

Fault Detection and Isolation Via a Novel Convex Optimization Scheme

D. Quintana, V. Estrada-Manzo, and M. Bernal

Abstract—This work deals with the design of nonlinear observers and their application to fault diagnosis and isolation. The methodology is based on convex optimization techniques; it considers the general problem of unmeasurable premises. Algebraic rearrangements and Taylor series are employed in order to obtain an adequate error system dynamics. Thus, the error system is exactly expressed as a convex tensor-product which allows designing the observer gains by means of linear matrix inequalities. Academic examples are provided in order to illustrate the advantages of the proposal.

Index Terms—Convex Optimization, Fault Detection, Linear Matrix Inequality, Nonlinear Observer, Taylor Series.

I. INTRODUCCIÓN

EL PROBLEMA de estimación de estados es muy importante en el área de control moderno [1]; por ejemplo, para esquemas de retroalimentación de estado [2], estimación de entradas desconocidas [3], monitoreo de sistemas [4], entre otros. El diseño de estimadores, también conocidos como observadores de estado, ha sido ampliamente abordado desde su aparición para el caso de sistemas lineales [1] así como no lineales [5].

Los observadores de estado también han sido aplicados para la detección y aislamiento de fallas [6]. Una falla se define como cualquier mal funcionamiento, de una parte o totalidad de una planta física, que cambia el desempeño del sistema. Las fallas pueden ocurrir en sensores, actuadores y/o componentes del proceso. Este trabajo está enfocado a la detección y aislamiento de fallas en sensores, por medio del uso de estimadores para la generación de residuos, en particular por el esquema de observadores generalizados (GOS, por sus siglas en inglés) [7]. Los estimadores pueden ser diseñados por una variedad muy amplia de métodos [8]: por ejemplo, observadores no lineales por métodos basados en geometría diferencial [9], observadores tipo Thau [5] que requieren que las no linealidades sean Lipschitz [10], soluciones basadas en el Filtro Extendido de Kalman [11], enfoques de pasividad [12], modos deslizantes [13], observadores de alta ganancia [14], entre otras.

En el contexto de sistemas lineales de parámetros variables (LPV, por sus siglas en inglés) [15], los sistemas cuasi-LPV¹ son un buen compromiso entre simplicidad de un observador

lineal y la complejidad de los no lineales [17], [18]. En efecto, el método del sector no lineal [19] permite expresar exactamente no linealidades en forma convexa², entonces el análisis y diseño se pueden realizar por medio del método directo de Lyapunov [21]. Las condiciones de diseño, generalmente, son un conjunto finito de desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés) [22]. Las condiciones LMI son preferidas debido a que su solución es decidible y se obtiene por medio de técnicas de optimización convexa [23]. Sin embargo, la síntesis de observadores convexos no es directa cuando las variables de ponderación no están disponibles [24]. Este problema ha sido afrontado mediante técnicas basadas en condiciones Lipschitz [25], el teorema del valor medio [26], técnicas de inmersión y dinámicas auxiliares [27], entre otras.

Los enfoques LMI mencionados utilizan una metodología tradicional para el modelado convexo que no facilita el desacoplamiento de las premisas (en medibles y no medibles) [26]; más aún, las funciones de Lyapunov cuadráticas requieren una adecuada escritura del sistema del error que podría ser muy difícil de determinar [28].

Propuesta: Para el diseño de los observadores no lineales que serán utilizados para la detección y aislamiento de fallas, primero se expresa el sistema del error en forma adecuada para ser analizado por medio del método de Lyapunov; posteriormente –a diferencia de otros enfoques [25], [26], [27]– se utiliza el modelado convexo de producto tensorial [29], [30]; esta estructura permite desacoplar las variables de ponderación disponibles (señales que se conocen) de aquellas que no pueden ser medidas. Las condiciones de diseño resultantes son un conjunto finito de LMIs.

El resto del artículo tiene el siguiente contenido: la sección II presenta el problema del diseño de un observador convexo por medio de LMIs; la sección III tiene por objeto la utilización de observadores convexos para resolver el problema de detección y aislamiento de fallas en sensores; en la sección IV se ilustra, a través de ejemplos académicos, la efectividad de la metodología propuesta; las conclusiones del trabajo están en la sección V.

Notación: En este trabajo, un asterisco (*) en expresiones matriciales denota los términos transpuestos a su izquierda: $A + B + A^T + B^T + C = A + B + (*) + C$; $A > 0 (< 0)$ significa que A es definida positiva (definida negativa). Los argumentos serán omitidos cuando sea conveniente.

II. DISEÑO DE OBSERVADORES CONVEXOS

Toda vez que el esquema GOS para detección y aislamiento de fallas en sensores requiere el diseño de un banco de obser-

Daniel Quintana, Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, México, q_daniel14@hotmail.com.

Víctor Estrada Manzo, Universidad Politécnica de Pachuca, Zempoala, México, victor_estrada@upp.edu.mx.

Miguel Bernal, Instituto Tecnológico de Sonora, Cd. Obregón, México, miguel.bernal@itson.edu.mx.

¹Los sistemas LPV y cuasi-LPV son equivalentes a los modelos Takagi-Sugeno cuyo vector de variables de ponderación, también llamado vector de premisas, es dependiente de parámetros y/o de estados, respectivamente [16].

²Por su estructura, el modelo resultante es también conocido como convexo [20].

valores, primeramente se abordará el diseño de observadores convexos. Considere un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(y)u(t), \quad y(t) = C(x)x(t), \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la señal de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^o$ la salida del sistema; $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ son matrices de dimensiones apropiadas cuyas entradas se asumen acotadas en un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ incluyendo el origen, es decir, $0 \in \Omega$. Note que la matriz $B(\cdot)$ depende explícitamente de señales medibles de la salida $y(t)$.

