

Subspace Predictive Control Tuning with Multiobjective Optimization

Victor R. B. Maciel and Rafael B. C. Lima

Abstract—In this paper, a tuning method for data-driven, subspace predictive controllers is proposed. The tuning approach is based on the solution of a multiobjective optimization, in which the optimization problem is defined as the minimization of the quadratic error between closed-loop response and some desired reference trajectories. In its turn, these trajectories are described in function of user-defined time-domain objectives. The tuning parameters are obtained as the compromise solutions of the multiobjective optimization problem. Design choices and performance are discussed and the method is validated in computational simulations of some common types of process. Additionally, the tuning methodology is implemented in a multivariable pilot-scale thermoelectrical plant.

Index Terms—Subspace Predictive Control, Control Tuning, Multiobjective Optimization.

I. INTRODUÇÃO

O controle preditivo baseado em modelo (MPC - *Model Predictive Control*) teve origem no final da década de 1970, desenvolvendo-se bastante desde então. O MPC não compreende uma única estratégia de controle, mas sim um vasto conjunto de metodologias que empregam modelos do processo de modo a buscar o sinal de controle ótimo que minimize uma certa função de custo [1]. O MPC apresenta uma série de vantagens que o torna bastante atrativo, tais como: apresentar uma formulação que é aplicável a sistemas multivariáveis de forma simples; ter a capacidade de lidar com diferentes tipos de restrições em um sistema de controle; ser capaz de executar otimização de processos de forma *online* [2].

Devido ao alto número de parâmetros de sintonia, surgiram várias métodos para a sintonia de controladores MPC. Alguns métodos apresentam-se na forma de equações que descrevem os parâmetros de sintonia em termos dos parâmetros da dinâmica do processo, tais como tempo morto, ganhos, constantes de tempo e o período de amostragem. Outros consistem em problemas de otimização cujas soluções são os valores dos parâmetros de sintonia. Existem ainda alguns métodos de sintonia heurísticos. Uma revisão detalhada de métodos de sintonia consolidados pode ser encontrada em [3], [4].

Por utilizar explicitamente o modelo do processo para realizar previsões, o primeiro passo para o projeto de um controlador MPC é a obtenção de um modelo, que posteriormente é usado para a construção das matrizes de previsão empregadas na lei de controle. Os modelos podem ser construídos a partir de relações matemáticas bem conhecidas que descrevem

a dinâmica do sistema ou a partir de algum processo de identificação por meio de dados experimentais. Os processos de identificação, entretanto, apresentam algumas restrições. A identificação de modelos paramétricos, como uma função de transferência ou um modelo de espaço de estados, geralmente envolvem uma ordem reduzida em uma estrutura pré-especificada, que pode omitir parte da complexidade do processo. Abordagens com modelagem não paramétrica, como modelagem pela resposta ao impulso, ao degrau ou baseada na resposta em frequência, são limitados às restrições físicas do processo e dos atuadores envolvidos [5]. Uma revisão sobre os diversos métodos de identificação pode ser vista em [6], [7].

Uma maneira de evitar o processo de obtenção de um modelo paramétrico é utilizando abordagens voltadas a dados. Neste tipo de metodologia, as matrizes de previsão são obtidas diretamente dos dados do processo, eliminando a necessidade de escolha de um modelo para a planta. Neste contexto, surgiram os métodos de controle preditivo por subespaços (SPC - *Subspace Predictive Control*), que utilizam como preditores um certo conjunto de matrizes intermediárias do processo de identificação por subespaços. Mais detalhes sobre a abordagem por subespaços em controladores preditivos pode ser encontrada em [5], [8], [9]. O trabalho [10] é o único da literatura que trata da sintonia do controlador SPC, propondo a sintonia dos horizontes levando em conta critérios de estabilidade, deixando a cargo do projetista a escolha das matrizes de ponderação.

Nesse artigo será proposto um método de sintonia de controladores preditivos por subespaços considerando o caso sem restrições nas variáveis do processo, no qual os parâmetros R_k e Q_k que definem a agressividade e robustez da resposta em malha fechada são obtidos por meio de um processo de otimização multiobjetiva. Esta solução busca uma relação de compromisso entre os objetivos concorrentes, que buscam aproximar as saídas do processo por um conjunto de trajetórias de referências definidas pelo projetista. Aspectos ligados à escolha de certos parâmetros de sintonia são discutidos e a validação do método é feita por meio de simulações computacionais e da aplicação em uma planta piloto termoelétrica.

O trabalho está organizado conforme segue: na seção II é apresentada a formulação matemática do algoritmo de controle SPC baseado em dados; na seção III é definido o problema de otimização multiobjetiva, bem como a metodologia de sintonia proposta; na seção IV são analisados os resultados obtidos e, por fim, as conclusões são apresentadas na seção V.

