valores obtidos para as variáveis ótimas ficaram próximos, mostrando a aderência e a validade do modelo binível convexo proposto.

Na TABELA I a potência ativa gerada Pg^0 , considerando o modelo de FPO-CD é a mesma para os dois modelos, as potências ativa e reativa quando se considera o modelo CA, apresenta algumas diferenças porque, embora o problema seja o mesmo, o comportamento dos dois modelos, pode ser diferente, em função do modelo não linear ser multimodal, principalmente, devido o subproblema reativo.

Na TABELA II, são apresentados os resultados fornecidos pelo modelo binível PNL e o modelo binível convexo, onde δ representa o ângulo, V a magnitude de tensão e δ^0 representa o ângulo do modelo de nível inferior apresentado em (33). Para o modelo binível PNL, utiliza-se para resolver o primeiro nível o solver SNOPT e para resolver o segundo nível é utilizado o solver CPLEX, pois o problema (33) é um modelo linearizado. Para solução do modelo binível convexo é utilizado o CPLEX nos dois níveis.

TABELA I
RESULTADOS DA GERAÇÃO

Barra	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	P^g	Q^g	P^{g0}	P^g	Q^g	P^{g0}
1	0,77	0,45	0,51	0,68	0,22	0,51
2	1,53	1,21	1,70	1,53	0,51	1,70

TABELA II
VALORES ÓTIMOS DAS VARIÁVEIS

Barra	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	δ (rad)	V	δ^0 (rad)	δ (rad)	V	δ^0 (rad)
1	0,00	1,02	0,00	0,00	1,05	0,00
2	-0,34	0,97	-0,10	-0,13	0,95	-0,10

TABELA III
LUCROS DOS GERADORES E A FUNÇÃO CUSTO DE OPORTUNIDADE

Barras	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	Pr^0 (\$/h)	Pr (\$/h)	O (\$/h)	Pr^0 (\$/h)	Pr (\$/h)	O (\$/h)
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	33,48	30,13	3,35	33,48	30,13	3,35

TABELA IV
COEFICIENTES DE TENSÃO E CUSTO MARGINAL

Barra	Modelo Binível PNL			Modelo Binível Convexo		
	α (rad)	β (rad)	λ_i^0 (\$/pu h)	α (rad)	β (rad)	λ^0 (\$/pu h)
1	0.00	1000,00	1000,00	0.00	1000,00	1000,00
2	0.00	1000,00	1019,69	0.00	1000,00	1019,69

TABELA V
SISTEMA IEEE14 - LUCROS DOS GERADORES E A FUNÇÃO CUSTO DE OPORTUNIDADE

Barra	Modelo binível PNL			Modelo binível convexo			Modelo um nível convexo		
	Pr^0 (\$/h)	Pr (\$/h)	O (\$/h)	Pr^0 (\$/h)	Pr (\$/h)	O (\$/h)	Pr^0 (\$/h)	Pr (\$/h)	O (\$/h)
1	0.00	-0.01	0.01	0.04	0.04	0.00	0.04	0.04	0.00
2	0.70	0.68	0.03	0.95	0.88	0.07	0.59	0.55	0.04
3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Na TABELA III os coeficientes fornecidos pelos dois modelos para os custos e os custos marginais são iguais. Na TABELA os valores fornecidos para os lucros, Pr^0 dos

geradores, sem considerar o modelo CA, e o lucro, Pr , considerando o modelo CA, são os mesmos. Na Tabela IV, quando se considera a rede CA, o modelo convexo proposto apresenta uma diferença no modelo binível PNL, mas a oportunidade apresenta o mesmo valor.

Os testes realizados na solução deste sistema contemplam, por exemplo, a combinação do uso dos solvers SNOPT e XPRESS, IPOPT e CPLEX, KNITRO e CPLEX, obtendo os mesmos resultados dos testes apresentados nesta seção. Os resultados obtidos são também os mesmos apresentados em [4]. Utilizou-se também o solver de otimização global BARON para testar a convexidade do nível 2, obtendo-se os mesmos resultados desta seção, reiterando na prática que o segundo nível do modelo é convexo.

B. Sistema de 14 Barras

Na Tabela V verifica-se que as oportunidades de geração estão para os geradores localizados nas barras 1 e 2. Analisando-se os resultados fornecidos pelos modelos binível, observa-se que os resultados do modelo binível convexo diferem do modelo PNL, apresentando valores superiores. Neste caso, considera-se que os resultados fornecidos pelo modelo de programação binível devem ser assumidos como os mais confiáveis e precisos

Na Tabela VI são apresentadas as magnitudes de tensão, custos marginais e os coeficientes de custos obtidos pelos modelos binível PNL, binível convexo e convexo unível obtido através da teoria da dualidade forte.

