

# Method and Algorithm to Construct a Quasi-Chaotic Sequence

V. Nosov, J. Meda-Campaña, *Member, IEEE*, and J. Gómez-Mancilla

**Abstract**—In this work, a first order nonlinear discrete-time equation is studied in order to obtain all of its exact solutions in an analytical way, including those presenting chaotic behavior. Besides, an efficient numerical algorithm for the construction of the quasi chaotic sequences, with a large number of terms, is also proposed. It is also important to mention that the constructed sequences are distributed along the interval [0,1].

**Index Terms**—Chaotic dynamics, chaotic sequence, discrete-time first order equation.

## I. INTRODUCCIÓN

EL comportamiento caótico de sistemas dinámicos es de gran interés en muchas y en muy diversas áreas de la ciencia y de la tecnología [1-4]. Por ejemplo, en las telecomunicaciones, el caos se ha empleado para codificar información electrónica privada. En la industria, se pueden emplear mecanismos caóticos para mezclar líquidos o polvos. En la medicina, el caos puede ser utilizado para estimular el cerebro y desarrollar marcapasos más eficientes, etc. [5-10].

Debido a esto, el caos ha sido estudiado por un sinnúmero de autores y ha quedado demostrado que en el dominio del tiempo discreto, el caos puede aparecer en sistemas de cualquier dimensión. Mientras que por otro lado, en el dominio del tiempo continuo, el caos puede presentarse en sistemas de dimensión igual o mayor que 3.

En la actualidad, el uso de computadoras digitales convencionales complica el trabajo con sistemas caóticos debido a la inherente ineficiencia del manejo de número irracionales. En este sentido, algunos autores han dirigido sus esfuerzos hacia la generación de secuencia que tengan las características propias de los sistemas caóticos. Por ejemplo, en [11], se presenta un método basado en mapeos 3D, para generar secuencias pseudo-aleatorias. En [12], con fines de incrementar la seguridad en sistemas criptográficos en redes 5G, se propone un método para generar números aleatorios basándose en el espectro visible de una fuente de ruido. En [13], se analizan las características caóticas de un sistema con no linealidad senoidal hiperbólica para aplicarlo en un sistema de comunicación basado en modulación caótica. En [14], se presenta un algoritmo para encriptar video utilizando las propiedades hiper-caóticas de una red neuronal celular.

Authors are with Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional, Av. IPN s/n, Colonia Lindavista, Ciudad de México, 07738, México.

V. R. Nosov (email: nosovval@hotmail.com).

J. A. Meda-Campaña (email: jmedac@ipn.mx).

J. C. Gómez-Mancilla (email: gomezancilla@gmail.com).

Por tal motivo, al ser evidente la importancia de las secuencias caóticas en problemas tecnológicos actuales, en el presente trabajo se considera un sistema dinámico de primer orden en tiempo discreto llamado función de desplazamiento decimal o “decimal shift map” [15-16], el cual permite, de manera muy sencilla demostrar, *de forma analítica*, la existencia del caos, y además puede ser empleado para generar secuencias que presentan las características propias del caos de una manera práctica. *De tal manera que la contribución más importante de este trabajo es un algoritmo generador de secuencias cuasi caóticas basado en la función de desplazamiento decimal.*

El resto de este artículo está organizado como sigue. En la sección II se presenta la ecuación escalar generadora de caos. En la sección III se analizan las propiedades más importantes de las soluciones de la ecuación analizada. En la sección IV, se propone un algoritmo que permite generar la secuencia cuasi caótica. En la sección V se considera un ejemplo sencillo para ilustrar la aplicabilidad del método. Finalmente, en la sección VI se dan algunas conclusiones.

## II. ECUACIÓN GENERADORA DE CAOS

La ecuación que se estudiará en este trabajo es la función de desplazamiento decimal, la cual es presentada en [15-16]. Este mapeo se define como sigue:

$$x_{k+1} = Fr(10x_k), \quad (1)$$

donde  $Fr(x)$  es la parte fraccionaria del número real  $x \geq 0$ , es decir,  $Fr(x) = x - [x]$ , donde  $[x]$  es la parte entera del número  $x$ . Es evidente que la solución de la ecuación (1) está completamente definida por su valor inicial  $x_0$  y será denotada por  $\{x_k(x_0), k = 0, 1, 2, \dots\}$ . Note que aunque la ecuación (1) es no lineal, sus soluciones pueden determinarse fácilmente. Si  $x_0$  es una fracción decimal entre 0 y 1,  $0 \leq x_k < 1$  de la forma

$$x_0 = 0.\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k \dots, \quad (2)$$

entonces

$$\begin{aligned} x_1(x_0) &= 0.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k \dots, \\ &\vdots \\ x_k(x_0) &= 0.\alpha_k \dots \end{aligned} \quad (3)$$

