

Sliding Mode Control with Gaussian Process Regression for Underactuated Mechanical Systems

Gabriel S. Lima and Wallace M. Bessa

Abstract—This work introduces a new control scheme for uncertain underactuated mechanical systems. The proposed approach is mainly based on sliding mode control, but a Gaussian process regressor is also embedded in the control law for uncertainty estimation and compensation. The convergence properties of the closed-loop signals are analytically proved by means of the Lyapunov stability theory. Numerical simulations with an inverted pendulum on a cart are presented to confirm the improved performance of the proposed control scheme.

Index Terms—Gaussian process regression, intelligent control, inverted pendulum, sliding modes, underactuated systems.

I. INTRODUÇÃO

Um sistema mecânico é dito subatuado se houver mais graus de liberdade a serem controlados do que entradas de controle independentes. Sistemas mecânicos subatuados (UMS, *Underactuated Mechanical Systems*) desempenham um papel essencial em vários ramos da indústria e sua aplicabilidade varia de manipuladores robóticos e pontes rolantes a veículos aeroespaciais e embarcações [1]–[4].

Contudo, apesar do amplo espectro de aplicações [5], o problema de projetar controladores precisos para sistemas subatuados é, no entanto, mais complicado do que para os totalmente atuados. Além disso, o comportamento dinâmico de um UMS é frequentemente incerto e altamente não linear, o que faz com que o projeto de estratégias de controle para tais sistemas seja um desafio para os métodos convencionais. Assim sendo, muito esforço tem sido empregado para aprimorar tanto a estabilização quanto o rastreamento de trajetória dos UMS. Diversas estratégias tem sido utilizadas com esse propósito: linearização por realimentação [6], abordagens adaptativas [7], controle por modos deslizantes (SMC, *Sliding Mode Control*) [3], [8], entre outros métodos [9]–[11].

O controle inteligente, por sua vez, já se mostrou uma abordagem atraente para lidar com sistemas não lineares incertos [12]–[16]. Aliás, é nesse contexto de controladores inteligentes que o SMC vem sendo também utilizado [17], por se tratar de uma estratégia já bem estabelecida na literatura e pelo fato de garantir robustez, ou seja, ser capaz de lidar com incertezas de modelagem e perturbações externas, podendo ser aplicada em diversos tipos de problema [18]. No entanto, uma desvantagem bem conhecida do controlador por modos deslizantes convencional é o efeito de chaveamento. Embora uma camada limite adequadamente projetada tenha a capacidade de eliminar completamente esse problema, a adoção dessa estratégia transforma o rastreamento perfeito em um

rastreamento com precisão garantida [19], [20]. Por isso que a adoção de compensadores é uma abordagem utilizada para reduzir, ou até mesmo eliminar, erros residuais gerados por esse controlador suavizado [21]–[23]. Em se tratando de UMS, o SMC tem sido combinado com estratégias inteligentes para compensar incertezas no modelo e efeitos externos ocasionais que podem interferir no desempenho do sistema, como por exemplo em [22], onde essa técnica foi combinada com uma estratégia adaptativa baseada na lógica *fuzzy*.

Vale ainda ressaltar que compensadores baseados em regressão por processo gaussiano (GPR, *Gaussian Process Regression*) podem ser úteis, tendo em vista a sua capacidade de formar distribuições preditivas [24]. O processo gaussiano pode ser entendido como uma extensão da distribuição gaussiana de variáveis aleatórias sobre o espaço de funções [25]. A GPR pode ser adotada como um modelo não paramétrico para representar funções desconhecidas e estimar tanto incertezas estruturadas como não estruturadas. Por exemplo, GPR tem sido combinada com o Regulador Quadrático Linear (LQR, *Linear Quadratic Regulator*) [26], [27] e controle ativo com rejeição de perturbação (ARDC, *Active Disturbance Rejection Control*) [28] para encontrar os parâmetros livres dos controladores a partir de dados experimentais.

Neste trabalho propõe-se a utilização de modos deslizantes suavizados combinado com regressão por processo gaussiano para o controle de sistemas mecânicos subatuados e incertos. O algoritmo GPR é introduzido para compensar as incertezas associadas à dinâmica não modelada e a perturbações externas e, diferentemente das outras abordagens citadas, também permite estimar o intervalo de variação dessa incerteza para que assim seja utilizada como forma de garantia de robustez do controlador. Esse tipo de associação do controlador SMC com GPR foi utilizada por Aran e Unel [29] para o controle de um motor a diesel utilizando treinamento *offline* para definir os termos da lei de controle. Neste trabalho, no entanto, é utilizado o método de janela deslizante para permitir que o compensador possa aprender *online* ao interagir com o ambiente. É importante destacar que estratégias semelhantes já vêm sendo aplicadas com sucesso em sistemas completamente atuados, como no caso do posicionamento dinâmico de veículos subaquáticos [30], [31], mas ainda não haviam sido empregadas no controle de sistemas subatuados. Para avaliar o desempenho da abordagem proposta, foi escolhido o pêndulo invertido, por se tratar de um sistema subatuado clássico. As propriedades de convergência dos sinais em malha fechada foram investigadas por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov. Simulações numéricas ilustram o desempenho superior do esquema de controle proposto.

Gabriel S. Lima is with the RoboTeAM – Robotics & Machine Learning, Federal University of Rio Grande do Norte, Brazil, limagabriel@ufrn.edu.br.

Wallace M. Bessa is with the Department of Mechanical and Materials Engineering, University of Turku, Finland, wmobes@utu.fi.

II. CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES COM REGRESSÃO POR PROCESSO GAUSSIANO

Nesta seção são apresentados: (A) o controlador por modos deslizantes para sistemas subatuados; (B) a regressão por processo gaussiano como forma de compensação de incertezas; e (C) uma análise de estabilidade do controlador proposto.