Na Tabela VII os valores das potências ativa e reativa geradas fornecidas pelos dois modelos são próximos, a diferença está no fato que o modelo binível convexo é um modelo relaxado que obtém solução ótima global.

C. Sistema de 30 Barras

Os dados do sistema teste IEEE30 barras modificado são encontrados em [29]. Estas alterações nos dados do sistema foram necessárias para obter um modelo convexo de programação binível adequado para o desempenho do solver utilizado. Neste sistema de 30 barras, consideram-se 6 barras de geração, 21 barras de cargas, 2 capacitores shunts e 4 transformadores com controle automático de taps.

TABELA VI.
SISTEMA IEEE14 - MAGNITUDE DE TENSÃO, CUSTO MARGINAL E COEFICIENTES DE CUSTOS

Gerador	Modelo binível PNL				Modelo binível convexo				Modelo um nível convexo			
	V_i	λ_i^0	α_i	β_i	V_i	λ_i^0	α_i	β_i	V_i	λ_i^0	α_i	β_i
1	1.06	20.06	0.04	20.00	1.06	20.06	0.04	20.00	1.046	20.06	0.04	20.00
2	1.049	20.85	0.25	20.00	1.049	20.85	0.25	20.00	1.034	20.60	0.25	20.00
3	1.015	22.63	0.02	46.03	1.017	22.63	0.01	59.63	0.998	22.48	0.01	59.90
6	1.052	21.97	0.02	45.84	1.054	21.97	0.01	59.64	1.07	21.69	0.01	59.90
8	1.06	22.42	0.02	46.47	1.060	22.42	0.01	59.63	1.026	22.03	0.01	59.85

TABELA VII.
SISTEMA IEEE14 - DADOS DE GERAÇÃO

Barra	Modelo binível PNL			Modelo binível convexo			Modelo um nível convexo		
	P^g	Q^g	P^{g0}	P^g	Q^g	P^{g0}	P^g	Q^g	P^{g0}
1	143.10	0.00	131.36	142.88	0.00	131.36	144.80	7.073	130.05
2	126.00	27.95	140.00	126.00	28.18	140.00	125.79	45.75	140.00
3	0.00	30.92	0.00	0.00	31.60	0.00	0.00	37.15	0.00
6	0.00	14.78	0.00	0.00	14.78	0.00	0.00	15.44	0.00
8	0.00	15.72	0.00	0.00	15.39	0.00	0.00	23.21	0.00
Total	269.11	89.36	271.36	268.88	89.95	271.36	270.59	128.61	270.05

TABELA VIII
SISTEMA IEEE30 MODIFICADO - MAGNITUDE DE TENSÃO, CUSTO MARGINAL E COEFICIENTES DE CUSTOS

Gerador	Modelo binível PNL				Modelo binível convexo				Modelo um nível convexo			
	V_i	λ_i^0	α_i	β_i	V_i	λ_i^0	α_i	β_i	V_i	λ_i^0	α_i	β_i
1	1.045	2.01	0.02	2.00	1.046	2.01	0.02	2.00	1.046	2.01	0.02	2.00
2	1.038	2.07	0.02	1.75	1.040	2.07	0.02	1.75	1.040	2.03	0.02	1.75
13	1.05	2.20	0.04	3.54	1.050	2.20	0.03	3.00	1.05	2.13	0.04	3.00
22	1.05	2.03	0.06	1.00	1.050	2.03	0.06	1.00	1.05	2.05	0.06	1.00
23	1.041	2.19	0.03	3.00	1.041	2.19	0.03	3.00	1.04	2.14	0.04	3.00
27	1.05	2.18	0.01	3.84	1.050	2.18	0.01	4.87	1.05	2.13	0.01	3.25

TABELA IX.
SISTEMA IEEE30 MODIFICADO - DADOS DE GERAÇÃO

Barra	Modelo binível PNL			Modelo binível convexo			Modelo um nível convexo		
	P^g	Q^g	P^{g0}	P^g	Q^g	P^{g0}	P^g	Q^g	P^{g0}
1	72.00	6.25	70.04	72.00	6.79	70.04	72.00	6.80	64.80
2	72.00	31.95	80.00	72.00	32.42	80.00	72.00	32.42	80.00
13	0.00	4.4.50	0.00	1.30	3.08	0.00	1.67	3.09	0.00
22	45.00	24.25	50.00	45.00	26.45	50.00	45.00	26.53	50.00
23	4.32	7.74	0.00	2.91	8.00	0.00	1.25	8.02	0.00
27	0.00	13.70	0.00	0.00	12.21	0.00	1.30	12.05	0.00
Total	193.32	88.37	200.04	193.20	88.95	200.04	193.22	88.91	194.80