En (2) y (3), así como en el resto de las fórmulas,  $\alpha_i$  son cifras válidas dentro del sistema decimal, es decir,  $\alpha_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ . En otras palabras, cada siguiente elemento de la solución  $\{x_k(x_0), k = 0, 1, 2, \dots\}$  es el elemento precedente  $x_{k-1}(x_0)$  pero con una cifra desplazada a la

izquierda. Por ejemplo, si  $x_0 = 0.012345678901 \dots$ , entonces  $x_1(x_0) = 0.12345678901 \dots$ ,  $x_2(x_0) = 0.2345678901 \dots$ ,  $x_9(x_0) = 0.901 \dots$ , etc.

### III. PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

Las soluciones de la ecuación (1) tienen las propiedades siguientes:

#### A. Todas las Soluciones de (1) son Inestables

Sea  $x_0 = 0.\alpha_0\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k \dots$  el número inicial de la solución  $\{x_k(x_0), k = 0, 1, 2, \dots\}$ , ahora considere un valor inicial diferente  $y_0 = 0.\beta_0\beta_1\beta_2 \dots \beta_k \dots$ , tal que las  $n$  primeras cifras de  $x_0$  e  $y_0$  coincidan, es decir,  $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ , y las siguientes cifras son

$$y_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_{n+1} = 5, 6, 7, 8, 9 \\ 9 & \text{si } \alpha_{n+1} = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}, y_i = 0, i \geq n + 2. \quad (4)$$

Es claro que  $|x_0 - y_0| \leq 10^{-n}$  pero  $|x_{n+1}(x_0) - y_{n+1}(y_0)| \geq 0.5$ . Debido a que  $n$  es arbitrario, entonces cualquier solución  $\{x_k(x_0), k = 0, 1, 2, \dots\}$  es inestable.

#### B. Existencia de las soluciones con periodo predeterminado $k \geq 1$

Una fracción decimal  $a$  es una fracción periódica pura si

$$a = 0.\alpha_1 \dots \alpha_k \overline{\alpha_1 \dots \alpha_k} \dots = 0.\overline{\alpha_1 \dots \alpha_k}. \quad (5)$$

La fracción decimal  $a$  de tipo

$$a = 0.\beta_1 \dots \beta_\ell \alpha_1 \dots \alpha_k \overline{\alpha_1 \dots \alpha_k} \dots = 0.\beta_1 \dots \beta_\ell \overline{\alpha_1 \dots \alpha_k} \quad (6)$$

es una fracción periódica mixta con el anteperiodo  $\beta_1 \dots \beta_\ell$  y con el periodo  $\overline{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ .

La fracción decimal finita

$$a = 0.\alpha_1 \dots \alpha_k 00 \dots = 0.\alpha_1 \dots \alpha_k \bar{0} \quad (7)$$

es un caso especial de las fracciones periódicas mixtas con la parte periódica igual a cero.

La siguiente proposición es conocida [17]

**Proposición 1.** *Cualquier fracción periódica mixta (6) es igual a una fracción irreducible  $q/p$ ,  $0 < q < p$ , con  $q$  y  $p$  coprimos. Inversamente, cada fracción irreducible  $q/p$  es igual a una fracción decimal periódica pura o periódica mixta de tipo (5) o (6) con  $(\ell + k) \leq (p - 1)$ .*

**Teorema 1.** *La ecuación (1) tiene las soluciones periódicas de cualquier periodo  $k \geq 1$ .*

**Demostración 1.** *Para obtener la solución periódica de periodo  $k \geq 1$  se toma como el valor inicial  $x_0$  alguna fracción periódica arbitraria con periodo  $k$ , es decir,*

$$x_0 = 0.\overline{\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}}. \quad (8)$$