Victor R. B. Maciel, Department of Electrical Engineering, Federal University of Campina Grande, Brazil, email: victor.maciell@ee.ufcg.edu.br

Rafael B. C. Lima, Department of Electrical Engineering, Federal University of Campina Grande, Brazil, email: rafael.lime@dee.ufcg.edu.br

II. CONTROLADOR PREDITIVO POR SUBESPAÇOS

A. Identificação por Subespaços

Os métodos de identificação por subespaços (SID - *Subspace Identification*) oferecem uma alternativa bastante robusta e computacionalmente eficientes em relação aos métodos de erro de predição, tais como identificação por mínimos quadrados, por serem baseado em fatoração QR e decomposição em valores singulares (SVD). Métodos SID são procedimentos não iterativos, evitando problemas com mínimos locais e convergência. Outra vantagem é que estes métodos são intrinsecamente adequados para a identificação de sistemas multivariáveis, pois os modelos obtidos são em espaço de estados [5]. Uma revisão dos métodos SID pode ser encontrada em [11].

De maneira geral, o problema de identificação por subespaços pode ser definido como a estimação das matrizes do modelo do sistema em espaço de estados, utilizando para isso relações de projeção de certas matrizes de dados. Considerando que o sistema possua Estas matrizes são construídas por meio dos m sinais de entrada $u(k)$ e dos l sinais de saída $y(k)$, onde $y(k)$, $u(k) \in \{1, 2, \dots, s\}$. O modelo é dado por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2)$$

1) *Definições:* Na literatura sobre os métodos de identificação por subespaços, utiliza-se matrizes de Hankel para compactar os dados de entrada e saída do sistema. Este tipo de matriz tem a propriedade que cada diagonal ascendente da esquerda para a direita possui os mesmos elementos. A matriz de Hankel de entrada é

$$U = \begin{pmatrix} \frac{U_p}{U_f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) & \dots & u(j) \\ u(2) & \dots & u(j+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(M) & \dots & u(M+j-1) \\ u(M+1) & \dots & u(M+j) \\ u(M+2) & \dots & u(M+j+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2i) & \dots & u(2M+j-1) \end{pmatrix} \quad (3)$$

onde o número de linhas M é um índice definido pelo usuário que deve ser pelo menos maior que a ordem máxima do sistema que se deseja identificar. O número de colunas j é simplesmente dado por $j = s - 2M + 1$ para que se use todos os dados disponíveis. O subscrito p denota que são dados passados e o subscrito f por sua vez denota que são dados futuros. A matriz de Hankel de saída $Y^T = (Y_p | Y_f)$ é definida de modo similar a (3). A matriz que contém os dados de entrada e saída passados é definida como:

$$W_p = \begin{pmatrix} Y_p \\ U_p \end{pmatrix}$$

2) *Cálculo dos Preditores:* É possível mostrar que, desde que a entrada seja persistentemente excitada, que o sistema esteja em malha aberta e que o número de medições s seja suficientemente grande, o preditor ótimo de Y_f é escrito como

combinação linear dos dados passados de entrada e saída W_p e dos dados futuros de entrada U_f

$$\hat{Y}_f = L_w W_p + L_u U_f \quad (4)$$

$$\min_{L_w, L_u} = \|Y_f - (L_w \ L_u) \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix}\|_F^2$$

que pode ser reescrito em termos da projeção ortogonal do espaço linha de Y_f no espaço linha de $(W_p \ U_f)^T$:

$$\hat{Y}_f = Y_f / \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} = Y_f \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} \quad (5)$$

Esta projeção pode ser calculada de maneira numericamente robusta fazendo uso da seguinte decomposição QR:

$$\begin{pmatrix} W_p \\ Y_f \\ U_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}_f = L \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} = (L_w \ L_u) \begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde

$$L = (L_w \ L_u) = (R_{31} \ R_{32}) \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}^\dagger \quad (7)$$

com $L_w \in \mathbb{R}^{Ml \times M(m+1)}$ sendo as primeiras $M(m+1)$ colunas de L e $L_u \in \mathbb{R}^{Ml \times Mm}$ correspondendo as demais colunas.

B. Lei de Controle

O SPC foi introduzido pela primeira vez no final da década de 1990 em [8] e é baseado na combinação dos preditores dos algoritmos de identificação por subespaços com os métodos de controle preditivo baseados em modelos (MPC). No SPC, as matrizes dos preditores são obtidas diretamente de dados de entrada e saída do processo, sem a necessidade de um modelo intermediário. Além das vantagens que os controladores MPC apresentam, a abordagem por subespaços possui vantagens próprias, tais como: não necessitar de informações a priori, ser um método não iterativo, assim como não ser preciso resolver equações diofantinas.

