

# Family of Bounded Regulators with Variable Gains and Lyapunov Asymptotic Stability for Robot Manipulators

Brandon Sánchez-García, Fernando Reyes-Cortés and Basil M. Al-Hadithi

**Abstract**—In this paper, the regulation problem for robot manipulators in joint space through the proposal of a new family of bounded regulators with variable gains is presented. The proposed regulators have bounded functions that replace the classical position error and the velocity; moreover, the variable gains are formed by a family of Lipchitz functions with the position error and the velocity as their arguments. This structure avoids exceeding the physical limits of the servomotors. A strict Lyapunov function is proposed to demonstrate the global and asymptotic stability. Finally, the functionality and performance of the proposal are examined by experimental results on a direct-drive-robot of 3-degrees-of-freedom against the PD regulator.

**Index Terms**—Variable Gains, Lyapunov Asymptotic Stability, Robot Manipulators, Saturation, Regulators Family.

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de regulación para manipuladores cuenta con problemas abiertos, convirtiéndose en una actividad científica para diseñar nuevos controladores con alto desempeño. Sin embargo, al superar las limitaciones físicas de los actuadores del robot, el fenómeno de saturación aparece, afectando la estabilidad y desempeño del sistema en lazo cerrado [1], [2].

Diversos enfoques se reportan en la literatura para proponer nuevos controladores con propiedades saturadas [3], [4], [5], [6], [7]. Por otro lado, el PID con torques acotados ha sido un candidato para abordar problema de control de manipuladores [1], [8], [9]. Sin embargo, el PID clásico carece de estabilidad asintótica global y actualmente solo se ha validado en el sentido local [10]. Por esta razón, los reguladores PD pueden ser esquemas más adecuados, dada su propiedad de estabilidad asintótica global y fácil implementación en robots manipuladores a nivel experimental [2], [10], [11].

Además, existe evidencia en la mejora del desempeño en los algoritmos cuando sus ganancias son modificadas como variables [12], [13], [14], [15]. A partir de esta motivación, el esquema PD con ganancias variables se ha presentado en diferentes versiones: [13], [16], [17], [18].

No obstante, para el problema de saturación el esquema

PD con ganancias variables se ha modificado para generar acciones acotadas/saturadas: [14], [19], [20], [21], [22].

A diferencia de los anteriores enfoques clásicos de reguladores saturados y acotados, la familia de reguladores es diseñada a partir de un moldeo artificial del gradiente de la energía potencial del robot [23] en conjunto con una definición matemática propuesta para generar una clase de ganancias variables. Esto provee ventajas como, deducir una función estricta de Lyapunov para la demostración de estabilidad asintótica, mejorar su desempeño acoplando ganancias variables sintonizadas mediante una regla matemática simple y fácil implementación en un robot manipulador físico debido a que solo es necesario conocer los parámetros del vector gravitacional.

Las aportaciones incrementales de este trabajo, con respecto a los esquemas saturados con ganancias variables reportados son: La mayoría de las ganancias variables reportadas, involucran una variable de estado en su dominio; por tanto, en ambos ejes se diseña una familia de ganancias variables formadas por funciones Lipchitz dependientes del error de posición y la velocidad. Por otra parte, el error de posición y la velocidad convencional de los reguladores, son sustituidas por funciones acotadas y suaves, para una sencilla programación en el robot manipulador y un adecuado funcionamiento de sus servomotores sin llegar a sus valores máximos de torque.

Además, pocos autores presentan el análisis de estabilidad asintótica usando funciones estrictas y resultados experimentales en un robot manipulador real. Por ello, realizamos la demostración de estabilidad asintótica proponiendo una nueva función estricta de Lyapunov; además, exponemos resultados experimentales en un robot de 3 gdl, para concluir la adecuada funcionalidad de los reguladores frente a la dinámica de un robot real y su actual desempeño ante el PD clásico.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: sección 2, dinámica del robot. Sección 3, se presentan los reguladores acotados con ganancias variables. Sección 4, demostración de estabilidad asintótica global. Sección 5, resultados experimentales. Sección 6, conclusiones.

## II. DINÁMICA DEL ROBOT MANIPULADOR

Considere el modelo dinámico de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad con todas sus articulaciones rotacionales:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (1)$$

donde:  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es la posición articular,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es la velocidad articular,  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  es la aceleración articular,  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fuerzas

Brandon Sánchez-García y Fernando Reyes-Cortés, Facultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. e-mail: brandon.sanchez@alumno.buap.mx, fernando.reyes@correo.buap.mx

Basil M. Al-Hadithi, Centro de Automática y Robótica, Universidad Politécnica de Madrid-CSIC-UPM, C/José Gutiérrez Abascal no. 2, 28006, Madrid España, y Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial. Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Física Aplicada, Universidad Politécnica de Madrid, España. e-mail:basil.alhadithi@upm.es

centrípeta y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector gravitacional,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de fricción viscosa y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  son los torques de entrada. Además, el modelo dinámico (1) satisface:

**Definición 1:** Considere a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde  $x_i = \{\tilde{q}_i, \dot{q}_i\} \in \mathbb{R}$ . Siendo  $\tilde{q}_i$  el  $i$ -ésimo error de posición y  $\dot{q}_i$  la  $i$ -ésima velocidad del robot: donde  $\tilde{q}_i = q_{di} - q_i$ ,  $q_i \in \mathbb{R}$  es la  $i$ -ésima posición articular y  $q_{di} \in \mathbb{R}$  es la  $i$ -ésima posición deseada y constante en el tiempo: para  $i = 1, 2, 3 \dots n$ .