A. Controle por Modos Deslizantes para Sistemas Subatuados

Um sistema mecânico incerto com n graus de liberdade pode escrito na seguinte forma:

$$(M + \Delta M)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f} + \Delta \mathbf{f} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (1)$$

sendo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de coordenadas generalizadas, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia, $\Delta M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz associada às incertezas de M , $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ o vetor que engloba os efeitos centrífugos, de Coriolis e de forças generalizadas aplicadas, $\Delta \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ o vetor que representa as incertezas em relação a \mathbf{f} , $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ o vetor com os sinais dos atuadores. O sistema é dito totalmente atuado se $m = n$ e subatuado se $m < n$.

Fazendo $\mathbf{B} = [I_m \mathbf{0}]^\top$, onde I_m é a matriz identidade de ordem m , a equação (1) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{au} \\ M_{au}^\top & M_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_a + \mathbf{u} \\ \mathbf{f}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_a \\ \mathbf{p}_u \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde \mathbf{q}_a e \mathbf{q}_u representam, respectivamente, as coordenadas atuadas e não atuadas, M_{aa} , M_{au} , e M_{uu} são os termos correspondentes da matriz de inércia, \mathbf{f}_a e \mathbf{f}_u são as componentes associadas a \mathbf{f} , e $[\mathbf{p}_a^\top \mathbf{p}_u^\top]^\top = \Delta \mathbf{f} - \Delta M \ddot{\mathbf{q}}$ é o vetor representando todas as incertezas do sistema, aqui chamado de vetor de perturbação.

Deste modo, Ashrafiuon e Erwin [8] sugerem resolver a equação (2) para as acelerações na forma:

$$\ddot{\mathbf{q}}_a = M_{aa}'^{-1}(\mathbf{f}'_a + \mathbf{u} + \mathbf{p}'_a), \quad (3a)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_u = M_{uu}'^{-1}(\mathbf{f}'_u - M_{au}^\top M_{aa}'^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{p}'_u), \quad (3b)$$

onde,

$$M_{aa}' = M_{aa} - M_{au} M_{uu}^{-1} M_{au}^\top, \quad (4a)$$

$$M_{uu}' = M_{uu} - M_{au}^\top M_{aa}'^{-1} M_{au}, \quad (4b)$$

$$\mathbf{f}'_a = \mathbf{f}_a - M_{au} M_{uu}^{-1} \mathbf{f}_u, \quad (4c)$$

$$\mathbf{f}'_u = \mathbf{f}_u - M_{au}^\top M_{aa}'^{-1} \mathbf{f}_a, \quad (4d)$$

$$\mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a - M_{au} M_{uu}^{-1} \mathbf{p}_u, \quad (4e)$$

$$\mathbf{p}'_u = \mathbf{p}_u - M_{au}^\top M_{aa}'^{-1} \mathbf{p}_a. \quad (4f)$$

Definindo o erro de rastreamento $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^d$, onde \mathbf{q}^d é trajetória desejada, pode-se propor uma superfície de deslizamento $\mathbf{s}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ conforme [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \alpha_a \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_a + \alpha_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u + \lambda_a \tilde{\mathbf{q}}_a + \lambda_u \tilde{\mathbf{q}}_u \\ &= \alpha_a \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_a + \alpha_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u + \mathbf{s}_r, \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\mathbf{s}_r = -\alpha_a \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_a^d - \alpha_u \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_u^d + \lambda_a \tilde{\mathbf{q}}_a + \lambda_u \tilde{\mathbf{q}}_u$. As matrizes $\alpha_a \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\alpha_u \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\lambda_a \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\lambda_u \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ são definidas de modo que $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ seja assintoticamente estável.

Tem-se, então, a lei de controle por modos deslizantes [8]:

$$\mathbf{u} = -M_s^{-1}[\mathbf{f}_s + \hat{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{s}}_r + \kappa \text{sat}(\phi^{-1} \mathbf{s})], \quad (6)$$

onde,

$$M_s = \alpha_a M_{aa}'^{-1} - \alpha_u M_{uu}'^{-1} M_{au}^\top M_{aa}'^{-1}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{f}_s = \alpha_a M_{aa}'^{-1} \mathbf{f}'_a + \alpha_u M_{uu}'^{-1} \mathbf{f}'_u, \quad (7b)$$

e $\hat{\mathbf{d}}$ é a estimativa de

$$\mathbf{d} = \alpha_a M_{aa}'^{-1} \mathbf{p}'_a + \alpha_u M_{uu}'^{-1} \mathbf{p}'_u, \quad (8)$$

e κ é o ganho do controlador, $\phi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz diagonal de constantes positivas ϕ_i , e $\text{sat}(\phi^{-1} \mathbf{s}) = [\text{sat}(s_1/\phi_1) \dots \text{sat}(s_m/\phi_m)]^\top$ é a função de saturação, sendo ϕ_i a espessura da camada limite.

B. Regressão por Processo Gaussiano

Considere agora que a GPR seja utilizada na definição de um modelo não paramétrico que descreva uma distribuição sobre funções. Seguindo a abordagem de Williams e Rasmussen [25] e assumindo observações ruidosas, a GPR estimará as componentes de \mathbf{d} , que por sua vez é obtida isolando \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_u em (2), por meio da entrada \mathbf{s} :

$$\bar{d} = d(s) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (9)$$

onde s é dada pela equação (5) e ε é o sinal ruidoso de média nula e variância σ_ε^2 . A escolha da entrada s se deve a relação intrínseca entre a variável de deslizamento, que é uma variável de erro combinado, com o vetor de perturbação [31].

O processo gaussiano (GP, *Gaussian Process*) pode ser entendido como uma distribuição de probabilidades sobre o espaço de funções d , desde que qualquer conjunto finito de valores de funções possuam uma distribuição gaussiana conjunta [25]. Definindo uma função média $\mu(s) = \mathbb{E}[d(s)]$ e uma função de covariância $k(s, s') = \mathbb{V}(d(s), d(s'))$, pode-se representar o GP na seguinte forma:

$$d(s) \sim \mathcal{GP}(\mu(s), k(s, s')). \quad (10)$$

Portanto, dado um conjunto de entrada $\mathcal{D}_N = \{s_i, d_i\}_{i=1}^N$, a GPR pode aprender a função d e prever a distribuição de $d(s^*)$ baseada em uma entrada arbitrária s^* , onde são utilizadas as seguintes equações para o cálculo da média e variância *a posteriori*:

$$\mathbb{E}[h(s^*) | \mathcal{D}_N] = \mu(s^*) + k(s^*, s) (\mathbf{K}_N + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} \tilde{d}(s), \quad (11a)$$

$$\mathbb{V}[h(s^*) | \mathcal{D}_N] = k(s^*, s^*) - k(s^*, s) (\mathbf{K}_N + \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I})^{-1} k(s, s^*), \quad (11b)$$

sendo \mathbf{K}_N a matriz de covariância definida na forma $K_{ij} = k(s_i, s_j)$ e $\tilde{d}(s) = [\tilde{d}(s_1) - \mu(s_1), \dots, \tilde{d}(s_N) - \mu(s_N)]^\top$.