A lei de controle preditivo busca o sinal ótimo de controle $u(k)$ que minimize a seguinte função de custo:

$$\min_{u_k} J = \sum_{i=1}^{N_p} (\hat{y}(k+i) - r(k+i))^T Q_k (\hat{y}(k+i) - r(k+i)) + \sum_{i=1}^{N_c} \Delta u(k+i)^T R_k \Delta u(k+i) \quad (8)$$

onde $\Delta = (1 - q^{-1})$, com q^{-1} denotando o operador de atraso unitário. O vetor $\hat{y}(k)$ é a saída predita, $Q_k \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $R_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são as matrizes de ponderação do erro de rastreamento da referência e do esforço de controle, respectivamente, N_p é o horizonte de predição e N_c é o horizonte de controle ($N_p, N_c \leq M$). A função de custo (8) pode ainda ser escrita sob a forma matricial. Definindo as sequências do esforço de

controle futuro Δu_f , da saída predita \hat{y}_f , da referência r_f e os sinais de entrada e saída passados incrementais Δw_p

$$\Delta u_p = \begin{pmatrix} \Delta u(k-M+1) \\ \Delta u(k-M+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c) \end{pmatrix}, \quad \Delta y_p = \begin{pmatrix} \Delta y(k-M+1) \\ \Delta y(k-M+2) \\ \vdots \\ \Delta y(k) \\ \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_p) \end{pmatrix},$$

$$\Delta u_f = \begin{pmatrix} \Delta u(k+1) \\ \Delta u(k+2) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_c) \end{pmatrix}, \quad \hat{y}_f = \begin{pmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N_p) \end{pmatrix},$$

$$r_f = \begin{pmatrix} r(k+1) \\ r(k+2) \\ \vdots \\ r(k+N_p) \end{pmatrix}, \quad \Delta w_p = \begin{pmatrix} \Delta y_p \\ \Delta u_p \end{pmatrix}$$

E a nova função de custo

$$J = (\hat{y}_f - r_f)^T Q (\hat{y}_f - r_f) + \Delta u_f^T R \Delta u_f \quad (9)$$

onde as matrizes $Q \in \mathbb{R}^{N_p \times N_p}$, $R \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$ são definidas por meio do produto de Kronecker (\otimes): $Q = I_{N_p} \otimes Q_k$ e $R = I_{N_c} \otimes R_k$, sendo Q positiva semi-definida e R é positiva definida [9].

Conforme mostrado em (4), é possível notar que o termo \hat{y}_f pode ser reescrito em termos das matrizes de predição L_w e L_u , sendo a primeira coluna de \hat{Y}_f dado por (6). Neste caso, os horizontes N_p e N_c são usados para truncar os preditores, resultando em

$$\hat{y}_f = \tilde{L}_w w_p + \tilde{L}_u u_f \quad (10)$$

e os preditores truncados são definidos, usando a notação do MATLAB®, como:

$$\tilde{L}_w = L_w(1 : N_p l, :)$$

$$\tilde{L}_u = L_u(1 : N_p l, 1 : N_c m)$$

O vetor \hat{y}_f encontrado em (10), entretanto, não pode ser utilizado diretamente na expressão para a função de custo (9), visto que nesta pretende-se encontrar o sinal de controle incremental Δu ótimo. Entretanto, conforme mostrado em [5], é possível escrever \hat{y}_f em termos de dados incrementais da forma

$$\Delta \hat{y}_f = \tilde{L}_w \Delta w_p + \tilde{L}_u \Delta u_f$$

$$\hat{y}_f = \frac{1}{\Delta} \tilde{L}_w \Delta w_p + \frac{1}{\Delta} \tilde{L}_u \Delta u_f$$

$$= F_1 y(k) + F_2 \tilde{L}_w \Delta w_p + F_2 \tilde{L}_u \Delta u_f$$

$$\hat{y}_f = F_1 y(k) + \tilde{L}_w \Delta w_p + \tilde{L}_u \Delta u_f \quad (11)$$

onde

$$F_1 = \begin{pmatrix} I_l \\ I_l \\ \vdots \\ I_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p \times 1}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} I_l & 0 & \dots & 0 \\ I_l & I_l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_l & I_l & \dots & I_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_p \times N_p}$$

$$\tilde{L}_w \Delta w_p = F_2 \tilde{L}_w \Delta w_p \quad \tilde{L}_u \Delta u_f = F_2 \tilde{L}_u \Delta u_f$$

Conforme mostrado em [9], [10], substituindo (11) em (9) e tomando $tr\left(\frac{\partial J}{\partial \Delta u_f}\right) = 0$, encontra-se a seguinte lei de controle preditivo:

$$\Delta u_f = -K_e (y(k) - r(k+1)) - K_w \Delta w_p \quad (12)$$

onde as matrizes de ganho $K_e \in \mathbb{R}^{N_c \times m \times 1}$ e $K_w \in \mathbb{R}^{N_c \times m \times M(1+m)}$ são definidas como

$$K_e = (R + \tilde{L}_{uI}^T Q \tilde{L}_{uI})^{-1} \tilde{L}_{uI}^T Q F_1 \quad (13)$$

$$K_w = (R + \tilde{L}_{uI}^T Q \tilde{L}_{uI})^{-1} \tilde{L}_{uI}^T Q \tilde{L}_w I \quad (14)$$

Na literatura de controle preditivo, apesar de ser calculado o sinal ótimo de controle ao longo de todo o horizonte de controle N_c , aplica-se o princípio do horizonte de predição móvel, no qual a entrada de controle é recalculada a cada instante de amostragem. Neste caso, somente os m primeiros elementos de (12) são implementados, resultando na lei de controle:

$$\Delta u(k+1) = -k_e (y(k) - r(k+1)) - k_w \Delta w_p \quad (15)$$

$$u(k+1) = \Delta u(k+1) + u(k) \quad (16)$$

onde k_e e k_w são as primeiras m linhas de K_e e K_w , respectivamente.