**Propiedad 1.** La matriz de inercia  $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica y definida positiva, siendo  $\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\}$  su valor propio máximo:

$$M(\mathbf{q}) > 0 \text{ y } M^{-1}(\mathbf{q}) > 0 \Rightarrow \mathbf{x}^T M(\mathbf{x}) \mathbf{x} > 0; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{x}^T M(\mathbf{x}) \mathbf{x} \leq \lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\} \|\mathbf{x}\|^2; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

**Propiedad 2.** La derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia denotada como  $\dot{M}(\mathbf{q})$ :

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (3)$$

**Propiedad 3.** La matriz de fuerzas centrípeta y de Coriolis  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , satisface:  $C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ .

**Propiedad 4.** La propiedad de antisimetría se describe:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} = 0; \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

**Propiedad 5.** Para robots que solo contienen articulaciones rotacionales:

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{x}\| \leq k_c \|\mathbf{x}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (5)$$

siendo  $k_c > 0, \forall \mathbf{x}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ .

**Propiedad 6.** La matriz de fricción viscosa  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con los valores propios  $\lambda_{min}\{B\}$  y  $\lambda_{Max}\{B\}$ , satisface:

$$\dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} > 0$$

$$\lambda_{min}\{B\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leq \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq \lambda_{Max}\{B\} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2; \forall \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

### III. FAMILIA DE REGULADORES ACOTADOS CON GANANCIAS VARIABLES

El problema de control consiste en diseñar un  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  con torques acotados y ganancias variables, tal que el error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  y la velocidad  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ , convergan asintóticamente a cero para cualquier condición inicial  $[\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ , con las posiciones deseadas y constantes en el tiempo  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ . Es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}; \forall t \geq 0. \quad (7)$$

Para dar solución a (7), se ha diseñado una familia  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  con torques acotados y ganancias variables, más una compensación de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\boldsymbol{\tau} = K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (8)$$

donde: el término proporcional  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  y el término derivativo  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  son funciones acotadas, la ganancia proporcional variable  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la ganancia derivativa variable  $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son diagonales y definidas positivas con las entradas  $k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ , respectivamente.

**Definición 2:** La familia de reguladores (8) está formada por la función acotada  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  definida como:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\tanh(\psi_1 x_1)}{\sqrt{1 + \arctan^2(\psi_1 x_1)}} \\ \vdots \\ \frac{\tanh(\psi_n x_n)}{\sqrt{1 + \arctan^2(\psi_n x_n)}} \end{bmatrix} = \begin{cases} [f(\tilde{q}_1), \dots, f(\tilde{q}_n)]^T \in \mathbb{R}^n \text{ si } x_i = \tilde{q}_i \\ [f(\dot{q}_1), \dots, f(\dot{q}_n)]^T \in \mathbb{R}^n \text{ si } x_i = \dot{q}_i \end{cases} \quad (9)$$

donde  $f(\tilde{q}_i) = \tanh(\psi_i \tilde{q}_i) / \sqrt{1 + \arctan^2(\psi_i \tilde{q}_i)}$ ,  $f(\dot{q}_i) = \tanh(\psi_i \dot{q}_i) / \sqrt{1 + \arctan^2(\psi_i \dot{q}_i)}$  y  $\psi_i \in \mathbb{N}$  es un número positivo; para  $i = 1, 2 \dots n$ . La motivación de usar a (9) para el diseño de la familia de reguladores con ganancias variables es la siguiente: la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  fue construida convenientemente para ser continua en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , simétrica con respecto al origen y acotada:  $-\rho_l \leq \tanh(\psi_i x_i) / \sqrt{1 + \arctan^2(\psi_i x_i)} \leq \kappa_\psi$ ; para  $i = 1, 2, \dots n$  (véase 10), brindándole la propiedad a los reguladores de generar acciones de control acotadas (ver Fig. 1a); las constantes  $\rho_l > 0$   $\kappa_\psi > 0$  son magnitudes positivas medidas desde el origen. Es una función impar y se ubica dentro del primer y tercer cuadrante. Además, su primera derivada parcial  $\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$  está acotada (véase (11)). El valor de  $\psi_i > 0$  hace la pendiente de  $f(x_i) \in \mathbb{R}$  más vertical, alcanzando sus valores máximos  $\rho_l$  y  $\kappa_\psi$  en menor tiempo mientras  $\psi_i$  crece; este comportamiento, es usado como ventaja por el término proporcional  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  y el término derivativo  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ . Estas cualidades son claves para el diseño de la familia (8), donde el efecto de la acción de control proporcional  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  impulsa a las articulaciones del robot hacia las posiciones deseadas  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$  y la acción de control derivativa  $-K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  inyecta energía disipativa para oponerse al movimiento generado en régimen transitorio, atenuando los picos máximos y las oscilaciones. Las siguientes propiedades de los reguladores son importantes para el análisis de estabilidad asintótica de Lyapunov:

**Propiedad 7:** Sean  $\rho_l > 0$  y  $\kappa_\psi > 0$  tal que:

$$\rho_l \sqrt{n} \frac{\|\mathbf{x}\|}{1 + \|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq \begin{cases} \sqrt{n} \kappa_\psi \\ \sqrt{n} \rho_l \end{cases} \|\mathbf{x}\|; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

donde  $\rho_l$  y  $\kappa_\psi$  se han renombrado como:  $\{\rho_{pl}, \kappa_{p\psi}\}$  y  $\{\rho_{vl}, \kappa_{v\psi}\}$ , para  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ , respectivamente. Siendo sus cotas inferiores y superiores, mostradas en la Fig. 1a.