Propõe-se então que a equação (11a) seja utilizada para calcular as componentes de $\hat{\mathbf{d}}$, i.e. $\hat{d}_i = \mathbb{E}[d(s_i^*) | \mathcal{D}_N]$. Além disso, considera-se que a perturbação esteja compreendida dentro de um intervalo de confiança, ou seja, $\hat{\mathbf{d}} - \vartheta \boldsymbol{\sigma} \leq \mathbf{d} \leq \hat{\mathbf{d}} + \vartheta \boldsymbol{\sigma}$ onde $\sigma_i^2 = \mathbb{V}[d(s_i^*) | \mathcal{D}_N]$ e ϑ denota o nível de confiança.

No intuito de permitir que a aprendizagem do controlador se dê durante a sua execução, a implementação do GP neste trabalho segue um esquema de janela deslizante, onde uma janela fixa de tamanho r desliza ao longo do subconjunto

de dados a medida que o tempo avança. Com o objetivo de suavizar esse procedimento, somente o dado mais antigo é eliminado para permitir a entrada de um novo.

C. Análise de Estabilidade

Para investigar as propriedades de convergência dos sinais em malha fechada, considere a função definida positiva candidata de Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_\phi^\top \mathbf{s}_\phi, \quad (12)$$

onde a i -ésima componente de $\mathbf{s}_\phi = \mathbf{s} - \phi \text{sat}(\phi^{-1} \mathbf{s})$ represente a distância de s_i até ϕ_i .

Considerando que $\dot{\mathbf{s}}_\phi = \mathbf{s}_\phi = \mathbf{0}$ dentro da camada limite e que $\dot{\mathbf{s}}_\phi = \dot{\mathbf{s}}$ fora dela, tem-se que a derivada de V com relação ao tempo é

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \mathbf{s}_\phi^\top \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_\phi^\top (\alpha_a \ddot{\mathbf{q}}_a + \alpha_u \ddot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{s}}_r) \\ &= \mathbf{s}_\phi^\top [\alpha_a \mathbf{M}'_{aa}{}^{-1} (\mathbf{f}'_a + \mathbf{u} + \mathbf{p}'_a) + \\ &\quad \alpha_u \mathbf{M}'_{uu}{}^{-1} (\mathbf{f}'_u - \mathbf{M}'_{au} \mathbf{M}'_{aa}{}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{p}'_u) + \dot{\mathbf{s}}_r] \\ &= \mathbf{s}_\phi^\top [\mathbf{f}_s + \mathbf{d} + \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{M}_s \mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Aplicando a lei de controle (6) a (13), e percebendo que fora da camada limite $\text{sat}(\phi^{-1} \mathbf{s}) = \text{sgn}(\mathbf{s}_\phi)$, onde $\text{sgn}(\mathbf{s}_\phi) = [\text{sgn}(s_{\phi,1}) \dots \text{sgn}(s_{\phi,m})]^\top$ é a função sinal, tem-se

$$\dot{V}(t) = \mathbf{s}_\phi^\top [\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}} - \kappa \text{sgn}(\mathbf{s}_\phi)]. \quad (14)$$

Conforme discutido anteriormente, pode-se verificar que $\|\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}\|_\infty \leq \vartheta \|\boldsymbol{\sigma}\|_\infty$. Assim, definindo o ganho de acordo com $\kappa \geq \eta + \vartheta \|\boldsymbol{\sigma}\|_\infty$, sendo η uma constante estritamente positiva, conclui-se que

$$\dot{V}(t) \leq -\eta \mathbf{s}_\phi^\top \text{sgn}(\mathbf{s}_\phi) = -\eta \sum_{i=1}^m |s_{\phi,i}| \leq -\eta \|\mathbf{s}_\phi\|_1, \quad (15)$$

que implica $V(t) \leq V(0)$ e que qualquer estado inicial convergirá para a camada limite [22].

III. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para avaliar o desempenho do controlador proposto, foram realizadas simulações com um sistema de pêndulo invertido sobre um carro, Fig. 1, cuja dinâmica é representada pela equação (16).

$$\begin{bmatrix} m_c + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml \dot{\theta}^2 \sin \theta + \zeta \text{sgn} \dot{x} \\ mgl \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

onde x e θ são, respectivamente, as posições do carro e o deslocamento angular do pêndulo, m_c é a massa do carro, m e l representam a massa concentrada e comprimento do pêndulo, g a aceleração da gravidade, e ζ o coeficiente de atrito seco presente entre o carro e a superfície.

A implementação foi feita em C++ com taxas de amostragem do controlador e do simulador de 500 Hz e 1 kHz, respectivamente. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem foi utilizado para solução numérica das equações de movimento. Para o modelo do simulador foram considerados os seguintes parâmetros: $m_c = 0.5$ kg, $m = 0.2$ kg, $l = 0.2$ m, $g = 9.81$ m/s² e $\zeta = 0.4$ N.

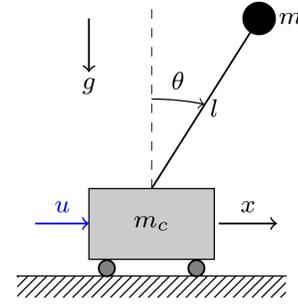


Fig. 1. Pêndulo invertido [32].