Al valor inicial del tipo (8) corresponde la solución periódica  $x_0, x_1(x_0), \dots, x_{k-1}(x_0), x_k(x_0), \dots$ , donde

$$\begin{aligned} x_1(x_0) &= 0.\overline{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_0}, \\ x_2(x_0) &= 0.\overline{\alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_0 \alpha_1}, \\ &\vdots \\ x_{k-1}(x_0) &= 0.\overline{\alpha_{k-1} \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-2}}, \\ x_k(x_0) &= 0.\overline{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} = x_0. \end{aligned}$$

Por un resultado de Li y Yorke [3], la existencia de las soluciones periódicas del periodo 3 asegura la existencia de las soluciones caóticas de la ecuación (1). En la sección IV se presenta un algoritmo para realizar la búsqueda de tales soluciones.

**Ejemplo.** Si  $x_0 = 1/7 = 0.\overline{142857}$ , entonces la solución correspondiente será periódica con periodo 6:

$$\begin{aligned} x_1(x_0) &= 0.\overline{428571}, \\ x_2(x_0) &= 0.\overline{285714}, \\ x_3(x_0) &= 0.\overline{857142}, \\ x_4(x_0) &= 0.\overline{571428}, \\ x_5(x_0) &= 0.\overline{714285}, \\ x_6(x_0) &= 0.\overline{142857} = 1/7 = x_0. \end{aligned}$$

Por otro lado, si para una fracción racional  $q/p$ ,  $0 < q < p$ ,  $q$  y  $p$  coprimos,  $p$  es un número primo, la fracción decimal correspondiente es periódica con periodo  $k \leq p - 1$ , pero no siempre igual a  $p - 1$ . Por ejemplo,  $1/7 = 0.\overline{142857}$ ,  $1/11 = 0.\overline{09}$ ,  $1/13 = 0.\overline{076923}$ ,  $1/37 = 0.\overline{027}$ .

En muchos casos el periodo será igual a  $(p-1)$  como en  $1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$ .

#### C. La estructura del Conjunto de los Puntos $\omega$ -límite de la Ecuación (1)

Un número  $y$  es el punto  $\omega$ -límite de la secuencia numérica  $\{x_k, k = 0, 1, \dots, k, \dots\}$  si existe una subsecuencia  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, \dots\}$  que converge a  $y$ , o bien  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n}$ .

La determinación de todos los posibles puntos  $\omega$ -límite de una solución  $x_k(x_0)$  es importante para la caracterización de dicha solución.

Denotando como  $\Omega(x_0)$  al conjunto de los puntos  $\omega$ -límite de la solución  $\{x_k(x_0), k = 0, 1, 2, \dots\}$ , se tiene:

- Si  $x_0$  es una fracción decimal finita entonces  $\Omega(x_0) = \{0\}$ , es decir,  $\Omega(x_0)$  es un solo punto  $\{0\}$ . Si  $x_0 = 0.\alpha_1 \dots \alpha_n 00 \dots$  entonces  $x_k(x_0) = 0$  para  $k \geq n + 1$  y  $\Omega(x_0) = \{0\}$ .
- Si  $x_0$  es una fracción racional  $x_0 = q/p$ , entonces  $\Omega(x_0)$  tiene un número finito  $k$  de puntos  $\omega$ -límite,  $\omega_1, \dots, \omega_k$  donde  $k \leq p + 1$ . A cada fracción racional  $x_0 = q/p$  le corresponde la fracción decimal

periódica  $x_{\ell+1}(x_0) \dots x_{\ell+k}(x_0)$  que forman el conjunto  $\Omega(x_0)$ .

- c) Existen las soluciones de la ecuación (1) tal que  $\Omega(x_0)$  es un conjunto numerable. Si

$$x_0 = 0.1010010001 \dots 1 \underbrace{00 \dots 0}_k 1 \dots, \quad (9)$$

entonces  $\Omega(x_0)$  tiene los elementos siguientes:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 0, \\ \omega_1 &= 0.1, \\ \omega_2 &= 0.01, \\ &\vdots \\ \omega_k &= 0.\underbrace{00 \dots 0}_k 1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (10)$$

Como se observa, existen otros valores iniciales irracionales  $x_0$  tales que  $\Omega(x_0)$  será un conjunto numerable.