III. SINTONIA BASEADA EM OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVA

A. Problema de Otimização Multiobjetiva

O processo de otimizar de forma sistemática e simultânea um conjunto de funções objetivo é chamado de otimização multiobjetiva (MOO - *Multiobjective Optimization*), que busca uma solução única para problemas que apresentem objetivos concorrentes. Uma revisão de diversos métodos de MOO aplicados à engenharia pode ser encontrado em [12]. Um problema geral de otimização multiobjetiva pode ser definido como:

$$\min_x F(x) = (F_1(x) \ F_2(x) \ \dots \ F_w(x))^T$$

$$\text{sujeito a: } \quad g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, z$$

$$h_l(x) = 0, \quad l = 1, \dots, e$$

onde $F(x)$ é o vetor que compreende as w funções objetivo $F_i(x)$, funções das n_d variáveis de decisão x . As funções $g_j(x)$ e $h_l(x)$ definem o espaço de projeto realizável $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^{n_d} \mid g_j(x) \leq 0, \quad h_l = 0 \ \forall \ j = 1, \dots, z, \quad l = 1, \dots, e\}$ e estão relacionados com as restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente. O conjunto de pontos determinados por $F(x)$ formam o espaço de critérios realizáveis $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{R}^w \mid z = F(x), \quad x \in \mathbf{X}\}$.

Na literatura de otimização multiobjetiva, a fronteira de Pareto delimita a região realizável e é definida pelo conjunto de pontos $F(x^*)$ associados a $x^* \in \mathbf{X}$ de modo que não existe outro ponto $x \in \mathbf{X}$ tal que $F(x) \leq F(x^*)$ e $F_i(x) < F_i(x^*)$ para ao menos um i .

Um ponto de interesse é o ponto de Utopia (ou ponto ideal) $F^\circ(x) \in \mathbf{Z}$, dado por $F^\circ(x) = \min_x \{F_i(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$ para cada $i = 1, \dots, w$.

Métodos de sintonia para controladores MPC baseado em otimização objetiva podem ser encontrados na literatura [13], [14], [15]. Um dos métodos para solução de problemas de otimização multiobjetiva é a solução de compromisso. Nesta abordagem, o algoritmo buscará minimizar a diferença entre um potencial ponto ótimo e o ponto de Utopia F° . A solução encontrada é o ponto realizável mais próximo do ponto de Utopia em termos da distância euclidiana. Entretanto, não é necessário restringir a medida de proximidade à norma euclidiana.

B. Sintonia Baseada na Solução de Compromisso

Considerando a função de custo (8), é possível notar que os parâmetros de sintonia são as matrizes Q_k e R_k , que ajustam, respectivamente, o erro de rastreamento da referência e a variação do sinal de controle. Há ainda dois parâmetros que também afetam no desempenho em malha fechada: os horizontes de controle N_c e de predição N_p . Entretanto, para manter o processo de sintonia mais simples, preferiu-se focar somente em obter valores ótimos para Q_k e R_k , utilizando valores recomendados pela literatura de sintonia MPC para buscar os valores de N_c e N_p . Valores pequenos de N_c resultam em sistemas mais lentos e estáveis, enquanto valores maiores levam a respostas mais agressivas, porém, com menos robustez. Conforme mostrado em [4], geralmente usa-se valores pequenos para o horizonte de controle ($N_c \leq 5$). Recomenda-se que o horizonte de predição seja grande o suficiente para englobar a dinâmica do sistema. Os métodos analíticos de sintonia MPC encontrados na literatura em geral são descritos em termos de métricas de performance em malha aberta [3], [4]. Para o método aplicável a controladores SPC proposto, será usado um N_p com valor em instantes de amostragem que corresponde ao tempo necessário para que a resposta ao degrau em malha aberta fique entre 80% a 90% do valor de regime permanente. Na metodologia proposta, assume-se que o horizonte do modelo M é igual a N_p .

Para a sintonia, as funções objetivo F_i são definidas como o erro entre a resposta em malha fechada $y_i(k)$ e uma trajetória de referência pré-definida $y_i^{ref}(k)$. Neste caso, escolheu-se que a trajetória de referência é definida por meio da resposta de um sistema qualquer $G_{refN}(s)$ de ordem N a um sinal qualquer. Assim, a função objetivo F_i é

$$F_i(x) = \sum_{k=1}^{t_{tun}} (y_i^{ref}(k) - y_i(k))^2, \quad i = 1, \dots, l \quad (17)$$

onde t_{tun} é o horizonte de sintonia. O valor de t_{tun} deve ser escolhido grande o suficiente para que as funções objetivo F_i consigam capturar a dinâmica do processo. As saídas $y_i(k)$ são calculadas de acordo com lei de controle preditivo por subespaços já definida (11). Se as matrizes de ponderação forem diagonais, isto é, $Q_k = \text{diag}(q_1, \dots, q_l)$ e $R_k = \text{diag}(r_1 \dots r_m)$, então o vetor de variáveis de decisão é definido como $x = (q_1 \dots q_l \ r_1 \dots r_m)$ e corresponde aos parâmetros de sintonia do controlador.