No que diz respeito a lei de controle (6), a variável de deslizamento (5) para o problema em questão foi definida na forma $s = \alpha_a \dot{x} + \alpha_u \dot{\theta} + \lambda_a \tilde{x} + \lambda_u \tilde{\theta}$. Além disso, a partir das equações de movimento (16) e desconsiderando a influência do atrito seco no projeto do controlador, obtém-se

$$\mathbf{M}_s = [\alpha_a - \alpha_u \cos \theta] / [\hat{m}_c + \hat{m} \sin^2 \theta], \quad (17a)$$

$$\mathbf{f}_s = \left[(\alpha_a - \alpha_u \cos \theta) \hat{m} l \dot{\theta}^2 \sin \theta - [\alpha_a \hat{m} \cos \theta - \alpha_u (\hat{m}_c + \hat{m}) g \sin \theta] / [\hat{m}_c + \hat{m} \sin^2 \theta], \right] \quad (17b)$$

onde \hat{m}_c e \hat{m} são as estimativas de m_c e m , respectivamente, admitindo-se um erro de 15% em relação ao seu valor nominal. Os parâmetros escolhidos para o controlador são $\alpha_a = 0.02$, $\alpha_u = 1$, $\lambda_a = 0.05$, $\lambda_u = 2.5$, $\eta = 2$ e $\phi = 0.05$. A escolha desses parâmetros segue o critério de deixar a superfície de deslizamento $s = 0$ assintoticamente estável [8].

No regressor por processo gaussiano foi utilizada a função de covariância exponencial quadrática $k(s, s') = \sigma_f^2 \exp\{-0.5[(s - s')/\ell]^2\}$, onde ℓ define a largura do kernel e σ_f o desvio padrão da distribuição a priori. Além de ℓ e σ_f , o desvio padrão do ruído σ_ε da equação (9) representa o terceiro hiperparâmetro da distribuição GP. Em todas as simulações a média a priori do GP foi considerada nula e $\vartheta = 2$.

A implementação realizada encontra-se resumida no Algoritmo 1. O código utilizado assim como os dados e resultados de todas as simulações podem ser acessados no repositório <https://github.com/RoboteamUFRN/Sliding-Mode-Control-Gaussian-Process-Cart-Pole>.

Assumindo que os estados iniciais do sistema fossem $\mathbf{x}(0) = [\dot{x}_0 \ x_0]^\top = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\theta}(0) = [\dot{\theta}_0 \ \theta_0]^\top = [0 \ 6^\circ]^\top$, e no intuito de avaliar a influência dos hiperparâmetros do GP sobre o desempenho do controlador proposto, foram realizadas 82 simulações, sendo uma delas a aplicação do controlador SMC sem a compensação GPR, para o caso da estabilização de posição do sistema em $x^d = 0$ e $\theta^d = 0$ em um tempo de 40 s. Além dos hiperparâmetros mencionados anteriormente, a taxa de captação de dados para a formação da janela do conjunto de treinamento também foi variada para avaliar a relevância da regressão na melhora do desempenho do controlador, especialmente quando a entrada s^* está distante dos dados contidos no conjunto de treinamento. Obviamente, essa taxa de captação do GP, f_{GP} , não poderá ser maior que a taxa de amostragem do controlador. Essa abordagem difere do que foi proposto em

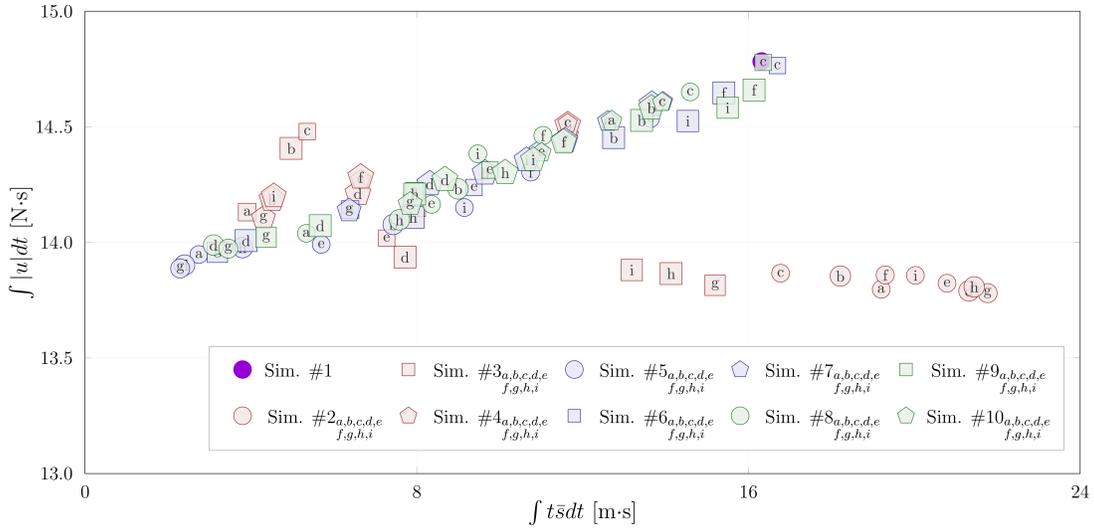


Fig. 2. Influência dos parâmetros do GP na ação de controle e no erro de rastreamento.

Algoritmo 1 Estratégia de controle com SMC e GPR.

- 1: Definir parâmetros de controle
- 2: Especificar o GP a priori (média μ , kernel k)
- 3: Definir estados iniciais: $\dot{x}_0, \dot{\theta}_0, x_0, \theta_0$
- 4: Inicializar o conjunto de treinamento: \mathcal{D}_0
- 5: Definir os estados desejados: $\dot{x}^d, \dot{\theta}^d, x^d, \theta^d$
- 6: **loop**
- 7: Calcular os erros de rastreamento: $\dot{\hat{x}}, \dot{\hat{\theta}}, \tilde{x}, \tilde{\theta}$
- 8: $s \leftarrow \alpha_a \dot{\hat{x}} + \alpha_u l \dot{\hat{\theta}} + \lambda_a \tilde{x} + \lambda_u l \tilde{\theta}$
- 9: $\hat{d} \leftarrow \mathbb{E}[d(s^*) | \mathcal{D}_{n-1}]$
- 10: $\sigma^2 \leftarrow \mathbb{V}[d(s^*) | \mathcal{D}_{n-1}]$
- 11: $\kappa \leftarrow \eta + \vartheta |\sigma|$
- 12: $u \leftarrow -M_s^{-1} [f_s + \hat{d} + \dot{s}_r + \kappa \text{sat}(s/\phi)]$
- 13: Aplicar u no modelo dinâmico
- 14: Atualizar os estados: $\dot{x}, \dot{\theta}, x, \theta$
- 15: Atualizar a distribuição GP: $\mathbb{E}[d(s^*) | \mathcal{D}_n], \mathbb{V}[d(s^*) | \mathcal{D}_n]$
- 16: **end loop**