Generalmente, los observadores de estado replican la estructura del sistema a estimar [31]. Entonces, un observador no lineal para el sistema (1) tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\hat{x}, y)\hat{x}(t) + B(y)u(t) + L(\hat{x}, y)(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C(\hat{x}, y)\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $L(\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^{n \times o}$ es la ganancia del observador. Note que, a diferencia del observador no lineal ordinario el cual depende exclusivamente de \hat{x} , el propuesto incluye la información medible del sistema original (1), esto es, $y(t)$.

Para que el observador (2) estime los estados de (1); se requiere que el error de estimación $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tienda a cero cuando el tiempo tienda a infinito. Utilizando la teoría de Lyapunov [32], la convergencia del error puede ser garantizada por medio de una función cuadrática de Lyapunov $V(e) = e^T P e$, $P > 0$ además de la dinámica del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A(x)x(t) - A(\hat{x}, y)\hat{x}(t) \\ &\quad - L(\hat{x}, y)(C(x)x(t) - C(\hat{x}, y)\hat{x}(t)). \end{aligned} \quad (3)$$

La derivada de la función de Lyapunov, $\dot{V} = 2e^T P \dot{e}$, involucra al sistema del error; sin embargo (3) no tiene la estructura adecuada para poder obtener una forma cuadrática $\dot{V} = e^T Q(x, \hat{x})e$ tal que $Q(x, \hat{x}) < 0$ garantice que $\dot{V}(e) < 0 \forall e \neq 0$, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Con el fin de poder “factorizar” $e(t)$ en el lado derecho de (3), las expresiones $A(x)x(t) - A(\hat{x}, y)\hat{x}(t)$ y $C(x)x(t) - C(\hat{x}, y)\hat{x}(t)$ deben ser manipuladas para obtener:

$$\begin{aligned} \bar{A}(x, \hat{x})e &= A(x)x - A(\hat{x}, y)\hat{x}, \\ \bar{C}(x, \hat{x})e &= C(x)x - C(\hat{x}, y)\hat{x}, \end{aligned}$$

donde las entradas de $\bar{A}(x, \hat{x})$ y $\bar{C}(x, \hat{x})$ deben estar acotadas en $x, \hat{x} \in \Omega$. En este procedimiento pueden aparecer los siguientes casos:

- 1) términos que contengan entradas de y , éstos pueden ser sustituidos fácilmente por sus equivalentes con las simplificaciones correspondientes;
- 2) polinomios de múltiples variables $p(\cdot)$ de la forma $p(x) - p(\hat{x})$, éstos pueden ser reescritos, a través de manipulaciones algebraicas, en la forma $q^T(x, \hat{x})e(t)$, donde $q(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un polinomio multivariable con entradas acotadas;
- 3) términos que contengan expresiones no polinomiales $\tilde{p}(\cdot)$ pueden ser transformados en polinomios de grado arbitrario por medio de su serie de Taylor, para posteriormente ser tratados como en los casos anteriores.

Por ejemplo, considere la expresión $p(x) - p(\hat{x})$ con $p(x) = x_1 x_2$ y $p(\hat{x}) = \hat{x}_1 \hat{x}_2$.

- 1) Si $y = x_1$ (es decir, x_1 es medible) entonces $p(x) - p(\hat{x}) = x_1(x_2 - \hat{x}_2) = x_1 e_2$.
- 2) Si x_1 y x_2 no están disponibles, puede verificarse que debido a $(x_1 + x_2)^2 - (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)^2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - \hat{x}_1^2 - 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 - \hat{x}_2^2$, tenemos

$$\begin{aligned} 2p(x) - 2p(\hat{x}) &= -x_1^2 + \hat{x}_1^2 - x_2^2 + \hat{x}_2^2 + (x_1 + x_2)^2 - (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)^2 \\ &= -(x_1 + \hat{x}_1)e_1 - (x_2 + \hat{x}_2)e_2 + ((x_1 + x_2) + (\hat{x}_1 + \hat{x}_2))(e_1 + e_2); \end{aligned}$$

$$\text{es decir, } p(x) - p(\hat{x}) = 0.5 \begin{bmatrix} x_2 + \hat{x}_2 \\ x_1 + \hat{x}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

- 3) Ahora bien, considere $\tilde{p}(x) - \tilde{p}(\hat{x})$, con $\tilde{p}(x) = \sin x_1$ y $\tilde{p}(\hat{x}) = \sin \hat{x}_1$. Utilizando la serie de Taylor para una aproximación de primer orden tenemos $\tilde{p}(x) - \tilde{p}(\hat{x}) \approx x_1 - \hat{x}_1$; si la aproximación es de tercer orden resulta

$$\tilde{p}(x) - \tilde{p}(\hat{x}) \approx x_1 - x_1^3/6 - \hat{x}_1 + \hat{x}_1^3/6,$$

que ya puede ser tratada como en los incisos anteriores.

Finalmente, siguiendo las recomendaciones anteriores, la dinámica del error (3) se puede escribir como

$$\dot{e}(t) = (\bar{A}(x, \hat{x}) - L(\hat{x}, y)\bar{C}(x, \hat{x})) e(t), \quad (4)$$

donde las entradas de $\bar{A}(x, \hat{x})$ y $\bar{C}(x, \hat{x})$ están acotadas en $x, \hat{x} \in \Omega$. El sistema del error (4) ya puede ser sustituido en $\dot{V}(e) = 2e^T P \dot{e}$ para obtener una forma cuadrática $\dot{V} = e^T Q(x, \hat{x})e$; no obstante aun hace falta reescribirlo en forma convexa con el fin de obtener un conjunto finito de LMIs para el diseño de la ganancia no lineal $L(\hat{x}, y)$.