Como já mencionado, o método de sintonia proposto considera o problema sem restrições. Para lidar com elas, seria preciso adicionar ao controlador um algoritmo de programação

quadrática que lide com estas restrições no contexto do problema MOO, algo que aumentaria a complexidade do método.

O ponto de Utopia $F^\circ(x)$ é obtido como solução do seguinte problema de otimização:

$$F_i^\circ(x) = \min_x F_i(x), \quad i = 1, \dots, l \quad (18)$$

$$\text{sujeito a: } LB \leq x \leq UB \quad (19)$$

onde $w = l + m$. Entretanto, o ponto de Utopia em geral é irrealizável, a menos que todas as funções objetivo tenham a mesma solução ótima. Finalmente, a sintonia é obtida por meio da solução de compromisso, minimizando a distância euclidiana em relação à solução de Utopia

$$\arg \min_x \|F^\circ - F(x)\|^2 \quad (20)$$

$$\text{sujeito a: } LB \leq x \leq UB \quad (21)$$

onde $F^\circ(x)$ é o vetor com as componentes F_i° . LB e UB significam os limites inferiores e superiores dos parâmetros de sintonia, respectivamente. Os problemas de otimização dos pontos de Utopia (18) e (19) e o problema de otimização para a solução de compromisso (20) e (21) são resolvidos com o método de otimização por pontos interiores.

O algoritmo proposto para a sintonia de controladores preditivo por subespaços pode ser resumido como:

Algoritmo 1: Sintonia baseada em otimização multi-objetiva

- 1 Obter os dados de entrada u e saída y de um experimento em malha aberta
 - 2 Escolher os horizontes de controle N_c e de predição N_p de acordo com as recomendações da literatura
 - 3 Calcular os preditores L_w e L_u a partir da decomposição QR (7) e, a partir deles, obter os preditores diferenciais truncados \tilde{L}_{wI} e \tilde{L}_{uI}
 - 4 Escolher o conjunto de funções de transferência $G_{refN}(s)$ que gerem as trajetórias de referências que se deseja que o sistema se aproxime
 - 5 **para cada** y_i **faça**
 - 6 Definir as funções objetivo F_i a partir de (17) e então obter os pontos de Utopia a partir do problema de otimização (18) e (19)
 - // Caso com saída única
 - 7 **se** $l = 1$ **então**
 - 8 Usar diretamente as soluções de Utopia obtidas na etapa 6
 - // Caso com múltiplas saídas
 - 9 **senão**
 - 10 Usar o ponto de Utopia F° obtido nas etapas 5 e 6 para encontrar as matrizes R_k e Q_k que solucionem o problema de otimização (20) e (21)
 - 11 Obter as matrizes de ganho do controlador SPC dadas por (13) e (14)
-

O problema de otimização proposto é bastante complexo, sendo em geral não-convexo e apresentado múltiplas soluções locais. Não há garantia, portanto, de que a solução encontrada represente a solução global do problema. Contudo, as

soluções locais são suficientes para que o sistema consiga atender aos requisitos temporais desejados. Ademais, havendo multiplicidade destas soluções, é razoável estabelecer que um dos elementos das matrizes diagonais R_k ou Q_k é constante, não sendo alterado pelo processo de otimização. Deste modo, há uma diminuição da complexidade e conseqüente redução do custo computacional empregado, sem haver alguma piora considerável dos resultados obtidos.

IV. RESULTADOS

Para ilustrar o potencial do método de sintonia proposto, escolheu-se aplicá-lo a alguns modelos simulados no ambiente Simulink®, que é uma ferramenta para modelagem e simulação de sistemas dinâmicos [16]. Adicionalmente, ruídos de medição foram simulados por meio da adição de sinais do tipo ruído branco a saída de cada processo. Por fim, a metodologia foi aplicada ao controle da temperatura de uma planta multivariável termoelétrica. Em todos os casos, os sinais de entrada e saída do experimento em malha aberta e do experimento em malha fechada são expostos, bem como o erro médio quadrático (RMSE - *Root-mean-square error*) entre o o sinal de saída em malha fechada e a trajetória de referência desejada correspondente. O sinal escolhido para ser aplicado à entrada de $G_{ref_N}(s)$ foi um sinal pseudo randômico (PRBS - *Pseudorandom Binary Sequence*), pois este tipo de sinal garantirá que a trajetória de referência obtida contenha a dinâmica do processo. A função de transferência que gera as trajetórias de referência é da forma

$$G_{ref_N}(s) = \frac{1}{(\tau_{ref_1} + 1)(\tau_{ref_2} + 1)\dots(\tau_{ref_N} + 1)} e^{-\theta s} \quad (22)$$

A. Modelo de Segunda Ordem com Atraso

O modelo de segunda ordem com atraso em malha aberta que se deseja controlar é dado por:

$$G(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-\theta s} = \frac{8}{(2s + 1)(7s + 1)} e^{-2.5s}$$

Para a obtenção dos preditores, novamente foi aplicado um sinal de entrada PRBS, com a presença de ruído branco aditivo na saída. Os dados de entrada e saída podem ser visualizados na Fig. 1, com o período de amostragem sendo $T_s = 0.2s$ e a potência do ruído é 0.05.