- d) Existen soluciones de la ecuación (1) tales que  $\Omega(x_0)=[0,1]$ . Si

$$x_0 = 0.10203 \dots 09001000110012 \dots$$

entonces, para cualquier número  $a \in [0,1]$  existe una secuencia de la solución  $x_k(x_0)$  que converge a este número  $a$ . Por ejemplo, si  $a = 0.123$ , entonces la subsecuencia  $x_{\alpha(i)}$ , donde

$$\begin{aligned} x_{\alpha(1)} &= 0.12300012400 \dots, \\ x_{\alpha(2)} &= 0.123000012310 \dots, \\ x_{\alpha(3)} &= 0.12300000123100 \dots \end{aligned}$$

converge a 0.123.

*D. Criterio Suficiente de Primalidad*

**Teorema 2.** Si la solución de (1) con  $x_0 = q/p$ ,  $0 < q < p$ ,  $q$  y  $p$  coprimos, es una solución periódica de periodo  $k = p - 1$ , entonces  $p$  es un número primo.

**Demostración 2.** Suponga que  $p$  es el número compuesto  $p = p_1 p_2$ ,  $p_1 \geq 2$ ,  $p_2 \geq 2$  y denote por  $x_1(q_0/p_1) = q_1/p_1, \dots, x_{\ell+k}(q_0/p_1) = q_{\ell+k}/p_1$ , a la solución periódica pura o periódica mixta que corresponde al valor inicial  $q_0/p_1$  con el periodo  $k \leq p_1 - 1$ . Así, es claro que

$$\begin{aligned} x_0 &= q_0/p_1 = q_0 p_2 / p_1 p_2 = q_0 p_2 / p = y_0, \\ y_1(q_0 p_2 / p) &= q_1 p_2 / p = x_1(q_0 p_2 / p), \dots, \\ y_{\ell+k}(q_0 p_2 / p) &= q_{\ell+k} p_2 / p = x_{\ell+k}(q_0 p_2 / p). \end{aligned} \quad (11)$$

En otras palabras, la solución  $x_1(q_0/p_1) = q_1/p_1, \dots, x_{\ell+k}(q_0/p_1) = q_{\ell+k}/p_1$  será también solución periódica pura o periódica mixta de la ecuación (1) que corresponde al valor inicial  $y_0 = (q_0 p_2 / p)$ , tal que  $\ell + k \leq p_1 - 1 < p - 1$ . Entonces, existen otras soluciones que corresponden a los valores iniciales  $y$ , diferentes a  $y_0, \dots, y_k$ . Esto significa que existen al menos dos soluciones diferentes de (1) que

corresponden a  $y_0$  e  $y_s$ , por lo que  $p$  no puede ser un número compuesto.

Este criterio es solamente suficiente como muestra el caso de la solución periódica con periodo 2 con  $x_0 = 1/11$  y  $x_1(x_0) = 10/11$ .

Como se verá en la siguiente sección, el criterio propuesto es muy económico, lineal en  $p$ , y no requiere más de  $9(p - 1)$  comparaciones de los números naturales,  $(p - 1)$  multiplicaciones de 10 por  $q_i$  y  $(p - 1)$  sustracciones de  $10q_i - z_s$ .

IV. ALGORITMO NUMÉRICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA SECUENCIA CUASI CAÓTICA

Las soluciones caóticas de la ecuación (1) pueden aparecer sólo si el valor inicial  $x_0$  es un número irracional, el cual es una fracción decimal infinita no periódica. Cualquier valor inicial  $x_0$  representado por una fracción decimal finita periódica pura o periódica mixta conduce a una solución periódica pura o periódica mixta. Por esta razón, las soluciones caóticas no se pueden obtener numéricamente en el sentido exacto. Las soluciones caóticas son caracterizadas por una dependencia fuerte de las condiciones iniciales y por imprevisibilidad aparente de los valores de la solución. Estas propiedades son también válidas para las soluciones periódicas con periodo muy grande, las cuales son observadas durante un tiempo menor que el periodo. Pero si la solución es observada durante un tiempo mayor que el periodo de la solución, entonces la solución será cuasi previsible.

Para construir una secuencia cuasi caótica es necesario conocer la longitud  $L$  de la secuencia o el número total de los elementos de esta secuencia. Las secuencias caóticas en el sentido exacto deben tener un número infinito de elementos y no pueden ser obtenidas numéricamente.