**Propiedad 8:** Considere  $\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal, tal que:

$$\|\Gamma\| = \left\| \text{diag} \left\{ \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n(x_n)}{\partial x_n} \right\} \right\| \leq \mu_\psi \quad (11)$$

$\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} = \psi_i \frac{\tanh(\psi_i x_i) [1 + \sinh^2(\psi_i x_i)] + (1 + \arctan^2(\psi_i x_i)) (x_i^2 + 1)}{(1 + \arctan^2(\psi_i x_i))^{3/2} (x_i^2 + 1) [1 + \sinh^2(\psi_i x_i)]}$  y  $\mu_\psi > 0$ ; para  $i = 1, 2 \dots n$ . Además  $\lambda_{Max}\{\Gamma\} \leq \mu_\psi$ .

#### A. Gama de Ganancias Variables

Se ha diseñado una gama de ganancias variables, donde ambos ejes son dependientes del error de posición  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  y la velocidad  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ :

**Definición 3:** La ganancia proporcional variable  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y la ganancia derivativa variable  $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices diagonales y definidas positivas, formadas por una familia de funciones Lipchitz con la siguiente definición:

$$K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{diag}\{k_{p_1}(\tilde{q}_1, \dot{q}_1), k_{p_2}(\tilde{q}_2, \dot{q}_2), \dots, k_{p_n}(\tilde{q}_n, \dot{q}_n)\} \quad (12)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \hat{k}_{p_i} \cosh(f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)) \quad (13)$$

$$K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{diag}\{k_{v_1}(\tilde{q}_1, \dot{q}_1), k_{v_2}(\tilde{q}_2, \dot{q}_2), \dots, k_{v_n}(\tilde{q}_n, \dot{q}_n)\} \quad (14)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \hat{k}_{v_i} \cosh(f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)) \quad (15)$$

donde  $\hat{k}_{p_i} > 0$  y  $\hat{k}_{v_i} > 0$ ; además:  $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ ,  $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones Lipchitz. En este sentido, se puede proponer un conjunto amplio de  $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ , dando lugar a una gama de ganancias variables. Estas funciones se eligen y/o diseñan a priori, siguiendo la siguiente definición:

$$\begin{aligned} -c_l &\leq f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \leq c_u \\ -d_l &\leq f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) \leq d_u \\ f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) &= f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \tilde{q}_i = \dot{q}_i = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

siendo:  $\{-c_l, -d_l\}$  las cotas inferiores y  $\{c_u, d_u\}$  las cotas superiores de sus respectivas funciones. Entonces, bajo la definición anterior se muestra que todos los elementos de las matrices diagonales  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son positivos, entonces  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$  y  $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ .

Con propósitos de verificar la funcionalidad de las ganancias variables a nivel experimental, proponemos los siguientes casos particulares de  $f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ , partiendo de la definición (16) para las entradas de las ganancias variables  $k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $k_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$ , respectivamente; para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \tanh(\tilde{q}_i + \dot{q}_i) \quad (17)$$

$$f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \arctan(\tilde{q}_i + \dot{q}_i) \quad (18)$$

$$f_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = f_{v_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \frac{\tilde{q}_i + \dot{q}_i}{\sqrt{1 + (\tilde{q}_i + \dot{q}_i)^2}} \quad (19)$$

Estas funciones fueron elegidas y modificadas dado que son Lipchitz ampliamente conocidas, además de su facilidad para implementarlas a nivel programación; sin embargo, pueden elegirse funciones diferentes o variaciones de las que se proponen. En la Fig. 1b, se muestra el perfil de la familia de ganancias variables, donde (17)-(19) también comparten. Asimismo, si aseguramos la convergencia asintótica de  $\tilde{q}_i$  y  $\dot{q}_i$  a cero, la sintonía de  $K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  depende de la elección de  $\hat{k}_{p_i}$  y  $\hat{k}_{v_i}$ , respectivamente.

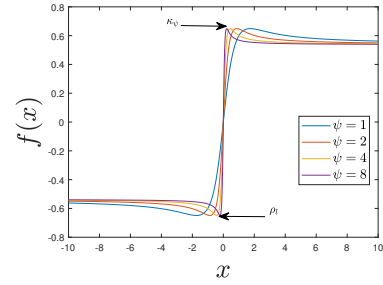
**Definición 4:** Sea  $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) d\boldsymbol{\sigma}\right) = \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^n$ , tiene una norma euclidiana que satisface [22]:

$$\|\boldsymbol{\rho}\| = \left\| \begin{bmatrix} \int_0^{\tilde{q}_1} f(\sigma_1) g_p(\sigma_1, \dot{q}_1) d\sigma_1 \\ \int_0^{\tilde{q}_2} f(\sigma_2) g_p(\sigma_2, \dot{q}_2) d\sigma_2 \\ \vdots \\ \int_0^{\tilde{q}_n} f(\sigma_n) g_p(\sigma_n, \dot{q}_n) d\sigma_n \end{bmatrix} \right\| \leq \begin{cases} \xi_p \sqrt{n} g_{pu}, \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \\ \xi_p \sqrt{n} g_{pu} \|\tilde{\mathbf{q}}\|, \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (20)$$

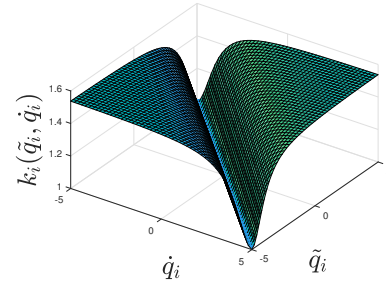
donde  $g_p(\sigma_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial k_{p_i}(\sigma_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}$  existe, dado que  $k_{p_i}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  son funciones Lipchitz: para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Además,  $\xi_p > 0$  y  $g_{pu} > 0$  son positivas,  $\forall \sigma_i$  y  $\dot{q}_i \in \mathbb{R}$ .