TABELA X.
SISTEMA IEEE30 MODIFICADO - LUCROS DOS GERADORES E VALOR DA FUNÇÃO CUSTO DE OPORTUNIDADE

Barra	Modelo binível PNL			Modelo binível convexo			Modelo um nível convexo		
	Pr^0	Pr	O	Pr^0	Pr	O	Pr^0	Pr	O
	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)	(\$/h)
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01
2	0.24	0.22	0.02	0.25	0.22	0.02	0.21	0.19	0.02
13	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
22	0.50	0.45	0.05	0.51	0.46	0.05	0.52	0.47	0.05
23	0.00	-0.04	0.04	0.00	-0.02	0.02	0.00	0.00	0.00
27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.01

Os resultados apresentados na Tabela VIII para os três modelos testados têm a mesma ordem de grandeza,

considerando que os modelos propostos apresentam diferenças significativas de modelagem. O modelo binível de FPO-CA é um problema de PNL não convexo, e os resultados obtidos através deste modelo comparados com os resultados fornecidos pelo modelo binível convexo apresentam a mesma ordem de grandeza. Da mesma forma, os resultados obtidos com o modelo de um nível totalmente convexo também apresentam boa precisão. O custo marginal λ^0 que é uma variável bem sensível não apresentou grandes diferenças entre elas para todos os modelos simulados. Na barra de referência do sistema, a barra 1, os resultados são os mesmos para os modelos convexas binível e de um nível, sendo que existe uma pequena diferença na magnitude de tensão da barra de referência, V_1 , entre estes modelos e o modelo binível não linear.

Na Tabela IX a geração total de potências ativa e reativa apresentaram resultados bem próximos mostrando a estabilidade numérica e robustez dos três modelos analisados. O Pg total, que é a potência ativa gerada pela oportunidade diferem um pouco no modelo em um nível, e, devido a convexidade do modelo e a dualidade forte estes resultados apresentam ser mais confiáveis. O subproblema reativo apresenta resultados consistentes para os três modelos testados.

Na Tabela X apresentam-se os custos de oportunidades, considerando os modelos CA e CD da rede. Os modelos

apresentam resultados que estão de acordo com as características dos modelos propostos e dos critérios de convergência adotados para os modelos. A solução do modelo binível de PNL, é uma técnica heurística e não pode garantir a obtenção de soluções ótimas globais, e, portanto, apresenta uma diferença nos custos de oportunidades quando se comparam os seus resultados com os obtidos através dos outros modelos. Os resultados do modelo binível convexo são considerados os mais precisos e que devem ser adotados como padrão.

VI. CONCLUSÕES

Neste trabalho, é proposta a resolução do problema de FPO-CA para redes de geração e transmissão como um modelo convexo. Como o problema de FPO-CA é um problema não linear e não convexo classificado como *NP-difícil*, abordá-lo como um modelo convexo é importante sob os aspectos práticos e teóricos, pois permite a utilização de *solvers* de otimalidade global, para de obter o ótimo global.

No problema de FPO-CA apresentado de forma equivalente, como um problema cônico de segunda ordem, elimina-se de forma satisfatória boa parte dos obstáculos que tornam o FPO-CA *NP-difícil*. Como uma penalidade de usar o modelo equivalente cônico, surge uma nova restrição de igualdade com termo trigonométrico. Esse problema é resolvido utilizando o conceito de envelopes, em que, o termo não linear e não convexo é aproximado por quatro planos no espaço. Assim, o modelo proposto é resolvido utilizando *solvers* comerciais com resultados satisfatórios para os sistemas testes da literatura, neste caso, os sistemas IEEE 14 e 30 barras.

A não convexidade do problema de FPO-CA removida do modelo torna possível utilizá-lo em diversos problemas do sistema elétrico de potência. A opção deste trabalho em utilizar o modelo convexo de FPO-CA proposto em um problema de competição binível se justifica, pois, problemas deste tipo são *NP-difícil*. Quando o problema proposto binível é um modelo convexo os resultados obtidos são confiáveis devido ao fato de atender todas as condições matemáticas necessárias e suficientes de KKT.