A. Modelos Convexos de Producto Tensorial

La reescritura de (4) en forma convexa se puede hacer por medio de la metodología del sector no lineal [33]. Por ejemplo, sea una expresión acotada $z \in [z^0, z^1]$; entonces

$$z = w_0(z)z^0 + w_1(z)z^1 = \sum_{i=0}^1 w_i(z)z^i,$$

donde $w_0(z) = (z^1 - z) / (z^1 - z^0)$ y $w_1(z) = 1 - w_0(z)$ cumplen con la *propiedad de suma convexa*, es decir, $\sum_{i=0}^1 w_i = 1$ y $0 \leq w_i \leq 1$ siempre que $z \in [z^0, z^1]$ [34], [35]. Por ejemplo, considere $z = x^3$ con $x \in [-2, 3]$; entonces $z^0 = -8$, $z^1 = 27$, $w_0 = (27 - x^3)/35$ y $w_1 = 1 - w_0$, es decir que $z = x^3 = -8(27 - x^3)/35 + 27(8 + x^3)/35$. La metodología anterior puede ser aplicada para cada no linealidad de las matrices $\bar{A}(x, \hat{x})$ y $\bar{C}(x, \hat{x})$ del sistema (4).

A diferencia de otros enfoques, el presente contempla una ganancia no lineal $L(\hat{x}, y)$ que tome ventaja de todas las señales disponibles. Para tal fin, los términos no lineales en $\bar{A}(x, \hat{x})$ y $\bar{C}(x, \hat{x})$ que dependen *exclusivamente* de variables disponibles (\hat{x} y/o y) son agrupados en $z_i(\hat{x}, y) \in [z_i^0, z_i^1]$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$; el resto de términos no constantes en esas matrices serán listados como $\zeta_j(x, \hat{x}, y) \in [\zeta_j^0, \zeta_j^1]$, $j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$. Por lo tanto, esos dos conjuntos de términos

no constantes pueden ser reescritos como sumas convexas de sus cotas:

$$z_i(\hat{x}, y) = \underbrace{\frac{z_i^1 - z_i(\hat{x}, y)}{z_i^1 - z_i^0}}_{w_0^i(\hat{x}, y)} z_i^0 + \underbrace{\frac{z_i(\hat{x}, y) - z_i^0}{z_i^1 - z_i^0}}_{w_1^i(\hat{x}, y)} z_i^1,$$

$$\zeta_j(x, \hat{x}, y) = \underbrace{\frac{\zeta_j^1 - \zeta_j(x, \hat{x}, y)}{\zeta_j^1 - \zeta_j^0}}_{\omega_0^j(x, \hat{x}, y)} \zeta_j^0 + \underbrace{\frac{\zeta_j(x, \hat{x}, y) - \zeta_j^0}{\zeta_j^1 - \zeta_j^0}}_{\omega_1^j(x, \hat{x}, y)} \zeta_j^1,$$

con $w_0^i(\hat{x}, y) + w_1^i(\hat{x}, y) = 1$, $0 \leq w_0^i, w_1^i \leq 1$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, y $\omega_0^j(x, \hat{x}, y) + \omega_1^j(x, \hat{x}, y) = 1$, $0 \leq \omega_0^j, \omega_1^j \leq 1$, $j \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, es decir, cumplen la propiedad de suma convexa dentro del compacto Ω .

Gracias a su convexidad, las sumas convexas pueden ser agrupadas en el lado izquierdo de la expresión en donde se encuentran. Por ejemplo, considere dos términos acotados $z_1 \in [z_1^0, z_1^1]$ y $z_2 \in [z_2^0, z_2^1]$, reescritos como sumas convexas, $z_1 = w_0^1 z_1^0 + w_1^1 z_1^1$ y $z_2 = w_0^2 z_2^0 + w_1^2 z_2^1$. Entonces la suma de ellos se puede escribir como $z_1 + z_2 = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1 z_1^{i_1} + \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2 z_2^{i_2} = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1 \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2 (z_1^{i_1} + z_2^{i_2})$, mientras que el producto es $z_1 z_2 = \left(\sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1 z_1^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2 z_2^{i_2} \right) = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1 \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2 z_1^{i_1} z_2^{i_2}$. Estas propiedades se extienden directamente a matrices cuyos términos no constantes están reescritos en forma convexa; produciendo un politopo cuyos vértices son matrices constantes. Cuando se trata de sistemas, la suma convexa anidada resultante es conocida como un *modelo convexo de producto tensorial* [29], este modelado facilita la aplicación de relajaciones tipo Polya [30].