[30], [31], onde a janela do conjunto de treinamento desliza na mesma frequência do controlador. Assim sendo, foram testados os valores de 500 Hz, 5 Hz e 1 Hz, considerando que o tamanho máximo da janela é $r = 50$ em todos os casos. Para esta comparação, foram atribuídas métricas que representassem a ação total de controle, $\int |u| dt$, e o erro de rastreamento combinado máximo ponderado pelo tempo, $\int t \bar{s} dt$, visto que $|s| \leq \bar{s} = \alpha_a |\dot{\hat{x}}| + \alpha_u l |\dot{\hat{\theta}}| + \lambda_a |\tilde{x}| + \lambda_u l |\tilde{\theta}|$. As métricas calculadas para cada uma das simulações são apresentadas na Fig. 2. A descrição da codificação utilizada no gráfico é introduzida a seguir, sendo $S = 2, \dots, 10$:

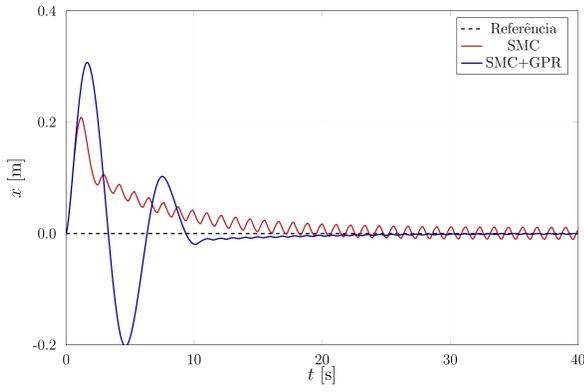
- A simulação #1 corresponde ao SMC convencional sem GPR, ou seja, $\hat{d} = \mathbf{0}$ e $\kappa = 2.5$;
- Os grupos de simulações $\{\#2, \#3, \#4\}, \{\#5, \#6, \#7\}, \{\#8, \#9, \#10\}$ correspondem as taxas $f_{GP} = \{500, 5, 1\}$ Hz, respectivamente;
- Os grupos de simulações $\{\#2, \#5, \#8\}, \{\#3, \#6, \#9\}, \{\#4, \#7, \#10\}$ correspondem a variação do

- hiperparâmetro $\sigma_\varepsilon = \{0.2, 1.0, 5.0\}$, respectivamente;
- Os grupos de simulações $\{\#S_{a,b,c}, \#S_{d,e,f}, \#S_{g,h,i}\}$ correspondem a variação do hiperparâmetro $\sigma_f = \{0.5, 1.0, 1.5\}$, respectivamente;
- Os grupos de simulações $\{\#S_{a,d,g}, \#S_{b,e,h}, \#S_{c,f,i}\}$ correspondem a variação do hiperparâmetro $l = \{0.01, 0.05, 0.25\}$, respectivamente.

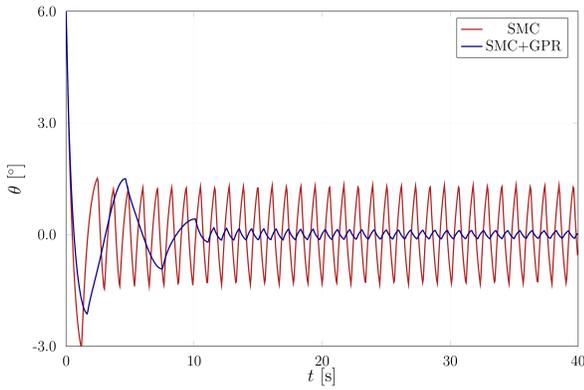
A primeira observação que se pode fazer acerca da Fig. 2, é que o compensador, de forma geral, contribui para a redução da ação total de controle, o que implica em um menor consumo de energia pelo atuador.

Pode-se verificar também na Fig. 2, que o grupo de simulações correspondente à taxa $f_{GP} = 500$ Hz foi o que apresentou maior dispersão no que tange à variação dos hiperparâmetros do GP. No caso do grupo de simulação #2, por exemplo, vê-se inclusive que a métrica do erro de rastreamento, $\int t \bar{s} dt$, foi maior que na simulação #1, sendo porém o único grupo a se comportar dessa forma. Os grupos de simulação #3 e #4 apresentam resultados melhores em relação ao erro total de rastreamento em relação a #1, já indicando uma melhora de desempenho do controlador quando comparado ao SMC puro.

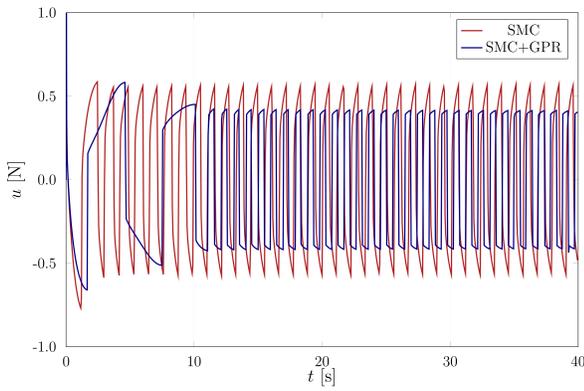
Os demais grupos de simulação, de forma geral, indicam uma melhora significativa no desempenho do controlador, apontando uma tendência de diminuição do erro total de rastreamento a medida que σ_ε diminui e σ_f aumenta, assim como também foi a tendência de diminuição do esforço de controle total. Esses parâmetros, por estarem diretamente ligados a variância do GP, têm influência incisiva no ganho κ . Como esses grupos de simulação são correspondentes a menores taxas f_{GP} , a variância da distribuição passa a ter peso importante quando a entrada s^* encontra-se distante do conjunto de treinamento contido na janela. Essa observação realça a importância de um σ_f maior, garantindo que o ganho do controlador seja responsável pela melhora do desempenho nos casos em que a média da distribuição tende a zero.