En este sentido, se propone utilizar la parte de la solución periódica de periodo  $k$  mayor que la longitud  $L$  de la secuencia cuasi caótica. El cálculo numérico de la solución periódica de periodo alto  $k$  en la forma de fracciones decimales es muy complicado ya que involucra el cálculo de las fracciones con  $k$  decimales. Para  $k \approx 10^5 - 10^6$  este cálculo es casi imposible de realizar a través de las fracciones decimales. Por esta razón se propone trabajar con las fracciones en la forma de números racionales.

El algoritmo propuesto consiste en el cálculo de las soluciones de la ecuación (1) en la forma de fracciones racionales  $q/p$ . Si  $x_0 = q_0/p$ ,  $q_0 < p$ , con el denominador  $p$  primo, entonces  $x_1(q_0/p) = Fr(10 q_0/p)$  será también una fracción de tipo  $x_1(q_0/p) = q_1/p$  con el mismo denominador  $p$  y otro numerador  $q_1$ . Todos los otros valores  $x_i(q_0/p)$  de la solución periódica son de la misma forma  $x_i(q_0/p) = q_i/p$ ,  $q_i < p$ . Por esto, es suficiente calcular sólo los numeradores  $\{q_i, 1 \leq i \leq p\}$  de los valores  $x_i$  de la solución  $\{x_i(q_0/p), i = 1, \dots, p\}$ , lo que permite trabajar con los números naturales  $q_i < p$  y evitar los errores numéricos. Sólo durante el último paso, en la división de  $q_i$  entre  $p$  aparecen los errores numéricos, los cuales son fácilmente estimables.

El algoritmo propuesto se muestra en la Fig. 1.

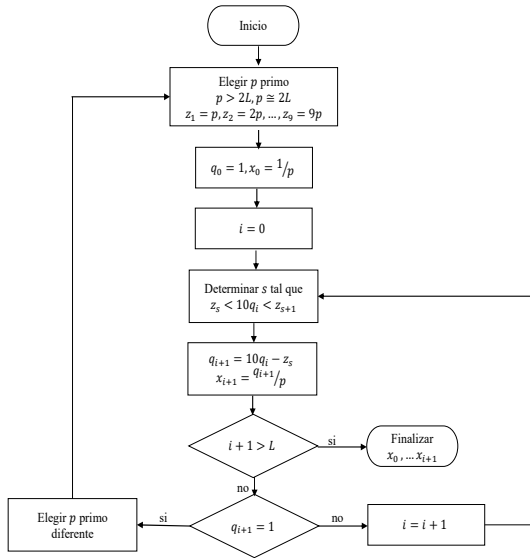


Fig. 1. Algoritmo numérico para construir una secuencia cuasi caótica.

El algoritmo propuesto consiste de los siguientes pasos:

- 1) Elegir un número primo  $p$  mayor que la longitud  $L$  de la secuencia  $x_i$  cuasi caótica requerida,  $p > L$ , por ejemplo  $p > 2L, p \cong 2L$ .
- 2) Calcular  $z_1 = p, z_2 = 2p, z_3 = 3p, \dots, z_9 = 9p$ .
- 3) Hacer  $q_0 = 1$  y calcular  $x_0 = q_0/p$ .
- 4) Hacer  $i = 0$ .
- 5) Calcular  $y_i = 10q_i$ .
- 6) Comparar  $y_i$  con  $z_s$  y determinar el único  $z_s$  tal que  $z_s < y_i < z_{s+1}$ .
- 7) Calcular  $q_{i+1} = y_i - z_s, 0 < q_{i+1} < p$ , y  $x_{i+1} = q_{i+1}/p$ .
- 8) Verificar si  $(i + 1) > L$ . Si lo es entonces terminar los cálculos e imprimir  $x_0, \dots, x_{i+1}$ . Si no ir a 9).
- 9) Verificar si  $q_{i+1} = 1$ . Si lo es entonces elegir un número primo  $p$  diferente e ir al paso 1). Si no hacer  $i = i + 1$  y volver al paso 5).

Como puede verse el algoritmo no incluye *ciclos anidados* y todas las operaciones empleadas son *simples*, con la posible excepción de la elección del número primo siguiente. Para simplificar este problema se sugiere el uso de bases de datos de número primos como por ejemplo la que se encuentra en: <https://primes.utm.edu/primes/>. De esta manera se puede verificar fácilmente que la complejidad del algoritmo es lineal, es decir del tipo  $O(n)$ .