Así, un modelo convexo de producto tensorial de (4) es:

$$\dot{e}(t) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^\rho} \mathbf{w}_{\mathbf{i}}(\hat{x}, y) \omega_{\mathbf{j}}(x, \hat{x}, y) (\bar{A}_{\mathbf{ij}} - L(\hat{x}, y) \bar{C}_{\mathbf{ij}}) e(t), \quad (5)$$

donde $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_\rho)$, $\mathbf{w}_{\mathbf{i}}(\hat{x}, y) = w_{i_1}^1 w_{i_2}^2 \dots w_{i_p}^p$, $\omega_{\mathbf{j}}(x, \hat{x}, y) = \omega_{j_1}^1 \omega_{j_2}^2 \dots \omega_{j_\rho}^\rho$, $\bar{A}_{\mathbf{ij}} = \bar{A}(x, \hat{x})|_{\mathbf{w}_{\mathbf{i}} \omega_{\mathbf{j}}=1}$, $\bar{C}_{\mathbf{ij}} = \bar{C}(x, \hat{x})|_{\mathbf{w}_{\mathbf{i}} \omega_{\mathbf{j}}=1}$ y $L(\hat{x}, y)$ es la ganancia no lineal del observador a ser determinada por medio del análisis basado en Lyapunov. Note que la representación convexa (5) es una *reescritura algebraica* de (4), es decir, no es una aproximación.

B. Condiciones LMI para el Diseño

Con el sistema del error reescrito en forma convexa (5), la ganancia $L(\hat{x}, y)$ ya puede ser calculada a través de un número finito de LMIs:

Teorema 1. El origen $e = 0$ del sistema no lineal del error (4) con modelo de producto tensorial (5) es asintóticamente estable si existen matrices $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $N_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^{n \times o}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{B}^p$ tales que

$$P > 0, \quad \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{k}) \in \mathcal{P}(\mathbf{l}, \mathbf{m})} P \bar{A}_{\mathbf{ij}} - N_{\mathbf{k}} \bar{C}_{\mathbf{ij}} + (*) < 0 \quad (6)$$

se cumplan para toda $\mathbf{j} \in \mathbb{B}^\rho$, $\mathbf{l}, \mathbf{m} \in \mathbb{B}^p$, siendo $\mathcal{P}(\mathbf{l}, \mathbf{m})$ el conjunto de índices (\mathbf{i}, \mathbf{k}) de todos los productos $\mathbf{w}_{\mathbf{i}} \mathbf{w}_{\mathbf{k}}$ que son algebraicamente semejantes a $\mathbf{w}_{\mathbf{l}} \mathbf{w}_{\mathbf{m}}$. Entonces,

el observador no lineal está dado por (2) con $L(\hat{x}, y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\hat{x}, y) L_{\mathbf{k}}$, $L_{\mathbf{k}} = P^{-1} N_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{B}^p$. Además, cualquier trayectoria $e(t)$ que inicie en el nivel de Lyapunov más grande dentro del conjunto $\{e : V(e) \leq c\} \subset \Omega_e$, $c > 0$, $\Omega_e = \{e = x - \hat{x} : x, \hat{x} \in \Omega\}$ tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Demostración. Considere una función de Lyapunov candidata $V(e) = e^T P e$, con $P = P^T > 0$; entonces su derivada a lo largo de las trayectorias de las dinámicas del error (4) es:

$$\dot{V}(e) = e^T (P \bar{A}(x, \hat{x}) - PL(\hat{x}, y) \bar{C}(x, \hat{x}) + (*)) e; \quad (7)$$

por lo tanto $\dot{V}(e) < 0$, $\forall e \neq 0$ se garantiza si

$$P \bar{A}(x, \hat{x}) - N(\hat{x}, y) \bar{C}(x, \hat{x}) + (*) < 0, \quad (8)$$

con $N(\hat{x}, y) = PL(\hat{x}, y)$ para $x, \hat{x} \in \Omega$. Entonces, la desigualdad anterior está garantizada en una vecindad de $e = 0$ en Ω_e porque $x, \hat{x} \in \Omega$ con $x, \hat{x} = 0 \in \Omega$, es decir, $e = x - \hat{x} = 0$ está incluido. Por lo tanto, $V(e)$ es una función de Lyapunov válida; sin embargo, encontrar $P > 0$ y $N(\hat{x}, y)$ tales que (8) se satisfaga requiere verificarla para una infinidad de puntos, i.e., $\forall x, \hat{x} \in \Omega$. Con el fin de obtener un conjunto finito de desigualdades, las matrices $\bar{A}(x, \hat{x})$ y $\bar{C}(x, \hat{x})$ son reemplazadas por sus equivalentes convexas, esto es, $\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^\rho} \mathbf{w}_{\mathbf{i}}(\hat{x}, y) \omega_{\mathbf{j}}(x, \hat{x}, y) \bar{A}_{\mathbf{ij}}$ y $\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^\rho} \mathbf{w}_{\mathbf{i}}(\hat{x}, y) \omega_{\mathbf{j}}(x, \hat{x}, y) \bar{C}_{\mathbf{ij}}$, respectivamente. Si además, se define $N(\hat{x}, y) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\hat{x}, y) N_{\mathbf{k}}$, tenemos

$$P \bar{A}(x, \hat{x}) - N(\hat{x}, y) \bar{C}(x, \hat{x}) + (*) \\ = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{B}^p} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{B}^\rho} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{B}^p} \mathbf{w}_{\mathbf{i}} \omega_{\mathbf{j}} \mathbf{w}_{\mathbf{k}} (P \bar{A}_{\mathbf{ij}} - N_{\mathbf{k}} \bar{C}_{\mathbf{ij}} + (*)) < 0.$$

Finalmente, las condiciones LMI (6) implican la desigualdad anterior siempre que $\forall x, \hat{x} \in \Omega$; lo cual concluye la demostración. \square

Observación 1. Una de las ventajas del diseño por LMIs es la facilidad con la que se pueden agregar medidas de desempeño. Por ejemplo, la tasa de decaimiento α influye en la rapidez con la que la señal del error tiende a cero. Para el observador (2), una adaptación del Teorema 1 consiste en garantizar $\dot{V}(e) + 2\alpha V(e) < 0$, $\alpha > 0$, que en términos de LMIs es:

$$P > 0, \quad \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{k}) \in \mathcal{P}(\mathbf{l}, \mathbf{m})} P \bar{A}_{\mathbf{ij}} - N_{\mathbf{k}} \bar{C}_{\mathbf{ij}} + (*) + 2\alpha P < 0.$$

Observación 2. En contraste con los enfoques que utilizan modelos convexas [25], [26], [27]; en la metodología aquí propuesta, la reescritura convexa es realizada una vez que el sistema del error ha sido escrito en la forma (4).