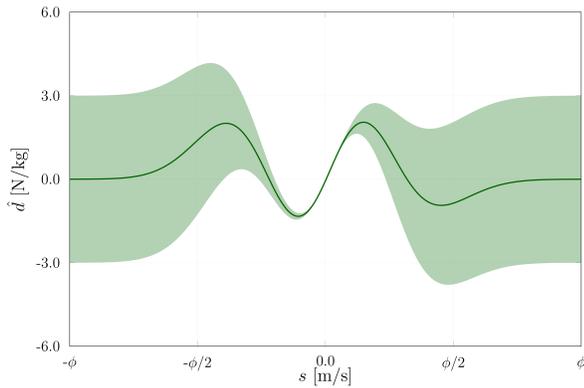
(a) Posição do carro.



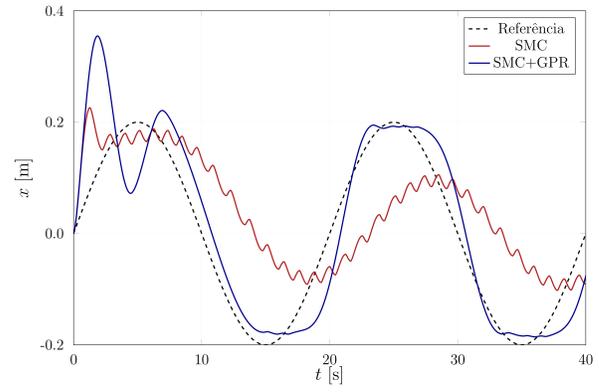
(b) Ângulo do pêndulo.



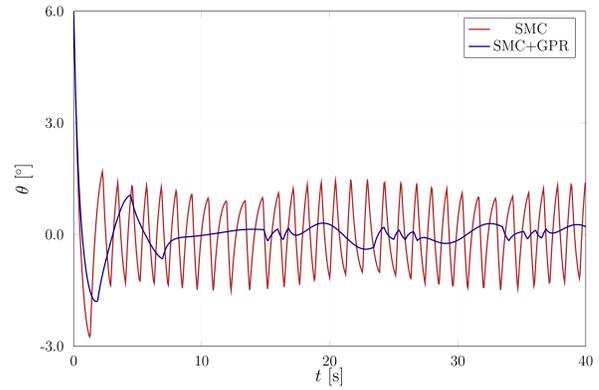
(c) Sinal de controle.



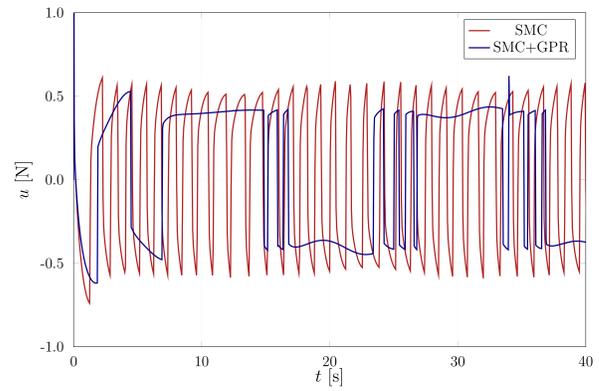
(d) Regressor $\hat{d} \pm 2\sigma$.



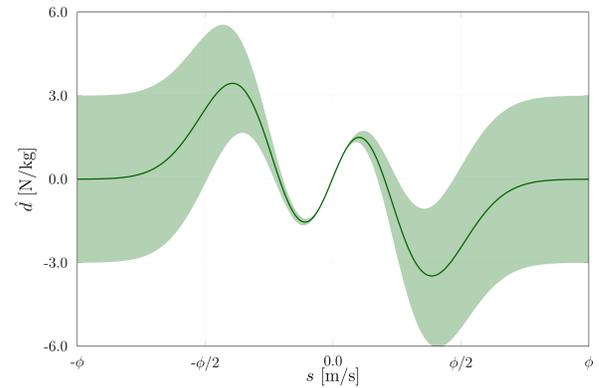
(a) Posição do carro.



(b) Ângulo do pêndulo.



(c) Sinal de controle.



(d) Regressor $\hat{d} \pm 2\sigma$.

Fig. 3. Resultados obtidos com os parâmetros da simulação #5_g para o caso da estabilização do carro.

Fig. 4. Resultados obtidos com os parâmetros da simulação #5_g para o rastreamento de trajetória do carro.

Conforme os resultados apresentados na Fig. 2, vale ainda destacar a influência do hiperparâmetro ℓ . Seja pelo termo de compensação \hat{d} ou pelo ganho κ , por conta das propriedades de convergência do controlador, a variável s tende a diminuir, implicando que um menor valor de ℓ é necessário para garantir uma adequada abrangência do kernel na distribuição da entrada s^* pelo conjunto de treinamento. De fato, esse comportamento foi verificado em todas as simulações. Portanto, de maneira geral, foi observado uma relação diretamente proporcional entre os valores de ℓ e do erro de rastreamento total.

Por fim, ressalta-se que a simulação de código #5_g ($f_{GP} = 5$ Hz, $\sigma_\varepsilon = 0.2$, $\sigma_f = 1.5$, $\ell = 0.01$) foi a que apresentou os melhores resultados em relação ao erro de rastreamento combinado e esforço de controle totais, com métricas $\int t\bar{s}dt = 2.3$ e $\int |u|dt = 13.9$, representando, respectivamente, reduções de 86% e 5% em relação à abordagem convencional, $\int t\bar{s}dt = 16.3$ e $\int |u|dt = 14.8$. Deste modo, esses hiperparâmetros foram escolhidos para avaliar o desempenho do controlador proposto na tarefa de estabilizar o pêndulo, $\theta^d = 0$, em duas situações distintas: (i) estabilização do carro, $x^d = 0$, e (ii) rastreamento de trajetória do carro, $x^d = 0.2 \sin(0.1\pi t)$. Fig. 3 e Fig. 4 apresentam os resultados obtidos nesses dois casos, tanto com o controlador proposto (SMC+GPR), quanto com o convencional (SMC).