V. EJEMPLO

A continuación se muestra la aplicación del algoritmo propuesto. Suponga que se desea obtener una secuencia cuasi caótica de longitud  $L = 25$ . Considere primero  $p = 53$ , lo que da como resultado lo siguiente:

$$\{q_i(53), i = 0, \dots, 52\} = \{1, 10, 47, 46, 36, 42, 49, 13, 24, 28, 15, 44, 16, 1, 10, \dots\} \quad (12)$$

Observe, que el elemento  $q_{13}(53) = 1$  permite concluir que se ha obtenido una serie periódica con periodo menor a  $L$  por lo que debe elegirse otro número primo  $p$ .

Ahora se considera  $p = 59$ . Los primeros 30 valores de la secuencia correspondiente a  $q_i(59)$  se presentan a continuación:

$$\{q_i(59), i = 0, \dots, 29\} = \{1, 10, 41, 56, 29, 54, 9, 31, 15, 32, 25, 14, 22, 43, 17, 52, 48, 8, 21, 33, 35, 55, 19, 13, 12, 2, 20, 23, 53, 58\}. \quad (13)$$

Con esta nueva elección del número primo  $p = 59$ , ninguno de los valores de  $q_i(59)$ , con  $0 < i < 59$ , es igual a 1, entonces la secuencia cuasi caótica  $x_i(59)$  es:  $x_0(59) = 1/59 \cong 0.016949 \dots$ ,  $x_1(59) = 10/59 \cong 0.169491 \dots$ ,  $x_2(59) = 41/59 \cong 0.694915 \dots$ ,  $\dots$ ,  $x_{25}(59) = 2/59 \cong 0.033898 \dots$ . En la Fig. 2 se presenta la secuencia cuasi caótica.

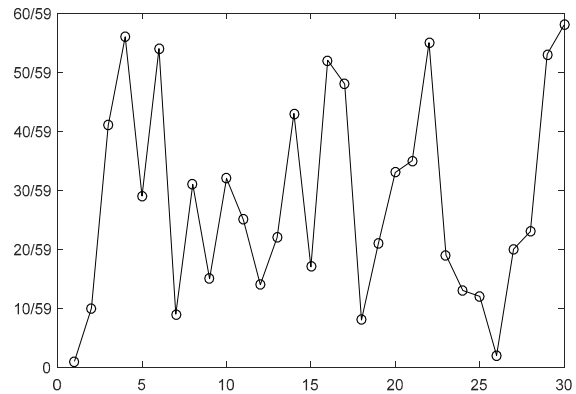


Fig. 2. Secuencia cuasi caótica  $x_i(59)$ .

Note que la Fig. 2 muestra la imprevisibilidad aparente de  $\{x_i(59), i = 0, \dots, 29\}$ . La misma secuencia  $\{x_i(59), i = 0, \dots, 29\}$  puede ser calculada utilizando fracciones decimales. Para esto, primero se calcula  $x_0(59) = 1/59$  en la forma de fracción decimal periódica de periodo  $k = 58$ :

$$x_0 = \frac{0.0169491525423728813559322033}{898305084745762711864406779661}. \quad (14)$$

Luego, para determinar  $x_1(x_0), x_2(x_0), \dots, x_{25}(x_0), \dots$  se desplaza la fracción decimal de  $x_0$  a la izquierda, 1, 2,  $\dots$ , 25 cifras, es decir:

$$x_1(x_0) = \frac{0.1694915254237288135593220338}{983050847457627118644067796610},$$

$$x_2(x_0) = \frac{0.6949152542372881355932203389}{830508474576271186440677966101},$$

$$x_{25}(x_0) = \frac{0.0338983050847457627118644067}{796610169491525423728813559322},$$

Evidentemente, el manejo de las fracciones con 58 decimales es más complicado que trabajar con números naturales menores que 59. Por esta razón se sugiere el uso del algoritmo presentado en la Fig. 1.

Ahora para mostrar la inestabilidad de las soluciones de (1), se considera que  $p = 61$  y la secuencia  $\{x_i(61), i = 0, \dots, 29\}$  se presenta en la Fig. 3.