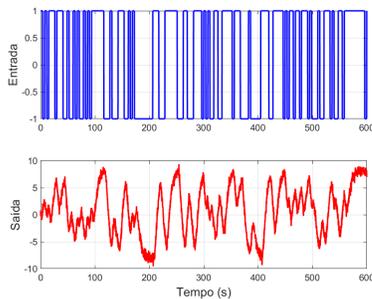


Fig. 1. Experimento em malha aberta para o modelo SOPDT.

Para o projeto do controlador, escolheu-se os horizontes $M = N_p = 80$ e $N_c = 3$. A trajetória de referência para

este caso é de segunda ordem, com as constantes de tempo $\tau_{ref_1} = 3$, $\tau_{ref_2} = 4$ e o horizonte de sintonia $t_{tun} = 700$ instantes de amostragem. Por ser um caso de entrada única e saída única, os parâmetros ótimos são obtidos diretamente do processo de otimização (18) e (19), com as variáveis de decisão $x = (q_1 \ r_1)$ de limites superior e inferior (1 10000) e (1 1 × 1000), respectivamente. O valor inicial escolhido foi $x_0 = (1 \ 5000)$, obtendo-se os parâmetros do controlador:

$$Q_k = q_1 = 1 \\ R_k = r_1 = 6766$$

Conforme mostrado na Fig. 2, os parâmetros ótimos garantem que o erro entre a saída do processo e a trajetória de referência desejada seja pequeno, atendendo aos requisitos temporais propostos. O RMSE obtido neste caso foi de 0.35.

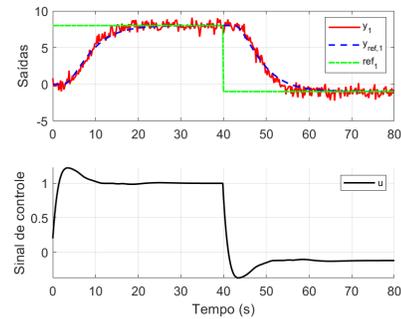


Fig. 2. Resposta em malha fechada para o modelo SOPDT.

B. Modelo Multivariável

O modelo multivariável 2×2 discretizado é dado por:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.4 & 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(k)$$

com $T_s = 0.05s$. O experimento em malha aberta consistiu em aplicar sinais PRBS na entrada do processo, obtendo-se as saídas mostradas na Fig. 3, com potência do ruído de 0.02.

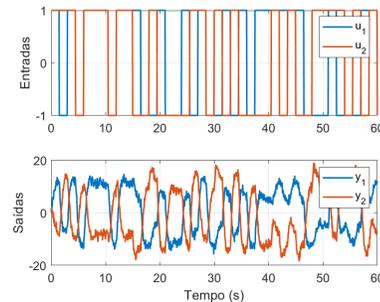


Fig. 3. Experimento em malha aberta para o modelo multivariável.

Neste caso, para o projeto do controlador, escolheu-se $M = N_p = 18$ e $N_c = 4$. Para o processo de otimização, foram usadas duas trajetórias de referência de primeira ordem, tal que $\tau_{ref} = 0.8$ para y_1 , e $\tau_{ref} = 0.5$ para y_2 . O horizonte de sintonia escolhido foi $t_{tun} = 500$ amostras. Por ser um caso

multivariável, inicialmente aplica-se o processo de otimização (18) e (19) para cada uma das entradas, obtendo-se o valor de Utopia da função objetivo F_i° para cada saída. Para o processo de otimização, as variáveis de decisão são $x = (q_1 \ q_2 \ r_1 \ r_2)$ de limites superior e inferior (10 1 8000 8000) e (1 1 3000 3000), respectivamente. O valor inicial escolhido foi $x_0 = (5 \ 1 \ 5000 \ 5000)$. A Tabela I mostra as soluções de Utopia encontradas.

TABELA I

SOLUÇÕES DE UTOPIA PARA O CASO MULTIVARIÁVEL 2×2

| Saída | q_1 | q_2 | r_1 | r_2 | F_i° |
|-------|-------|-------|-------|--------|-------------|
| y_1 | 3.38 | 1 | 3000 | 4344.6 | 0.18 |
| y_2 | 1.41 | 1 | 8000 | 8000 | 178.64 |

As componentes F_i° mostradas na Tabela I indicam que, a solução de Utopia encontrada para a segunda saída apresenta um erro bem maior quando comparada ao gerado pela solução de Utopia da primeira saída. Entretanto, conforme já mencionado, a não-convexidade do problema de otimização pode levar a soluções locais do problema. A solução de compromisso, por sua vez, é encontrada por meio da otimização (20) e (21). As matrizes de ponderação obtidas foram

$$Q_k = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.40 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_k = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5488.5 & 0 \\ 0 & 3000 \end{pmatrix}$$

É notável que a solução de compromisso busca balancear as soluções de Utopia da Tabela I. A dinâmica em malha fechada é mostrada na Fig. 4, na qual é possível observar que os parâmetros do controlador levam a resposta de cada saída a uma dinâmica próxima dos requisitos temporais propostos, expressos por meio das trajetórias de referência. O RMSE para y_1 é de 0.35 e para y_2 é de 0.31.