Finalmente, describimos la estructura de control de la familia cuando las ganancias variables (12) y (14) son acopladas. Para sintetizar, considere el caso (17) para la  $i$ -ésima acción proporcional/derivativa, entonces:

$$p_i(\tilde{q}_i, \dot{q}_i) = \hat{k}_{p_i} \tanh(\tilde{q}_i + \dot{q}_i) \frac{\tanh(\psi_i \tilde{q}_i)}{\sqrt{1 + \arctan^2(\psi_i \tilde{q}_i)}} \quad (21)$$



(a)



(b)

Fig. 1. (a) Perfil de las funciones acotadas. (b) Gama de ganancias variables.

En la Figura 2, se muestra la  $i$ -ésima acción proporcional/derivativa (21). Observe que garantizamos ambos términos con señales de control acotadas, si el caso elegido de ganancia variable satisface la definición (16).

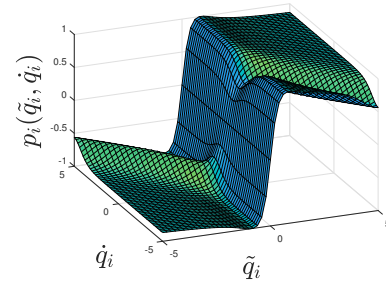


Fig. 2.  $i$ -ésimo término proporcional/derivativo de la familia propuesta.

#### IV. ESTABILIDAD ASINTÓTICA GLOBAL DE LYAPUNOV

Se construye la ecuación en lazo cerrado (22) a partir del modelo dinámico del robot manipulador (1) y la familia de algoritmos de control (8), la cual resulta una ecuación diferencial autónoma no lineal con la siguiente estructura:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - B\dot{\tilde{\mathbf{q}}}] \end{bmatrix} \quad (22)$$

cuyo punto de equilibrio  $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$  existe y es único. El punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (22) es *asintóticamente estable y global*.

**Demostración:** Con la finalidad de demostrar la propiedad de estabilidad, de acuerdo con el método directo de Lyapunov se propone una función de energía estricta denotada como

$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ ; la cual, es definida positiva  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$  y su derivada es definida negativa  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$ . En este escenario, se evita el uso del teorema de Krasovskii-LaSalle. Su estructura la compone la energía cinética, la energía potencial artificial del robot y la suma de términos cruzados entre la función que depende del error de posición y de la velocidad:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) + \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) d\boldsymbol{\sigma} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (23)$$

siendo  $\epsilon_0$  un número positivo. Es importante recalcar, no es necesario encontrar el valor numérico de  $\epsilon_0$ , solo demostrar el intervalo de existencia para propósitos de análisis de estabilidad asintótica. Además, la función candidata (23) puede reescribirse:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) d\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \left[ \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \right]^T M(\mathbf{q}) \left[ \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \right] > 0 \quad (24)$$

Aplicando la derivada temporal a (23) a lo largo de las trayectorias de la ecuación en lazo cerrado (22) y usando la regla de derivación de integrales de Leibniz:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \\ &- \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \left[ \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + (\Gamma \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \\ &- \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} (\Gamma \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\epsilon_0^2 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^3} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \int_0^{\tilde{\mathbf{q}}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma})^T K_p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\mathbf{q}}) d\boldsymbol{\sigma} \right)^T \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (25)$$

Sustituyendo el vector de aceleración  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  de la ecuación en lazo cerrado (22), usando la propiedad de antisimetría (4), la cancelación algebraica de algunos términos y usando la expresión (3):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} (\Gamma \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \\ &- \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) + \\ &+ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T [B + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T] \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T \underbrace{[C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T]}_{M(\mathbf{q})} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) + \\ &+ \boldsymbol{\rho}^T M(\mathbf{q})^{-1} [K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}}] + \\ &+ \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^3} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) - \frac{\epsilon_0^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} (\Gamma \dot{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (26)$$

Empleando lo siguiente: **Propiedad 1**, **Propiedad 5**, **Propiedad 6**, **Propiedad 7**, **Propiedad 8** y **Definición 4**, consideran-

do a  $\lambda_{Max}\{M(\mathbf{q})\} = \beta$ , la derivada de la función candidata (26) está acotada superiormente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \frac{n\rho_{pl}^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ &- [\lambda_{min}\{B\} + \frac{\sqrt{n}\rho_{vl}}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} - \frac{\epsilon_0 \sqrt{n}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} (k_c \kappa_{p\psi} + \kappa_{p\psi} \beta + \\ &+ \mu_{p\psi} \beta)] \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \left[ \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} (n\epsilon_0 \kappa_{p\psi} (\mu_{p\psi} \beta + \kappa_{p\psi} \beta + k_c \kappa_{p\psi})) + \right. \\ &+ \sqrt{n} \kappa_{p\psi} \lambda_{Max}\{B\} + n\mu_{p\psi} \kappa_{v\psi} \lambda_{Max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} - \\ &- \xi_p \beta g_{pu} (\sqrt{n} \frac{\rho_{vl}}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \sqrt{n} k_c + \lambda_{min}\{B\} - \\ &- n\kappa_{p\psi} \lambda_{Max}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}) \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned} \quad (27)$$