III. DETECCIÓN Y AISLAMIENTO DE FALLAS EN SENSORES

Considere el sistema (1) bajo la presencia de fallas en los sensores:

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(y)u(t), \quad y(t) = C(x)x(t) + f(t), \quad (9)$$

donde $f(t) \in \mathbb{R}^o$ es el vector de fallas que afectan a la salida $y(t)$. Para detectar tales fallas, en [6] se presentan varios esquemas de observación, entre ellos el GOS [7], que consiste en construir o -observadores, cada uno de ellos es diseñado a

partir de todas las salidas excepto la l -ésima (ver esquema en figura 1). Entonces se construye un banco de observadores convexos (2), esto es

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\hat{x}, y^l)\hat{x}(t) + B(y^l)u(t) + L^l(\hat{x}, y^l)(y^l(t) - \hat{y}^l(t)), \\ \hat{y}^l(t) &= C^l(\hat{x}, y^l)\hat{x}(t), \end{aligned} \quad (10)$$

donde y^l es el vector de salidas excepto la l -ésima, $C^l(\hat{x}, y^l)$ es la matriz de salida sin el renglón l -ésimo. Las ganancias no lineales $L^l(\hat{x}, y^l)$ están asociadas al observador l , éstas serán calculadas por medio del Teorema 1. Los residuos asociados a cada observador son: $\|r^l(t)\| = \|y^l(t) - \hat{y}^l(t)\|$.

La *detección* de fallas sucede si el valor del residuo l es mayor que un valor prefijado J^l . Para el *aislamiento* de una falla, se analizan las señales del residuo: si el l -ésimo residuo permanece sin cambio, entonces la falla ocurre en el l -ésimo sensor (salida). Por ejemplo, en un sistema con tres sensores, tendríamos tres salidas y tres residuos, si los residuos r_1 y r_2 presentan cambios, mientras que r_3 permanece constante; entonces se concluye que la falla está en el sensor 3.

IV. EJEMPLOS

Los siguientes ejemplos académicos ilustran el desempeño del enfoque propuesto y lo comparan con otros tomados de literatura reciente.

Ejemplo 1. Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1x_2 - 3x_2 \\ -x_1 - x_2^2 + u \end{bmatrix}, \quad y = x_1; \quad (11)$$

usando un observador de la forma (2), el sistema del error es:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \begin{bmatrix} -x_1x_2 - 3x_2 + \hat{x}_1\hat{x}_2 + 3\hat{x}_2 \\ -x_1 - x_2^2 + \hat{x}_1 + \hat{x}_2^2 \end{bmatrix} + L(\hat{x}, y)(y - \hat{y}) \\ &= \begin{bmatrix} -3(x_2 - \hat{x}_2) - x_1(x_2 - \hat{x}_2) \\ -(x_2^2 - \hat{x}_2^2) \end{bmatrix} + L(\hat{x}, y)(y - \hat{y}) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -3 - x_1 \\ 0 & -x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} + L(\hat{x}, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) e. \end{aligned}$$

La última expresión se obtuvo al considerar $x_1 = \hat{x}_1$, dado que x_1 es conocido; además de la separación $x_2^2 - \hat{x}_2^2 = (x_2 + \hat{x}_2)(x_2 - \hat{x}_2) = (x_2 + \hat{x}_2)e_2$. Si consideramos $\Omega =$

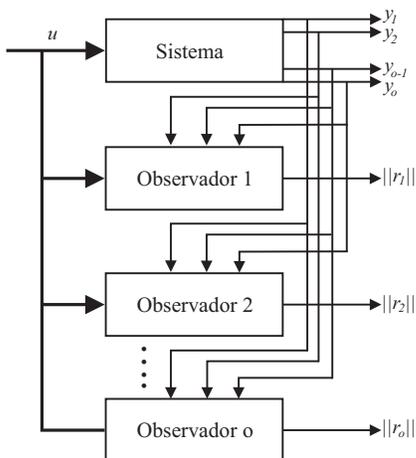


Fig. 1. Esquema del observador generalizado para detección de fallas.

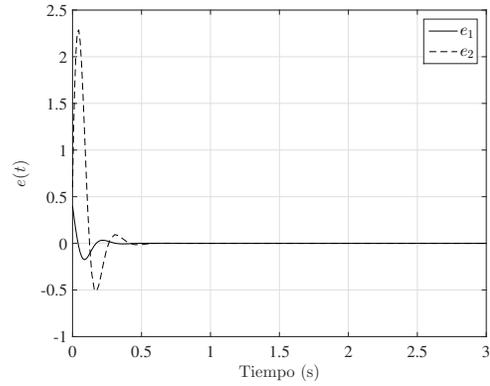


Fig. 2. Señal del error de estimación $e(t)$ en Ejemplo 1.