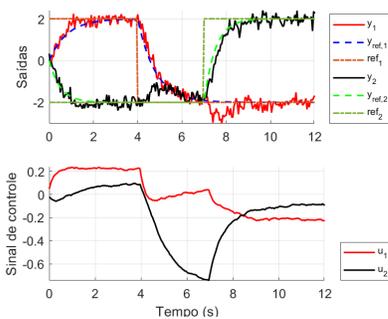


Fig. 4. Resposta em malha fechada para o modelo MIMO.

C. Estudo de Caso: Planta Termoeletrica Peltier

A planta a ser avaliada trata-se de uma planta termoeletrica didática multivariável, com duas entradas e duas saídas, consistindo em dois módulos Peltier. A uma das faces de cada um dos módulos está fixado um dissipador de calor e uma ventoinha, de modo a melhorar a troca de calor com o ambiente. A outra face, por sua vez, está acoplada a um disco de alumínio, onde são dispostos os sensores de temperatura

LM35. Por fim, para aumentar o acoplamento térmico entre os módulos, há um pequeno cilindro de alumínio que conecta os dois discos, conforme é mostrado na Fig. 5.

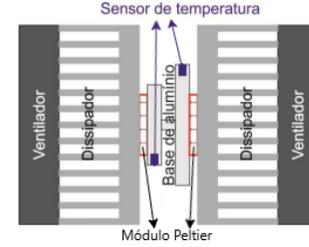


Fig. 5. Montagem dos módulos Peltier.

Além dos módulos Peltier e sensores de temperatura, a plataforma dispõe de circuitos de acionamento em ponte H, um circuito amplificador para cada um dos sensores, além de uma fonte de alimentação ATX. O algoritmo de controle será embarcado em um microcontrolador *Arduino Mega 2560 R3*. Mais detalhes sobre a plataforma são mostrados em [17].

Novamente, o experimento em malha aberta consistiu na aplicação de sinais de entrada PRBS, conforme mostrado na Fig. 6, com o período de amostragem $T_s = 1s$.

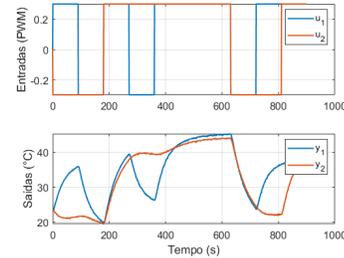


Fig. 6. Experimento em malha aberta para o planta termoeletrica.

No projeto do controlador preditivo, optou-se pelos horizontes $M = N_p = 50$, $N_c = 5$. Como parâmetros de projeto, deseja-se que ambas as malhas aproximem-se da resposta de um sistema de primeira ordem com constante de tempo $\tau_{ref} = 50$. Para o processo de otimização, o horizonte de sintonia escolhido foi $t_{tun} = 1000$. As variáveis de decisão são $x = (q_1 \ q_2 \ r_1 \ r_2)$, de limites superior e inferior (500 1 20000 20000) e (1 1 5000 5000), respectivamente. O valor inicial escolhido foi $x_0 = (100 \ 1 \ 10000 \ 10000)$. A Tabela II mostra as soluções de Utopia encontradas.

TABELA II

SOLUÇÕES DE UTOPIA PARA A PLANTA TERMOELÉTRICA

| Saída | q_1 | q_2 | r_1 | r_2 | F_i° |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| y_1 | 1 | 1 | 20000 | 20000 | 3.14 |
| y_2 | 1 | 8.18 | 5000 | 20000 | 59.70 |

Após a obtenção das componentes F_i° mostradas na Tabela II, a solução de compromisso é encontrada por meio da otimização (20) e (21). As matrizes Q_k e R_k obtidas foram

$$Q_k = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_k = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18111.62 & 0 \\ 0 & 14832.23 \end{pmatrix}$$

A solução de compromisso, como esperado, balanceia as soluções de Utopia encontradas para cada saída. Com auxílio do Simulink®, o código que implementa a lei de controle (15) e (16) é gerado automaticamente e carregado no microcontrolador. A dinâmica em malha fechada é mostrada na Fig. 7. Quando comparado aos casos anteriores, o erro entre as saídas em malha fechada e as respectivas trajetórias de referência é consideravelmente maior. Contudo, isto é esperado, pois há um elevado grau de acoplamento entre as entradas e saídas do processo, bem como há uma maior complexidade da dinâmica da planta quando comparada aos modelos de simulação avaliados anteriormente. Os valores de RMSE obtidos foram 33.11 e 29.30 para y_1 e y_2 , respectivamente.

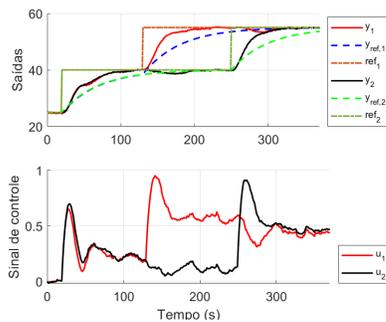


Fig. 7. Resposta em malha fechada para o planta termoeletrica.