Os resultados obtidos com os sistemas testes simulados da literatura para os quatro modelos propostos para o problema de competição via programação binível no despacho de potência ativa e reativa apresentam resultados satisfatórios mesmo que os sistemas testes sejam ainda de pequeno porte, permitindo o desenvolvimento de novas frentes de pesquisa na área de otimização convexa para solução do problema de FPO-CA e suas aplicações práticas na indústria de eletricidade. A justificativa se dá pelo fato que, neste trabalho foram abordados três problemas *NP-difícil*, a saber, FPO-CA, programação binível e variáveis bilineares. O problema unível convexo junta-se as três dificuldades *NP-difícil* e adiciona mais uma com o conceito matemático de dualidade forte, tornando-o um problema complexo em que é resolvido obtendo resultados de qualidade e factíveis operacional e fisicamente. Um aspecto importante dos modelos convexos para solução do FPO-CA é a factibilidade das soluções obtidas por esses modelos para o subproblema reativo.

O modelo convexo pode apresentar soluções que são inactíveis para as equações de balanço de potência reativa, ou seja, soluções que são ótimas para o modelo convexo, mas não atendem as restrições de clássicas do problema de fluxo de potência com relação ao subproblema reativo.

AGRADECIMENTOS

This work was supported by the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), code 001, the Brazilian National Council for Scientific and Technological Development (CNPq) under grant 304726/2020-6, and the São Paulo Research Foundation (FAPESP), under grants 2019/01841-5, 2019/23755-3, and 2015/21972-6.

REFERÊNCIAS

- [1] J. M. Jacobs, "Artificial Power Markets and Unintended Consequences," 1997.
- [2] G. A. Stern, J. H. Yan, P. B. Luh, and W. E. Blankson, "What Objective Function Should Be Used for Optimal Auctions in the ISO/RTO Electricity Market?," in *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2006.
- [3] R. Fernández-Blanco, J. M. Arroyo, and N. Alguacil, "A unified bilevel programming framework for price-based market clearing under marginal pricing," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 517–525, Feb. 2012.
- [4] K. C. Almeida and F. S. Senna, "Optimal Active-Reactive Power Dispatch Under Competition via Bilevel Programming," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 26, no. 4, pp. 2345–2354, Nov. 2011.
- [5] H. W. Dommel and W. Tinney, "Optimal power flow solutions," *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. pas-87, no. 10, pp. 1866–1876, 1968.
- [6] D. I. Sun, B. Ashley, B. Brewer, A. Hughes, and W. F. Tinney, "Optimal power flow by newton approach," *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. PAS-103, no. 10, pp. 2864–2880, 1984.
- [7] G. Torres; V.H. Quintana, "An interior-point method for non-linear optimal power flow using voltage rectangular coordinates", *IEEE Trans. Power. Systems*, New York, PWRS-13, n.4, p. 1211-1218, 1998
- [8] W.D. Rosehart, C.A. Cañizares and V.H. Quintana, V. H., "Multiobjective optimal power flow to evaluate voltage security costs in power networks;" *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, no. 2, pp.578-587, 2003.
- [9] L.L.Lai, J.T Ma, R. Yokoyama, M. Zhao, "Improved genetic algorithms for optimal power flow under both normal and contingent operation states", *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Piscataway, v. 19, n. 5, p. 287-292, 1997.
- [10] G. Bakirtzis, P.N. Biskas, C.E. Zoumas, and V. Petridis, "Optimal power flow by enhanced genetic algorithm," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, 2002.
- [11] Abido, M. A., and N. A. Al-Ali. "Multi-objective differential evolution for optimal power flow." 2009 *International Conference on Power Engineering, Energy and Electrical Drives. IEEE*, 2009.
- [12] E. A. Amorim, S.H.M. Hashimoto, F.G.M. Lima, J.R.M. Mantovani, "Multi objective evolutionary algorithm applied to the optimal power flow problem", *IEEE Latin America Transactions*, vol. 8, no. 3, pp. 236-244, 2010.
- [13] J. R. S. Mantovani, S. a. G. Modesto, and a. V. Garcia, "VAr planning using genetic algorithm and linear programming," *IEE Proc. - Gener. Transm. Distrib.*, vol. 148, no. 3, p. 257, 2001.
- [14] J.M Home Ortiz, W.C. de Oliveira, J. R.S. Mantovani, "Optimal Power Flow Problem Solution Through a Matheuristic Approach", *IEEE Access*, vol. 9, 2021.
- [15] J. Lavaei and S. H. Low, "Zero duality gap in optimal power flow problem," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 27, no. 1, pp. 92–107, Feb. 2012.
- [16] D. K. Molzahn, J. T. Holzer, B. C. Lesieutre, and C. L. DeMarco, "Implementation of a large-scale optimal power flow solver based on semidefinite programming," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 4, pp. 3987–3998, 2013.
- [17] S. H. Low, "Convex relaxation of optimal power flow—Part I: Formulations and equivalence," *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, vol. 1, no. 1, pp. 15–27, Mar. 2014.
- [18] S. H. Low, "Convex relaxation of optimal power flow—Part II: Exactness," *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, vol. 1, no. 2, pp. 177–189, Jun. 2014.
- [19] X. Bai, H. Wei, K. Fujisawa, and Y. Wang, "Semidefinite programming for optimal power flow problems", *Journal of Electric Power & Energy Systems*, V. 30, No. 6, 2008.
- [20] A. J. Wood, B. F. Wollenberg, and G. B. Sheblé, *Power generation, operation, and control*. John Wiley & Sons, 2013.
- [21] F. D. Galiana, A. L. Motto, and F. Bouffard, "Reconciling social welfare, agent profits, and consumer payments in electricity pools," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, no. 2, pp. 452–459, May 2003.
- [22] R. A. Jabr, "Optimal power flow using an extended conic quadratic formulation," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 23, no. 3, pp. 1000–1008, Aug. 2008.
- [23] G. P. McCormick, "Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part I—Convex underestimating problems," *Math. Program.*, vol. 10, pp. 147-175, 1976.
- [24] P. M. Castro, "Tightening piecewise McCormick relaxations for bilinear problems," *Comput. Chem. Eng.*, vol. 72, pp. 300–311, Jan. 2015.
- [25] B. Colson, P. Marcotte, and G. Savard, "An overview of bilevel optimization," *Ann. Oper. Res.*, vol. 153, no. 1, pp. 235–256, Sep. 2007.
- [26] V. V. Kalashnikov, S. Dempe, G. A. Pérez-Valdés, N. I. Kalashnykova, and J.-F. Camacho-Vallejo, "Bilevel programming and applications," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2015, pp. 1–16, 2015.
- [27] W.A. BUKHSH, A. Grothey, K.I.M. McKinnon, P.A. Troden, "Local solutions of the optimal power flow problem" *IEEE Transactions on Power Systems*, Piscataway, v. 28, n. 4, p. 4780-4788, 2013.
- [28] Artelys, "Knitro." [Online]. Available: <https://www.artelys.com/solvers/knitro/>.
- [29] O. Alsac and B. Stott, "Optimal Load Flow with Steady-State Security," *IEEE Trans. Power Appar. Syst.*, vol. PAS-93, no. 3, pp. 745–751, May 1974.
- [30] [Online]. Available: <https://drive.google.com/drive/folders/10trw5oLL131GhQNYwW63a5QFp9ic5Daz?usp=sharing>.