Pode-se observar que a adoção do compensador por processo gaussiano é capaz de melhorar tanto a estabilização do carro, Fig. 3a, quanto o rastreamento de trajetória, Fig. 4a. Em relação à estabilização do ângulo do pêndulo, pode-se perceber na Fig. 3b e na Fig. 4b, que a amplitude de oscilação obtida com controlador proposto é significativamente menor, quando comparada com os resultados do controlador convencional. Além disso, verifica-se também que em ambos os casos a inclusão da GPR reduz o esforço de controle se comparado ao caso SMC puro, Fig. 3c e Fig. 4c. No que diz respeito ao comportamento oscilatório do esforço de controle, deve-se notar a participação do atrito seco que equivale a aproximadamente 80% da amplitude desse sinal, visto o valor de coeficiente de atrito adotado, $\zeta = 0.4$ N.

A resposta do compensador, principal responsável pelo desempenho aprimorado do esquema de controle proposto, é apresentada na Fig. 3d e na Fig. 4d, respectivamente, para os casos de estabilização e rastreamento. É importante ressaltar que, como os parâmetros da distribuição são os mesmos dentro do tempo de simulação, a representação do regressor por processo gaussiano é feita em função de s com todos os dados que transitaram pelo conjunto de treinamento. Como mostrado na Fig. 3d e na Fig. 4d, pode-se observar que na região mais próxima de $s = 0$, tem-se uma distribuição mais refinada e com baixa dispersão. Isso faz sentido à luz do que é esperado pelo controlador por Modos Deslizantes. Como o ganho κ do controlador é proporcional a essa dispersão, ao levar os estados para a superfície de deslizamento é possível então reduzir o nível de esforço de controle utilizado, conforme apresentado na Fig. 3c e na Fig. 4c. Um raciocínio similar pode ser feito em relação às vizinhanças da camada limite. Considerando que $\sigma \leq \sigma_f$, e sendo σ_f um valor suficientemente alto, então verifica-se que a dispersão é uma grandeza importante para a garantia de robustez do controlador.

Uma melhor visualização dos resultados pode ser feita por meio do link <https://youtu.be/NjLwC81GnUE>.

IV. CONCLUSÕES

O presente trabalho aborda o problema do controle de sistemas mecânicos subatuados e incertos. Para isso foi utilizado um controlador por modos deslizantes combinado com a regressão por processo gaussiano para fins de representação e compensação de incertezas paramétricas e dinâmica não modelada. As propriedades de convergência são analisadas por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov. A estratégia de controle proposta é aplicada ao problema do pêndulo invertido sobre carro. Simulações numéricas são realizadas para avaliar o desempenho do controlador proposto. A influência dos hiperparâmetros do GP sobre o controlador também foi discutida. Como esperado, altos valores de variância a priori influenciam fortemente o controlador, melhorando seu desempenho, quando a entrada da distribuição está situada distante do janelamento do conjunto de treinamento. Esse efeito é desejado principalmente quando a entrada de um novo dado não se dá na mesma frequência de amostragem do controlador. De forma geral, o compensador foi capaz de reduzir o esforço total de controle e de melhorar a estabilização de posição quando comparado ao controlador sem o regressor. As simulações mostram que a GPR pode ser uma técnica bastante eficiente para compensação de incertezas de sistemas subatuados incertos e que atende bem as expectativas de fornecer um nível de confiança adequado para a aproximação das incertezas de modelagem a fim de conferir um patamar justo de robustez ao controlador. Para trabalhos futuros, pretende-se realizar a implementação experimental do método proposto como forma de validação final. Além disso, considerando o trabalho exaustivo que é o de encontrar o conjunto apropriado de hiperparâmetros, pretende-se também a utilização de métodos apropriados de otimização desses parâmetros do Processo Gaussiano.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação Alemã de Pesquisa (DFG), no âmbito do projeto PIPC 88881.473092/2019-1 (DFG Grant Number AU 185/72). Wallace M. Bessa agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio ao projeto de pesquisa nº 308429/2017-6. Gabriel S. Lima agradece à CAPES por sua bolsa de pós-graduação.

REFERÊNCIAS

- [1] X. Xin and Y. Liu, "Reduced-order stable controllers for two-link underactuated planar robots," *Automatica*, vol. 49, no. 7, pp. 2176–2183, 2013.
- [2] Y. Lozano and O. Gutiérrez, "Design and control of a four-rotary-wing aircraft," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 11, pp. 4433–4438, 2016.
- [3] G.-H. Kim and K.-S. Hong, "Adaptive sliding-mode control of an offshore container crane with unknown disturbances," *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, vol. 24, no. 6, pp. 2850–2861, 2019.