Observe que aunque las soluciones mostradas en las Figs. 2 y 3 presentan inicios muy parecidos, los comportamientos observados en ambos casos son notablemente diferentes. Esto demuestra la inestabilidad de las soluciones de (1).

Finalmente, es importante mencionar que el término “secuencia cuasi caótica” se emplea en este trabajo para destacar el hecho de que, si no se tiene el debido cuidado, la serie generada se repetirá en algún momento. Sin embargo, mientras esto no ocurra la secuencia tendrá la aleatoriedad propia del caos.

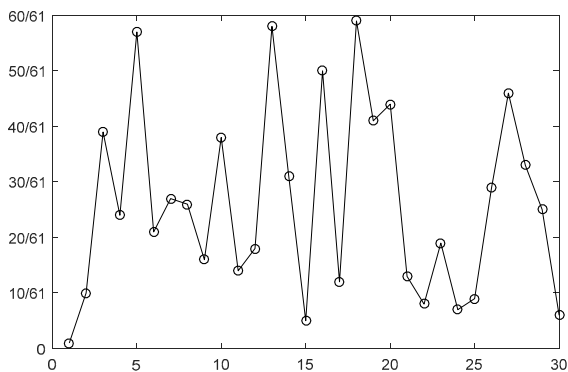


Fig. 3. Secuencia cuasi caótica  $x_i(61)$ .

Es importante destacar que existen métodos para generar secuencias cuasi caóticas, como el presentado en [18], donde también se emplea un método residual. Sin embargo, en dicho trabajo es necesario la elección de  $M$  número primos, lo cual es una desventaja al compararlo con el algoritmo propuesto en donde sólo se requiere encontrar un número primero que permita generar la cantidad deseada de términos. Aun así, es claro que la principal desventaja del método propuesto es la elección correcta del número primo  $p$ .

## VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un método simple para la generación de secuencia cuasi caótica evitando las limitaciones de los procedimientos convencionales. Se ha demostrado que el algoritmo propuesto permite generar secuencias con la “imprevisibilidad” propia de los procesos caóticos y que las soluciones de la ecuación analizada son inestables. Finalmente, se ha empleado un ejemplo para ilustrar la aplicabilidad de la metodología desarrollada en este estudio.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado parcialmente por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a través de la beca SNI (Sistema Nacional de Investigadores) y por el IPN

(Instituto Politécnico Nacional) a través de los proyectos de investigación 20180095 y 20190083; y de las becas EDI (Estímulo al Desempeño de los Investigadores), COFAA (Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas) y BEIFI (Beca de Estímulo Institucional de Formación de Investigadores).