En su forma cuadrática:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \left[ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \right]^T P \left[ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \right] < 0 \quad (28)$$

siendo  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  con los elementos:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \frac{n\rho_{pl}^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}. \\ p_{12} &= -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} [n\epsilon_0 \kappa_{p\psi} (\mu_{p\psi} \beta + k_c \kappa_{p\psi} + \kappa_{p\psi} \beta) + \\ &+ \sqrt{n} \kappa_{p\psi} \lambda_{Max}\{B\} + n\mu_{p\psi} \kappa_{v\psi} \lambda_{Max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}] + \\ &+ \frac{1}{2} \xi_p \beta g_{pu} \left( \frac{\sqrt{n}\rho_{vl}}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} + \sqrt{n} k_c + \lambda_{min}\{B\} - \right. \\ &- n\kappa_{p\psi} \lambda_{Max}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \left. \right). \\ p_{21} &= p_{21}. \\ p_{22} &= [\lambda_{min}\{B\} + \sqrt{n} \frac{\rho_{vl}}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} - \\ &- \frac{\epsilon_0 \sqrt{n}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} (k_c \kappa_{p\psi} + \kappa_{p\psi} \beta + \mu_{p\psi} \beta)]. \end{aligned}$$

El elemento  $p_{11}$  es positivo, debido a que  $n$ ,  $\rho_{pl}$  y  $\lambda_{min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}$  son todos positivos. Entonces, el siguiente intervalo de existencia de  $\epsilon_0$  asegura que el determinante de la matriz  $P$  sea positivo:

$$\frac{\frac{n\rho_{pl}^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} n_1}{\frac{n\rho_{pl}^2}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \lambda_{min}\{K_p(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} (d_1) + \frac{1}{4} (d_2)^2} > \epsilon_0 > 0 \quad (29)$$

donde:

$$\begin{aligned} n_1 &= \lambda_{min}\{B\} + \frac{\sqrt{n}\rho_{vl}}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{min}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\} \\ d_1 &= k_c + \mu_{p\psi} \beta. \\ d_2 &= \kappa_{p\psi} \sqrt{n} \lambda_{Max}\{B\} + \mu_{p\psi} \kappa_{v\psi} \lambda_{Max}\{K_v(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})\}. \end{aligned}$$

concluyendo que  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$  es definida negativa. Por lo tanto,  $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$  es una función estricta. De acuerdo con el método directo de Lyapunov, el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado  $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$  es *asintóticamente estable* y *global*. Entonces, ambas variables de estado  $\tilde{\mathbf{q}}(t)$  y  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  convergen asintóticamente a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , dada cualquier condición inicial  $[\tilde{\mathbf{q}}(0), \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ .

## V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Con el objetivo de validar los resultados teóricos desarrollados anteriormente, se presentan datos experimentales en un robot manipulador de transmisión directa con 3 grados de libertad (ver Fig. 3) para examinar el funcionamiento y desempeño de la familia propuesta. Este manipulador ha sido diseñado y construido en la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Sus eslabones tienen una longitud de 0.4m, fabricados de aluminio 6061 y un espacio de trabajo esférico con 1m de radio. Los servomotores son tipo brushless de la compañía Parker Compumotor, sin la reducción de un

sistema de engranajes. Las especificaciones de torque aplicado, modelo y encoder se muestran en la Tabla I.

El experimento consiste en regular al robot hacia las posiciones deseadas  $\mathbf{q}_d = [45, 45, 90]^T$  grados, desde la posición de reposo  $\mathbf{q}(0) = [0, 0, 0]^T$  grados. Los actuadores operan en modo torque, aceptando una entrada analógica de voltaje como una señal de referencia de torque. Los esquemas de control fueron implementados en tiempo real en lenguaje C y con un muestreo de 2.5 ms en una computadora Pentium III que incluye una tarjeta de instrumentación modelo MFIIIO-3A por Precision MicroDynamic Inc. Para la sintonía de las ganancias variables, se propone una regla matemática en términos del torque máximo aplicado por el servomotor  $\tau_i^{max}$  para evitar su saturación. Por último, para poder implementar la familia de reguladores en el manipulador solo es necesario el vector de pares gravitacionales  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ , el cual se ha obtenido por esquemas de identificación paramétrica reportados en [24]. Los resultados experimentales obtenidos en la Fig. 4, son datos medidos y filtrados del robot.



Fig. 3. Robot manipulador de transmisión directa BUAP.

TABLA I  
ESPECIFICACIONES DE LOS SERVOMOTORES.

Articulación	Torque Máximo	Modelo	Encoder
Base	15 Nm	DM1055B	1638400 p/rev
Hombro	50 Nm	DM1050A	1015808 p/rev
Codo	5 Nm	DM1004CB	2612440 p/rev

#### A. Sintonía de las Ganancias Variables

Garantizada la convergencia asintótica a cero de las variables de estado  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ , la sintonía de las ganancias variables depende de  $\hat{k}_{pi}$  y  $\hat{k}_{vi}$ . En este sentido, se propone la siguiente regla matemática en función del torque máximo suministrado por el  $i$ -ésimo servomotor del robot manipulador  $\tau_i^{max}$ :

$$\begin{aligned} \hat{k}_{pi} &= 2\delta_i \sqrt{\tau_i^{max}} \\ \hat{k}_{vi} &= \gamma_i \sqrt{\left(2\delta_i \sqrt{\tau_i^{max}} + 1\right)^2} \end{aligned} \quad (30)$$

donde  $\delta_i \in (0, \omega_i)$  y  $\gamma_i \in (0, 1)$  son asignados por el usuario: siendo  $\omega_i = \sqrt{\tau_i^{max}}/2$ . Los intervalos de  $\delta_i$  y  $\gamma_i$ , evitan la región de saturación a pesar de elegir valores arbitrarios. Para programar un transitorio deseado, se propone el siguiente criterio: sobreamortiguado  $T_{so} = \gamma_i > 1.3 \delta_i \sqrt{\tau_i^{max}}$  y subamortiguado  $T_{sub} = \gamma_i \leq 1.3 \delta_i \sqrt{\tau_i^{max}}$ ; en ambos casos,

considere  $\delta_i = 0.85 \omega_i$ . Usando este criterio, los servomotores trabajan en un 80-85 porciento de su capacidad máxima.