- [4] B. Yi, R. Ortega, I. R. Manchester, and H. Siguerdidjane, "Path following of a class of underactuated mechanical systems via immersion and invariance-based orbital stabilization," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, no. 18, pp. 8521–8544, 2020.
- [5] R. Seifried, *Dynamics of underactuated multibody systems*. Springer, 2014.
- [6] E. Franco, "Adaptive ida-pbc for underactuated mechanical systems with constant disturbances," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 33, no. 1, pp. 1–15, 2019.
- [7] M. Gnucci and R. Marino, "Adaptive tracking control for underactuated mechanical systems with relative degree two," *Automatica*, vol. 129, p. 109633, 2021.
- [8] H. Ashrafiuon and R. S. Erwin, "Sliding mode control of underactuated multibody systems and its application to shape change control," *International Journal of Control*, vol. 81, no. 12, pp. 1849–1858, 2008.
- [9] M. Ryalat and D. S. Laila, "A simplified ida-pbc design for underactuated mechanical systems with applications," *European Journal of Control*, vol. 27, pp. 1–16, 2016.
- [10] J. Huang, M. Zhang, S. Ri, C. Xiong, Z. Li, and Y. Kang, "High-order disturbance-observer-based sliding mode control for mobile wheeled inverted pendulum systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 3, pp. 2030–2041, 2020.
- [11] D. N. Cardoso, S. Esteban, and G. V. Raffo, "A robust optimal control approach in the weighted sobolev space for underactuated mechanical systems," *Automatica*, vol. 125, p. 109474, 2021.
- [12] M. Tanaka, J. Macedo Fernandes, and W. M. Bessa, "Feedback linearization with fuzzy compensation for uncertain nonlinear systems," *International Journal Of Computers Communications & Control*. vol. 8, p. 736-743, 2013.
- [13] B. Zhang, Z. Mao, and T. Zhang, "Intelligent control for hammerstein nonlinear systems with arbitrary deadzone input," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 39, no. 4, pp. 567–578, 2017.
- [14] D. Wang, H. He, and D. Liu, "Intelligent optimal control with critic learning for a nonlinear overhead crane system," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 14, no. 7, pp. 2932–2940, 2017.
- [15] L. B. P. do Nascimento, V. P. Pinto, and M. A. B. Amora, "Harmony search algorithm with adaptive parameters to optimize the linear quadratic regulator design," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 7, pp. 1862–1869, 2018.
- [16] B. Xu, X. Wang, Y. Shou, P. Shi, and Z. Shi, "Finite-time robust intelligent control of strict-feedback nonlinear systems with flight dynamics application," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021.
- [17] W. M. Bessa, G. Brinkmann, D. A. Duecker, E. Kreuzer, and E. Solowjow, "A biologically inspired framework for the intelligent control of mechatronic systems and its application to a micro diving agent," *Mathematical problems in engineering*, vol. 2018, 2018.
- [18] J.-J. E. Slotine, W. Li *et al.*, *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991, vol. 199, no. 1.
- [19] W. M. Bessa, "Controle por Modos Deslizantes de Sistemas Dinâmicos com Zona Morta Aplicado ao Posicionamento de ROVs," *Rio De Janeiro*, 2005.
- [20] W. M. Bessa, "Some remarks on the boundedness and convergence properties of smooth sliding mode controllers," *International Journal of Automation and Computing*, vol. 6, no. 2, pp. 154–158, 2009.
- [21] J. Fang, L. Zhang, Z. Long, and M. Y. Wang, "Fuzzy adaptive sliding mode control for the precision position of piezo-actuated nano positioning stage," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 19, no. 10, pp. 1447–1456, 2018.
- [22] W. M. Bessa, S. Otto, E. Kreuzer, and R. Seifried, "An adaptive fuzzy sliding mode controller for uncertain underactuated mechanical systems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 25, no. 9, pp. 1521–1535, 2019.
- [23] J.-S. Han, T.-I. Kim, T.-H. Oh, S.-H. Lee *et al.*, "Effective disturbance compensation method under control saturation in discrete-time sliding mode control," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 7, pp. 5696–5707, 2019.
- [24] D. Garcia, E. Gorrostieta, E. V. Soto, C. R. Rivero, and G. D. Delgado, "Learning from demonstration with gaussian process approach for an omni-directional mobile robot," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 4, pp. 1250–1255, 2018.
- [25] C. K. Williams and C. E. Rasmussen, *Gaussian processes for machine learning*. MIT press Cambridge, MA, 2006, vol. 2, no. 3.
- [26] A. Marco, P. Hennig, J. Bohg, S. Schaal, and S. Trimpe, "Automatic lqr tuning based on gaussian process global optimization," in *2016 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA)*. IEEE, 2016, pp. 270–277.
- [27] A. Marco, P. Hennig, S. Schaal, and S. Trimpe, "On the design of lqr kernels for efficient controller learning," in *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2017, pp. 5193–5200.
- [28] M. Neumann-Brosig, A. Marco, D. Schwarzmann, and S. Trimpe, "Data-efficient autotuning with bayesian optimization: An industrial control study," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019.
- [29] V. Aran and M. Unel, "Gaussian process regression feedforward controller for diesel engine airpath," *International Journal of Automotive Technology*, vol. 19, no. 4, pp. 635–642, 2018.
- [30] G. S. Lima, W. M. Bessa, and S. Trimpe, "Depth control of underwater robots using sliding modes and gaussian process regression," in *2018 Latin American Robotic Symposium, 2018 Brazilian Symposium on Robotics (SBR) and 2018 Workshop on Robotics in Education (WRE)*. IEEE, 2018, pp. 8–12.
- [31] G. S. Lima, S. Trimpe, and W. M. Bessa, "Sliding mode control with gaussian process regression for underwater robots," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, pp. 1–12, 2020.
- [32] Bessa, W. & Kreuzer, E. Adaptive fuzzy sliding mode control of the cart-pole underactuated system. *PAMM*. **16**, 799-800 (2016)



Gabriel S. Lima received the B.Sc. degree in science and technology, in 2015, the B.Sc. degree in mechanical engineering, in 2017, and the master's degree in mechanical engineering, in 2019, from the Federal University of Rio Grande do Norte, Natal, Brazil. He is currently a PhD researcher at the Federal University of Rio Grande do Norte with interest in intelligent control, robotics, nonlinear control, artificial neural networks, Gaussian process, and reinforcement learning.



Wallace M. Bessa is an Associate Professor of Mechanical Engineering at the University of Turku, Finland. He also serves as Associate Editor of the Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (Springer) and as Member of the Committee for Dynamics of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering (ABCM). Before taking up his position at the University of Turku, he was Associate Professor at the Federal University of Rio Grande do Norte, Brazil (2008-2021) and Assistant Professor at the Federal

Center for Technological Education, Brazil (2004-2008). In 2014, he was awarded the prestigious Humboldt Research Fellowship for Experienced Researchers, which allowed him to be a visiting professor at the Hamburg University of Technology, Germany, from August 2015 to July 2017. He has more than 100 scientific publications on topics such as intelligent control, nonlinear systems, robotics and mechatronics.