V. CONCLUSÕES

A etapa de modelagem torna o projeto de sistemas de controle uma tarefa onerosa e demorada, sobretudo no contexto de controladores preditivos. Para tornar o projeto de controle mais ágil, estratégias de controle voltadas a dados, tais como o Controle Preditivo por Subespaços, surgem como uma alternativa que não necessita de um modelo explícito do processo para a obtenção de um lei de controle preditiva. Neste contexto, este artigo contribui propondo um método para a sintonia deste tipo de controlador. De acordo com o método apresentado, busca-se os parâmetros de sintonia ótimos como soluções de um problema de otimização multiobjetiva, que são definidos em termos de características no domínio do tempo de um conjunto de trajetórias de referência desejado.

Conforme mostrado na seção IV, é possível observar que o método de sintonia fornece resultados satisfatórios, visto que as figuras e valores de RMSE mostram que a dinâmica alcançada é próxima da dinâmica desejada, isto é, o sistema em malha fechada apresenta uma constante de tempo semelhante ao expresso pela trajetória de referência. Ademais, verifica-se que o método é bastante simples de ser implementado, cabendo ao projetista ter apenas noções aproximadas do atraso do processo e das suas constantes de tempo dominantes. Como trabalhos futuros, pretende-se estender o método de sintonia para lidar com restrições às variáveis do processo.

AGRADECIMENTOS

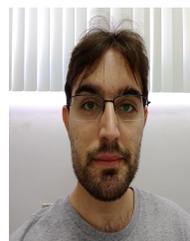
Este trabalho foi realizado com o apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil, e desenvolvido no programa PIBIC/CNPq-UFCG.

REFERÊNCIAS

- [1] E. F. Camacho and C. B. Alba, *Model predictive control*. Springer, 2013.
- [2] L. Wang, *Model predictive control system design and implementation using MATLAB®*. Springer, 2009.
- [3] J. L. Garriga and M. Soroush, “Model predictive control tuning methods: A review,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 49, no. 8, pp. 3505–3515, 2010.
- [4] M. Alhajeri and M. Soroush, “Tuning guidelines for model-predictive control,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 59, no. 10, pp. 4177–4191, 2020.
- [5] B. Huang and R. Kadali, *Dynamic modeling, predictive control and performance monitoring: a data-driven subspace approach*. Springer, 2008.
- [6] K. J. Keesman, *System identification: an introduction*. Springer, 2011.
- [7] R. Isermann and M. Münchhof, *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. Springer, 2010.
- [8] W. Favoreel, B. De Moor, and M. Gevers, “Sp: Subspace predictive control,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 32, no. 2, pp. 4004–4009, 1999.
- [9] V. Vajpayee, S. Mukhopadhyay, and A. P. Tiwari, “Data-driven subspace predictive control of a nuclear reactor,” *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 65, no. 2, pp. 666–679, 2017.
- [10] S. Sedghizadeh and S. Beheshti, “Data-driven subspace predictive control: Stability and horizon tuning,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 355, no. 15, pp. 7509–7547, 2018.
- [11] P. Van Overschee and B. De Moor, *Subspace identification for linear systems: Theory, Implementation, Applications*. Springer, 1996.
- [12] R. T. Marler and J. S. Arora, “Survey of multi-objective optimization methods for engineering,” *Structural and multidisciplinary optimization*, vol. 26, no. 6, pp. 369–395, 2004.
- [13] M. Vallerio, J. Van Impe, and F. Logist, “Tuning of nmpc controllers via multi-objective optimisation,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. 61, pp. 38–50, 2014.
- [14] R. Toro, C. Ocampo-Martínez, F. Logist, J. Van Impe, and V. Puig, “Tuning of predictive controllers for drinking water networked systems,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 14507–14512, 2011.
- [15] A. Yamashita, A. Zanin, and D. Odloak, “Tuning of model predictive control with multi-objective optimization,” *Brazilian Journal of Chemical Engineering*, vol. 33, no. 2, pp. 333–346, 2016.
- [16] The MathWorks Inc., “Simulink - simulation and model-based design.” <https://www.mathworks.com/products/simulink.html>, 2021.
- [17] R. Lima, C. C. Dias, and P. R. Barros, “Desenvolvimento de uma planta térmica multivariável baseada em módulos peltier,” in *XLII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE)*, 2014.



Victor R. B. Maciel Estudante de graduação em Engenharia Elétrica com Ênfase em controle e automação na Universidade Federal de Campina Grande. Atualmente é bolsista de iniciação científica na Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), desenvolvendo atividades nas áreas de Robótica, Controle de sistemas dinâmicos e Controle Preditivo.



Rafael B. C. Lima Formado em Engenharia Elétrica com Ênfase em controle e automação (2010), Mestrado (2012) e Doutorado (2016) pela Universidade Federal de Campina Grande. Atua desde 2017 como professor Adjunto na UFCG desenvolvendo atividades principalmente nas áreas de Sistemas embarcados, Identificação e Controle de sistemas dinâmicos.