#### B. Implementación de los Algoritmos de Control

Son 5 los casos de la familia de algoritmos de control implementados en el robot manipulador. Mostramos en la Tabla II, las especificaciones de las funciones para las acciones de control acotadas, las ganancias variables y su nomenclatura. Se consideran las características de los vectores  $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}})$  y  $\mathbf{f}(\dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  con  $n = 3$  y con diferentes valores de  $\psi_i$  (ver Tabla II). Para las matrices de ganancia variables (GV), se han utilizando las funciones  $f_{pi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  y  $f_{vi}(\tilde{q}_i, \dot{q}_i)$  propuestas en (17)-(19), para  $i = 1, 2, 3$ . Asimismo, usando la regla de sintonía (30) asignamos los valores de  $\delta_i$  y  $\gamma_i$  para los casos de la familia. Estos valores han sido elegidos después de realizar diversas pruebas en el robot, hasta observar una convergencia a régimen permanente, con mínimos sobretiros y manteniendo a los actuadores dentro de sus capacidades físicas (ver Tabla I).

TABLA II  
CASOS DE LA FAMILIA DE REGULADORES.

Regulador	$\psi_i$	$\delta_i$	$\gamma_i$	GV
$\tau_{so}$	{1, 1, 1}	{3, 3, 3}	{0.8, 0.8, 0.8}	(17)
$\tau_{sub}$	{1, 1, 1}	{4, 4, 4}	{0.8, 0.8, 0.8}	(17)
$\tau_a$	{2, 2, 2}	{3, 3, 3}	{0.5, 0.5, 0.5}	(18)
$\tau_b$	{2, 2, 2}	{2, 2, 2}	{0.8, 0.65, 0.65}	(19)
$\tau_c$	{2, 2, 2}	{3.5, 4.9, 1.8}	{0.8, 0.65, 0.65}	(17)

Para programar un transitorio sobreamortiguado en el robot, hacemos uso del regulador  $\tau_{so}$ . En la Fig. 4a, se observan los errores de posición del robot a través  $\tau_{so}$ ; observe que, sus articulaciones convergen asintóticamente a las posiciones deseadas con un transitorio sobreamortiguado y con las señales de torque dentro de las limitaciones de los servomotores (ver Fig. 4d). Implementando el algoritmo  $\tau_{sub}$ , los errores del robot se estabilizan en una vecindad cercana al cero (en un tiempo menor, en comparación a  $\tau_{so}$ ) con un transitorio subamortiguado (ver. Fig. 4b) y con los torques aplicados dentro de sus capacidades físicas (ver Fig. 4e). Mediante el caso  $\tau_a$ , logramos una convergencia asintótica hacia las posiciones deseadas (ver Fig. 4c), estabilizando a  $\tilde{q}_1$  en un tiempo menor en comparación con  $\tau_{sub}$ ; además, se mantienen los actuadores dentro de la región lineal de trabajo (ver Fig. 4f). El esquema  $\tau_b$  regula a  $\tilde{q}_1$  y  $\tilde{q}_2$  al régimen permanente en un menor tiempo y sin oscilaciones en el transitorio, con respecto a  $\tau_a$  (ver Fig. 4g); al mismo tiempo, los actuadores no superan sus límites físicos (ver Fig. 4j). Finalmente, con el caso  $\tau_c$  el robot converge al punto de equilibrio y la articulación  $\tilde{q}_2$  se logra estabilizar más rápido sin sobretiros en el transitorio (ver Fig. 4h), con respecto al regulador  $\tau_b$ ; por último, las señales de torque aplicado no exceden las capacidades de los actuadores (ver Fig. 4k).

Los resultados experimentales obtenidos muestran la funcionalidad de los reguladores propuestos. Sin embargo, es necesario medir su desempeño. La motivación es compararlos con un regulador ampliamente usado en robots industriales, el esquema PD clásico. Este se ha implementado en el robot de 3 grados de libertad, sintonizando sus ganancias de manera