## REFERENCIAS

- [1] L. P. Shi'lnikov, "A case of the existence of a countable number of periodic motions," *Sov. Math. Doklady*, vol. 6, pp. 163-166. 1965 (translated by S. Puckette).
- [2] L. P. Shi'lnikov, "A contribution of the problem of the structure of an extended neighborhood of rough equilibrium state of saddle-focus type," *Math. U.S.S.R.-Shornik*, vol. 10, pp. 91-102. 1970 (translated by F. A. Cezus).
- [3] T. Y. Li, and J. A. Yorke, "Period three implies chaos," *The American Mathematical Monthly*, vol. 82, pp. 985-992. 1975.
- [4] G. Chen, and T. Ueta, "Yet another chaotic attractor," *Int. J. Bifurcation and Chaos*, vol. 9, pp. 1465-1466. 1999.
- [5] V.R. Nosov, H. Dominguez, J.A. Ortega-Herrera, and J.A. Meda-Campaña, "Complex dynamics and chaos in commutable pendulum," *Revista Mexicana de Física*, vol. 58, pp. 6-12. 2012.
- [6] J.A. Meda-Campaña, B. Castillo-Toledo and G. Chen, "Synchronization of chaotic systems from a fuzzy regulation approach," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 160, pp. 2860-2875. 2009.
- [7] J. H. Perez Cruz, M. Figueroa, S. A. Rodriguez Paredes and A. Lopez Villa, "Synchronization of chaotic Akgul system by means of feedback linearization and pole placement," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, no. 2, pp. 249-256, Feb. 2017.
- [8] J. H. Perez, "Neural Control for Synchronization of a Chaotic Chua-Chen System," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 8, pp. 3560-3568, Aug. 2016.
- [9] T. Hernández Cortés, A. V. Curtidor López, J. Rodríguez Valdez, J. A. Meda Campaña, R. Tapia Herrera, and J. de J. Rubio, "Synchronization of discrete-time chaotic fuzzy systems by means of fuzzy output regulation using genetic algorithm," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, Article ID 198371, 18 pages. 2015.
- [10] J. A. Meda-Campana, "Estimation of complex systems with parametric uncertainties using a JSSF heuristically adjusted., in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 2, pp. 350-357, Feb. 2018.
- [11] B. Liu and Q. Chen, "A method of generating pseudorandom binary sequences based on 3D chaotic mapping," 2017 3rd International Conference on Information Management (ICIM), Chengdu, 2017, pp. 243-246.
- [12] K. Lee, S. Lee, C. Seo and K. Yim, "TRNG (True Random Number Generator) Method Using Visible Spectrum for Secure Communication on 5G Network," in *IEEE Access*, vol. 6, pp. 12838-12847, 2018.
- [13] J. Liu, J. Clinton Sprott, S. Wang and Y. Ma, "Simplest chaotic system with a hyperbolic sine and its applications in DCSK scheme," in *IET Communications*, vol. 12, no. 7, pp. 809-815, 2018.
- [14] Q. Huang, X. Zhao and G. Li, "Research on the Application of Video Encryption Technology Based on 7 Dimensional CNN Hyper Chaos," 2018 10th International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation (ICMTMA), Changsha, 2018, pp. 448-451.
- [15] R. C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, OUP Oxford, 2001.
- [16] G. C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, Springer, India 2015.
- [17] J. Ortega. *Introducción al análisis matemático*, Labor, Barcelona, 1993.
- [18] M. Panella and G. Martinelli, "RNS quasi-chaotic generators", in *Electronics Letters*, vol. 36, no. 15, pp. 1325-1326, 2000.



**Valeriy Nosov** Nacido en Rusia el 28 de Junio de 1939. Se graduó de la Universidad Estatal Lomonosov en Moscú Rusia. Se graduó como maestro en ciencias en la misma institución. Posteriormente obtuvo su doctorado en Ciencias Físico Matemáticas en la Universidad de la Amistad de los Pueblos, Moscú, Rusia, con la tesis: “Teorema de

Existencia de Solución para el Problema Mixto de Ecuación Hiperbólica y Algunos Tipos de Ecuaciones con Retardo”. Posteriormente obtuvo otro doctorado en Ingeniería Mecánica y Teoría de Control en el Instituto Estatal de Electrónica y Matemáticas de Moscú, Rusia, con la tesis llamada: “Estabilidad y Regímenes Periódicos de Sistemas No Lineales con Memoria”. Actualmente es profesor titular “C” de tiempo completo en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica, Instituto Politécnico Nacional, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación. Es autor de 8 libros, 6 patentes y más de 55 artículos publicados en revistas con refereo. Sus líneas de investigación son: mecánica, vibraciones y rotodinámica, ecuaciones diferenciales funcionales y teoría de control y estabilidad.



**Jesús Alberto Meda Campaña**

Actualmente es profesor- investigador de tiempo completo en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Unidad Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional. Ha sido autor/coautor de más de 40 artículos en revistas con refereo y conferencias científicas. Ha supervisado 8 tesis de doctorado y 19 de maestría. Actualmente está supervisando a 1 posdoctorante, 10 estudiantes de doctorado y a 9 de maestría. Es miembro de la IEEE desde 2000. Sus áreas de interés incluyen el control de sistemas no lineales, sistemas electromecánicos, sistemas computacionales. telecomunicaciones, análisis matemático, inteligencia artificial y sistemas caóticos.



**Julio Cesar Gómez-Mancilla** Es catedrático de Ingeniería Mecánica en la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Unidad Zacatenco del Instituto Politécnico Nacional., donde fundó el Laboratorio Vibraciones y Roto-Dinámica. Es autor/coautor de más de 20 artículos en revistas internacionales, así

como de varios trabajos en conferencias y congresos internacionales. Es miembro del Sistema Nacional de Investigaciones Nivel I, y ha supervisado 7 tesis doctorales y 23 de maestría. Entre sus áreas de interés se incluyen el diseño mecánico basado en vibraciones, análisis de estabilidad de sistemas no lineales y sistemas caóticos.