$\{x : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2, |\hat{x}_2| \leq 2\}$; las no linealidades conocidas son $z_1 = x_1 \in [-1, 1]$ y $z_2 = \hat{x}_2 \in [-2, 2]$, mientras que la desconocida es $\zeta_1 = x_2 \in [-2, 2]$. Entonces, se tienen las siguientes expresiones convexas: $z_1(x_1) = w_0^1(x_1)z_1^0 + w_1^1(x_1)z_1^1$, $z_2(\hat{x}_2) = w_0^2(\hat{x}_2)z_2^0 + w_1^2(\hat{x}_2)z_2^1$, $\zeta_1(x_2) = \omega_0^1(x_2)\zeta_1^0 + \omega_1^1(x_2)\zeta_1^1$, con $w_0^1(x_1) = 0.5(1 - x_1)$, $w_1^1(x_1) = 1 - w_0^1(x_1)$, $w_0^2(\hat{x}_2) = 0.25(2 - \hat{x}_2)$, $w_1^2(\hat{x}_2) = 1 - w_0^2(\hat{x}_2)$, $\omega_0^1(x_2) = 0.25(2 - x_2)$ y $\omega_1^1(x_2) = 1 - \omega_0^1(x_2)$. La ganancia no lineal a ser diseñada tiene la forma: $L(x_1, \hat{x}_2) = \sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 w_{i_1}^1(x_1)w_{i_2}^2(\hat{x}_2)L_{i_1i_2}$.

Las condiciones en el Teorema 1 arrojan resultados factibles, las ganancias calculadas son $L_{00} = [12.84 \ -287.07]^T$, $L_{01} = [15.84 \ -149.19]^T$, $L_{10} = [27.17 \ -258.35]^T$ y $L_{11} = [20.14 \ -287.07]^T$. Para ilustrar el desempeño del observador, considere $u = \sin t$, condiciones iniciales $x(0) = [0.3, 0.6]^T$ y $\hat{x}(0) = [0, 0]^T$; en la figura 2 se puede ver que las señales del error tienden a cero.

Es importante notar que a través de la metodología propuesta en [27] no es posible sintetizar un observador para el sistema (11) porque el algoritmo de inmersión no termina. Además, la complejidad computacional de las condiciones LMI se puede aproximar con $\log_{10}(N_d^3 N_l)$, donde N_d es el número de variables de decisión y N_l el número de LMIs [36]; para el enfoque presentado en [26] la complejidad es de 4.1685 mientras que el aquí propuesto de 4.0784.

Ejemplo 2. Considere el sistema no lineal

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.2x_1 \cos x_1 - 0.5x_2^3 - u \\ 5x_1 + 0.25 \sin x_2 \end{bmatrix}, \quad y = 0.5x_1^2 + x_1x_2 + 20x_2.$$

Bajo el esquema del observador (2), las dinámicas del error de estimación son

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} 0.2(x_1 \cos x_1 - \hat{x}_1 \cos \hat{x}_1) - 0.5(x_2^3 - \hat{x}_2^3) \\ 5(x_1 - \hat{x}_1) + 0.25(\sin x_2 - \sin \hat{x}_2) \end{bmatrix} - L(\hat{x})(y - \hat{y}).$$

Para poder escribir la dinámica del error como en (4), las funciones $\cos x_1$, $\cos \hat{x}_1$, $\sin x_2$ y $\sin \hat{x}_2$ son aproximadas por sus series de Taylor. Entonces, utilizando una aproximación de Taylor de orden 3, el sistema del error es:

$$\begin{aligned} \dot{e} \approx & \begin{bmatrix} 0.2(x_1 - \frac{1}{2}x_1^3 - \hat{x}_1 + \frac{1}{2}\hat{x}_1^3) - 0.5(x_2^3 - \hat{x}_2^3) \\ 5(x_1 - \hat{x}_1) + 0.25(x_2 - \frac{1}{6}x_2^3 - \hat{x}_2 + \frac{1}{6}\hat{x}_2^3) \end{bmatrix} \\ & - L(\hat{x})(0.5(x_1^2 - \hat{x}_1^2) + x_1x_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 + 20(x_2 - \hat{x}_2)). \end{aligned}$$

Al utilizar $x_i^3 - \hat{x}_i^3 = (x_i - \hat{x}_i)(x_i^2 + x_i\hat{x}_i + \hat{x}_i^2)$, con $i \in \{1, 2\}$, $x_1x_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 = 0.5(x_2 + \hat{x}_2)e_1 + 0.5(x_1 + \hat{x}_1)e_2$, y $x_1^2 - \hat{x}_1^2 = (x_1 - \hat{x}_1)(x_1 + \hat{x}_1)$, se tiene

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} 0.1(2 - x_1^2 - x_1\hat{x}_1 - \hat{x}_1^2) & -0.5(x_2^2 + x_2\hat{x}_2 + \hat{x}_2^2) \\ 5 & 0.25(1 - \frac{1}{6}(x_2^2 + x_2\hat{x}_2 + \hat{x}_2^2)) \end{pmatrix} - L(\hat{x}) \begin{bmatrix} 0.5(x_1 + \hat{x}_1 + x_2 + \hat{x}_2) & 0.5(x_1 + \hat{x}_1) + 20 \end{bmatrix} e.$$