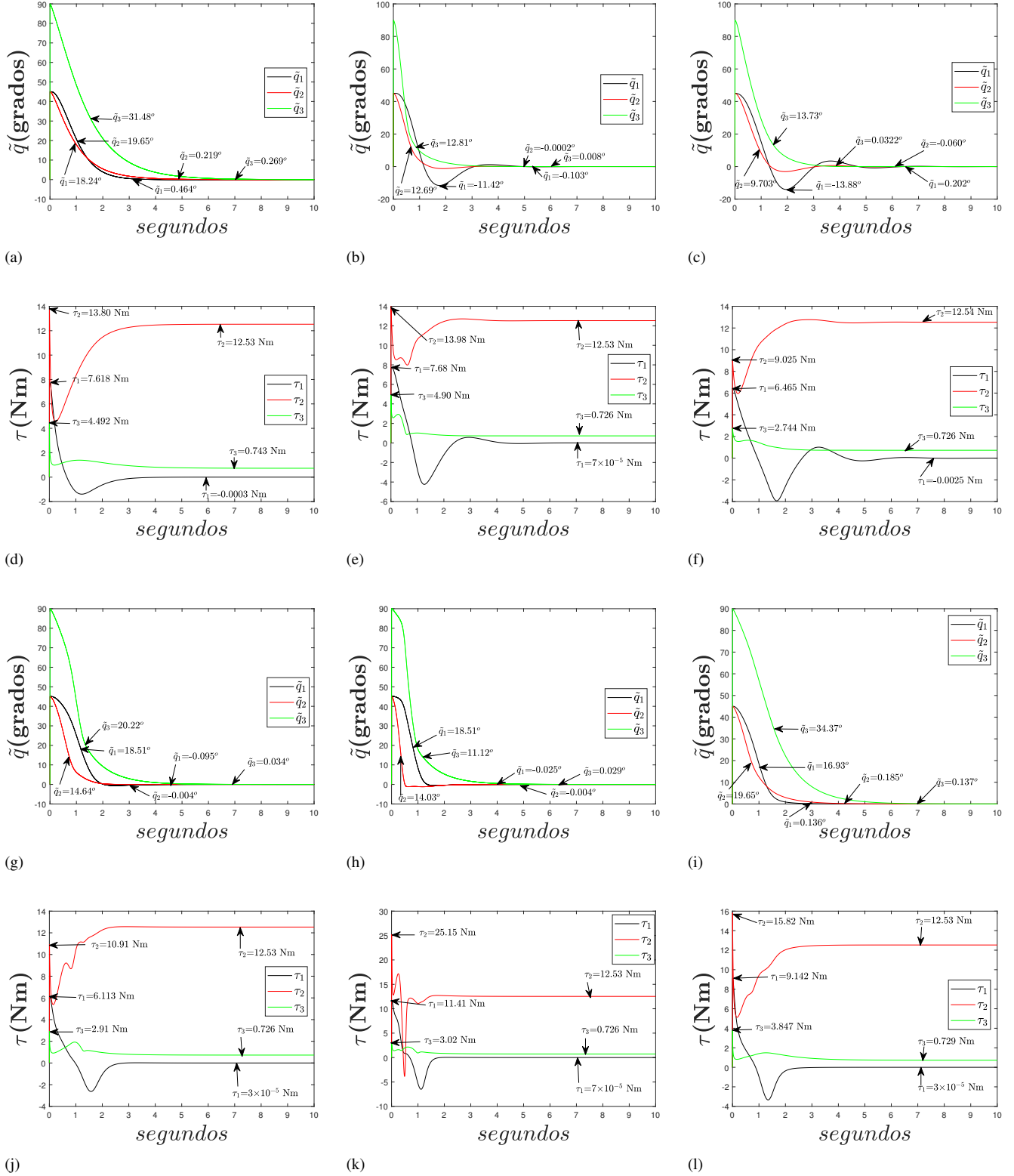


Fig. 4. (a) Errores mediante  $\tau_{SO}$ . (d) Torque aplicado mediante  $\tau_{SO}$ . (b) Errores mediante  $\tau_{sub}$ . (e) Torque aplicado mediante  $\tau_{sub}$ . (c) Errores mediante  $\tau_a$ . (f) Torque aplicado mediante  $\tau_a$ . (g) Errores mediante  $\tau_b$ . (j) Torque aplicado mediante  $\tau_b$ . (h) Errores mediante  $\tau_c$ . (k) Torque aplicado mediante  $\tau_c$ . (i) Errores mediante  $\tau_{PD}$ . (l) Torque aplicado mediante  $\tau_{PD}$ .

manual [10] y obteniendo los resultados mostrados en la Fig. 4i y Fig. 4l. Empleando la norma  $\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}]$ , la cual mide la norma media cuadrática del error de posición  $\tilde{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^3$ , encontramos

el esquema de control con mejor desempeño:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T_e} \int_0^{T_e} \|\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)\|^2 d\sigma} \quad (31)$$

Con  $T_e = 10$ s, se ha obtenido una norma  $\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = 31.451$  para el PD,  $\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = 30.014$  para  $\tau_{so}$ ,  $\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = 28.860$  para  $\tau_b$ ,  $\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = 25.460$  para  $\tau_a$ ,  $\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = 25.236$  para  $\tau_c$  y una  $\mathcal{L}_2[\tilde{q}] = 21.076$  para  $\tau_{sub}$ . Observe, que todos los casos de los reguladores acotados tienen mejor desempeño que el regulador PD y con un rango de mejora del 33 por ciento, con respecto al caso  $\tau_{sub}$  que tiene el mejor desempeño.

Finalmente, los resultados experimentales demuestran la funcionalidad de la familia de reguladores acotados con ganancias variables frente a la dinámica de un robot de transmisión directa real y verificando su actual desempeño en comparación con el controlador PD. La regla de sintonía se adecua a cualquier usuario en robótica y a las diversas aplicaciones de un manipulador, modificando los valores de  $\delta_i$ ,  $\gamma_i$  y sus intervalos de variación. Además, los algoritmos pueden implementarse a pesar de no conocer ciertos parámetros del robot, como son inercias y los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb.

## VI. CONCLUSIONES

La demostración de la estabilidad asintótica mediante una función estricta de Lyapunov, representa una aportación importante frente a otros algoritmos con ganancias variables reportados, considerando un nuevo moldeo de la energía potencial artificial del robot, el cual es dependiente del error de posición y de la velocidad. Esta propiedad genera inmunidad a las condiciones iniciales, convirtiéndose en una alternativa interesante para el control de trayectoria y otras aplicaciones de control automático de sistemas no lineales. Finalmente, los resultados experimentales son evidencias importantes de la adecuada funcionalidad y desempeño de la familia de controladores en un robot manipulador físico, respaldando los resultados teóricos presentados en este trabajo.

## AGRADECIMIENTOS

Brandon Sánchez-García agradece por la beca No. 1008015 otorgada por CONACyT.