Mauro Viegas da Silva received the B.Sc. degree in Mathematics from the Mato Grosso Federal University in 1999, M.Sc. in Mathematics, and Ph.D. in electrical engineering from the São Paulo State University, Brazil, in 2011 and 2018, respectively. He is currently a professor at Mato Grosso Federal University. His research interests include the development of methodologies for the optimization, planning, and control, of electrical power systems.



Juan M. Home-Ortiz received the B.Sc. and M.Sc. degrees in electrical engineering from the Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia, in 2011 and 2014, respectively, and the Ph.D. degree in electrical engineering from the São Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil, in 2019. Currently, he is carrying out postdoctoral research with the UNESP.

His research interests include the development of methodologies for the optimization, planning, and control, of electrical power systems.



Mahdi Pourakbari-Kasmaei (S'10–M'15–SM'19) received his Ph.D. degree in electrical engineering, power systems, from the Universidad Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, Brazil in 2015. He was a postdoctoral fellow at UNESP and also a visiting researcher at Universidad de Castilla-La Mancha, Spain, for about 15

months. He was a project executive of three practical projects, PI of three academic projects, and also a consultant in an electric power distribution company. Currently, he is with the Department of Electrical Engineering and Automation, Aalto University, Finland. He is also the Chairman of IEEE PES Finland IE13/PE31/34/PEL35 Joint Chapter. His research interests include power systems planning, operations, economics, and environmental issues.



José Roberto Sanches Mantovani (M'06) received the B.Sc. degree from the Sao Paulo State University (UNESP), Ilha Solteira, Brazil, in 1981, and the M.Sc. and Ph.D. degrees from the University of Campinas, Campinas, Brazil, in 1987 and 1995, respectively, all in electrical engineering. He is currently a Professor

with the Department of Electrical Engineering, UNESP. His research interests include the development of methodologies for the optimization, planning, and control of electrical power systems, and applications of artificial intelligence in power systems.