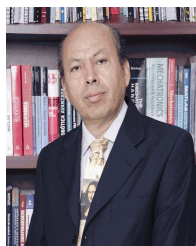
## REFERENCIAS

- [1] V. Santibáñez, K. Camarillo, J. Moreno-Valenzuela, and R. Campa, "A practical PID regulator with bounded torques for robot manipulators," *Int. Journal Control Autom. Systems*, vol. 8, pp. 544–555, 2010.
- [2] F. Reyes and B. Al-Hadithi, "An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability," *Automatica*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.
- [3] N. Fischer, A. Dani, and et al, "Saturated control of an uncertain nonlinear system with input delay," *Automatica*, no. 49, pp. 1741–1747, 2013.
- [4] Z. Liu and J. Liu, "Boundary control of a flexible robotic manipulator with out constraints," *Asian J. Control*, vol. 19, no. 1, pp. 332–345, 2017.
- [5] X. Cheng and H. Liu, "Bounded decoupling control for flexible-joint robot manipulators with state estimation," *IET Control Theo. Appl.*, vol. 14, pp. 2348–2358, 2020.
- [6] H. Gritli and S. Belghith, "LMI-based synthesis of a robust saturated controller for an underactuated mechanical system subject to motion constraints," *European Journal Control*, 2020.
- [7] F. Rossomando and et al, "Neural dynamics variations observer designed for robot manipulator control using a novel saturated control technique," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2020, 2020.
- [8] M. Mendoza and et al, "Output-feedback PID-type control with simple tuning for the global regulation of robot manipulators with input constraints," *IET Control Theory Appl. Inst. Engrg. Tech.*, pp. 1–10, 2015.

- [9] M. Jimenez and et al, "On stability of a nonlinear PID-like controller with gravity compensation for input-saturated robot manipulators," *2021 IEEE Conf. on Cont. Tech. and Appl.*, pp. 1083–1088, 2021.
- [10] F. Reyes, O. Félix, J. Cid, and G. Alonso, "A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators," *Kybernetika*, vol. 55, pp. 544–555, 2019.
- [11] J. Caverly, D. Zlotink, and et al, "Saturated proportional derivative control of a single-link flexible-joint manipulator," *Robot Comput. Integr. Manuf.*, no. 30, pp. 658–666, 2014.
- [12] R. Kelly and R. Carelli, "A class of nonlinear PD-type controllers for robot manipulators," *J. Robot. Syst.*, vol. 13, no. 12, pp. 793–802, 1996.
- [13] F. Salas, V. Santibáñez, and M. A. Llama, "Variable gains PD tracking control of robot manipulators: stability analysis and simulations," *In: 2012 WAC*, pp. 1–6, 2012.
- [14] M. A. Limón-Díaz, F. Reyes, and E. González-Galvan, "Saturated regulation with derivative variable gain of robot manipulators," *RIAR*, vol. 14, no. 3, pp. 434–445, 2017.
- [15] J. Sifuentes-Mijares and et al, "Nonlinear PID global regulators with selftuned PD gains for robot manipulators: theory and experimentation," *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, vol. 43, no. 223, 2021.
- [16] M. A. Limón-Díaz, F. Reyes-Cortés, and E. J. González-Galván, "Unbounded regulators with variable gains for a direct-drive robot manipulator," *Automatica*, vol. 57, no. 2, pp. 484–495, 2016.
- [17] C. Boudjedir, D. Boukhetala, and M. Bouri, "Nonlinear PD plus sliding mode control with application to a parallel delta robot," *J. of Electrical Eng.*, vol. 69, no. 5, pp. 329–336, 2018.
- [18] M. Hosseini, A. Khalilpour, and H. Taghirad, "Practical robust nonlinear pd controller for cable-driven parallel manipulators," *Nonlinear Dynamics*, vol. 106, pp. 405–424, 2021.
- [19] H. Wang and et al, "Global output feedback finite-time regulation of robot manipulators under actuator constraints," *J Dyn. Sys. Meas. Control*, vol. 139, no. 6, 2017.
- [20] R. Suárez and et al, "A strict Lyapunov function for the finite-time regulation of robot manipulators with bounded inputs," *In 2019 American Control Conference (ACC)*, pp. 1761–1766, 2019.
- [21] C. Zheng, Y. Su, and et al, "A simple nonlinear PD control for faster and high-precision positioning of servomechanisms with actuator saturation," *Mecha. Syst. and Sign. Process.*, vol. 121, pp. 215–226, 2019.
- [22] B. Sánchez-García, F. Reyes-Cortés, B. Al-Hadithi, and O. Félix-Beltrán, "Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators," *Journal of Robotics and Control*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [23] M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators," *ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control*, vol. 103, pp. 119–125, June 1981.
- [24] C. Chávez-Olivares, F. Reyes-Cortés, and et al, "Experimental evaluation of parameter identification schemes on a direct-drive robot," *J of Syst. and Control Eng.*, vol. 226, no. 10, pp. 1419–1431, 2012.



**Brandon Sánchez García** was born in Puebla, Mexico, on February, 1994. He received the B.E. degree in mechatronics from the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Puebla, México, in 2018. In 2021, he received the M.S. degree in electronics (with honors) from BUAP. He has several publications in national and international conferences on automatic control. His research interests include the fields on control for robot manipulators with biomedical applications.



**Fernando Reyes Cortés** was born in Puebla, Mexico, on March 7, 1962. He received the Ph.D. degree in electronics from the Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada, México, in 1980, he is Professor and Researcher in the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. He has published five books and more than 250 scientific papers in national and international conferences and journals. His research interests include the fields on control of robot manipulators and its practical applications.



**Basil M. Al-Hadithi** received a PhD in process control and artificial intelligence in 2002 from Universidad Politécnica de Madrid (UPM) (Spain). He is a researcher at the Centre for Automation and Robotics UPM-CSIC. He has several publications (JCR), book chapters and conference papers. Moreover, he has participated in several research projects and industrial contracts with companies. He is a board member and reviewer of several international scientific societies and international journals in modelling and designing control systems.