Considere $\Omega = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 2\}$, entonces $z_1 = \hat{x}_1 \in [-1, 1]$, $z_2 = \hat{x}_2 \in [-2, 2]$ (medibles) y $\zeta_1 = x_1 \in [-1, 1]$, $\zeta_2 = x_2 \in [-2, 2]$ (no medibles), las reescrituras convexas en forma de producto tensorial de $\bar{A}(x, \hat{x})$ y $\bar{C}(x, \hat{x})$ son

$$\sum_{i \in \mathbb{B}^4} \sum_{j \in \mathbb{B}^4} \mathbf{w}_i \omega_j \begin{bmatrix} 0.1(2 - \zeta_1^{j_1} \zeta_1^{j_3}) & -0.5(\zeta_2^{j_2} \zeta_2^{j_4}) \\ -\zeta_1^{j_1} z_1^{i_1} - z_1^{i_1} z_1^{i_3} & +\zeta_2^{j_2} z_2^{i_2} + z_2^{i_2} z_2^{i_4} \\ 5 & 0.25(1 - \frac{1}{6}(\zeta_2^{j_2} \zeta_2^{j_4} + \zeta_2^{j_2} z_2^{i_2} + z_2^{i_2} z_2^{i_4})) \end{bmatrix},$$

$$\sum_{i \in \mathbb{B}^4} \sum_{j \in \mathbb{B}^4} \mathbf{w}_i \omega_j \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\zeta_1^{j_1} + z_1^{i_1} + \zeta_2^{j_2} + z_2^{i_2}) & \frac{1}{2}(\zeta_1^{j_1} + z_1^{i_1}) + 20 \end{bmatrix},$$

respectivamente; con $\mathbf{w}_i = w_{i_1}^1(\hat{x}_1)w_{i_2}^2(\hat{x}_2)w_{i_3}^1(\hat{x}_1)w_{i_4}^2(\hat{x}_2)$ y $\omega_j = \omega_{j_1}^1(x_1)\omega_{j_2}^2(x_2)\omega_{j_3}^1(x_1)\omega_{j_4}^2(x_2)$. En consecuencia, la ganancia del observador es $L(\hat{x}) = \sum_{k \in \mathbb{B}^4} \mathbf{w}_k L_k$. Las condiciones LMI del Teorema 1 con una tasa de decaimiento de $\alpha = 0.49$ (ver observación 2) son factibles, algunos de los valores encontrados son: $P = \begin{bmatrix} 0.089 & -0.21 \\ -0.21 & 0.89 \end{bmatrix}$, $L_{0000} = [7 \ 2.1]^T$, $L_{1111} = [7.4 \ 2.2]^T$. La figura 3 muestra el desempeño de los observadores diseñados con diferentes órdenes de aproximación. La simulación fue llevada a cabo con $u(t) = 0.5 \sin t - 0.5 \sin 10t - 0.5 \sin 20t$, para condiciones iniciales $x(0) = [-0.2 \ -0.2]^T$ y $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$. Debido a que la salida es no lineal, el enfoque en [27] no puede ser aplicado.

Ejemplo 3. Retome el Ejemplo 1 y asuma la siguiente salida con fallas $y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) + f_1(t) \\ x_2(t) + f_2(t) \end{bmatrix}$. Para detectar y aislar las fallas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ por medio del esquema GOS, es necesario construir un banco de observadores. El observador 1 se calcula para la salida $y^1 = x_2$, mientras que el observador 2 utiliza la salida $y^2 = x_1$, note que este último observador no puede ser construido por medio de la metodología propuesta en [27].

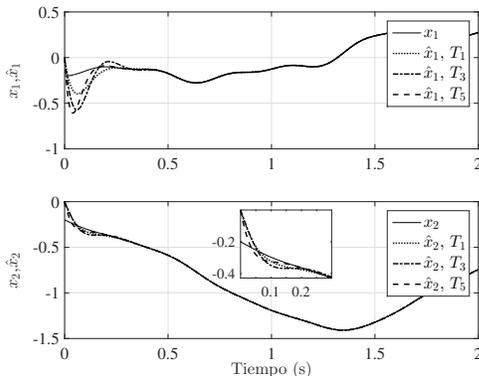


Fig. 3. Evolución en el tiempo de x y sus estimaciones \hat{x} en el Ejemplo 2.

Ejemplo 4. Sea el siguiente sistema con fallas en los sensores:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - 2x_1 - x_3 \\ x_2x_3 - x_1x_3 - 5x_2 + 2x_3 + u \\ x_2x_3 - 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + u \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 + f_1(t) \\ x_3 + f_2(t) \end{bmatrix},$$

donde las fallas están definidas como sigue (ver figura 4):

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.02t, & 10 \leq t \leq 20 \\ 0, & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0.3 \sin(7t), & 25 \leq t \leq 35 \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases}$$

La detección de posibles fallas en los sensores, se lleva a cabo por medio de dos observadores de estado de la forma (2), el compacto en donde se modelaran las no linealidades es $\Omega = \{x : |x_i| \leq 1, i = 1, 2, 3\}$. Para el observador 1, la salida $y^1 = x_3$ (sin fallas), el siguiente sistema del error tiene que ser estabilizado en el origen:

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} 0.5(x_2 + \hat{x}_2) - 2 & 0.5(x_1 + \hat{x}_1) & 0 \\ -x_3 & x_3 - 5 & 0 \\ -2 & x_3 - 3 & 0 \end{pmatrix} - L^1(\hat{x}, y^1)(x_3 - \hat{x}_3) e.$$

Entonces se escogen las siguientes no linealidades disponibles son $z_1 = x_3$, $z_2 = \hat{x}_1$ y $z_3 = \hat{x}_2$; las no medibles son $\zeta_1 = x_1$ y $\zeta_2 = x_2$. Las condiciones LMI del Teorema 1 son factibles. Ahora bien, para el segundo observador tenemos $y^2 = x_1$; la dinámica del error asociada es:

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & -1 \\ 0 & 0.5(x_3 + \hat{x}_3) - 5 & 2 - x_1 + 0.5(x_2 + \hat{x}_2) \\ 0 & 0.5(x_3 + \hat{x}_3) - 3 & 0.5(x_2 + \hat{x}_2) - 4 \end{pmatrix} - L^2(\hat{x}, y^2) e,$$

cuya forma convexa se obtiene al seleccionar $z_1 = x_1$, $z_2 = \hat{x}_2$, $z_3 = \hat{x}_3$, $\zeta_1 = x_2$ y $\zeta_2 = x_3$. Algunas de las ganancias obtenidas son: $L_{000}^2 = [1.43 \ -13.01 \ -14.47]^T$, $L_{101}^2 = [1.28 \ 6.55 \ -12.35]^T$, $L_{111}^2 = [1.23 \ 6.60 \ -11.71]^T$. La detección de fallas ocurre al comparar los residuos con un valor prefijado de $J^1 = J^2 = 0.1$ (ver figura 5).

V. CONCLUSIONES

Se ha presentado la detección y aislamiento de fallas por medio de observadores diseñados con técnicas de optimización

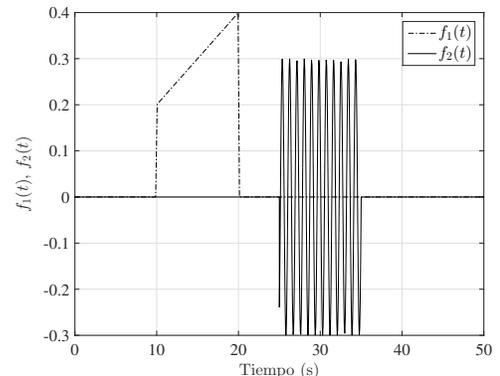


Fig. 4. Fallas en sensores.

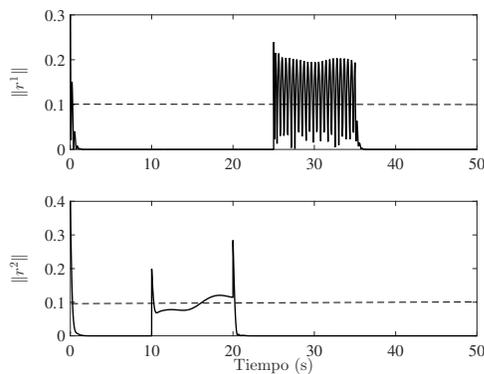


Fig. 5. Residuos para detección de fallas bajo el esquema GOS.

convexa. Para tal efecto, modelos convexos de producto tensorial han sido utilizados, incluso si éstos dependen de variables de ponderación no medibles. Las condiciones de diseño son desigualdades matriciales lineales. La efectividad del enfoque propuesto ha sido ilustrada por medio de ejemplos académicos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por medio de la beca 491553, al Instituto Tecnológico de Sonora a través de los proyectos ITSON-PROFAPI CA-18 2018-0023/2019-0002 y PFCE 2018.

REFERENCIAS

- [1] D. Luenberger, "Observing the state of a linear system," *IEEE Transactions on Military Electronics*, vol. 8, no. 2, pp. 74–80, 1964.
- [2] K. Ogata, *Modern Control Engineering*. USA: Prentice Hall PTR, 2001.
- [3] M. Corless and J. Tu, "State and input estimation for a class of uncertain systems," *Automatica*, vol. 34, no. 6, pp. 757–764, 1998.
- [4] E. Aguayo, D. Gomez, A. Ramirez, J. Ruiz, and A. Cervantes, "Sensor placement and observer design for free choice continuous timed Petri Nets," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 13, no. 10, pp. 3253–3261, 2015.
- [5] F. Thau, "Observing the state of non-linear dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 17, no. 3, pp. 471–479, 1973.
- [6] P. M. Frank, "Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy: a survey and some new results," *Automatica*, vol. 26, no. 3, pp. 459–474, 1990.
- [7] —, "Fault diagnosis in dynamic systems via state estimation— a survey," in *Tzafestas S., Singh M., Schmidt G. (eds); System Fault Diagnostics, Reliability and Related Knowledge-Based Approaches*. Springer, 1987, pp. 35–98.
- [8] B. Walcott, M. Corless, and S. Žak, "Comparative study of non-linear state-observation techniques," *International Journal of Control*, vol. 45, no. 6, pp. 2109–2132, 1987.
- [9] W. Baumann and W. Rugh, "Feedback control of nonlinear systems by extended linearization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, no. 1, pp. 40–46, 1986.
- [10] S. R. Kou, D. L. Elliott, and T. J. Tarn, "Exponential observers for nonlinear dynamic systems," *Information and control*, vol. 29, no. 3, pp. 204–216, 1975.
- [11] Y. Song and J. W. Grizzle, "The Extended Kalman Filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems," in *American Control Conference (ACC)*, 1992, pp. 3365–3369.
- [12] H. Shim, J. H. Seo, and A. R. Teel, "Nonlinear observer design via passivation of error dynamics," *Automatica*, vol. 39, no. 5, pp. 885–892, 2003.
- [13] Y. Xiong and M. Saif, "Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 12, pp. 2012–2017, 2001.
- [14] A. Tornambè, "High-gain observers for non-linear systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 23, no. 9, pp. 1475–1489, 1992.
- [15] J. Shamma, "An overview of LPV systems," in *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer, 2012, pp. 3–26.
- [16] M. Bernal, V. Estrada-Manzo, and R. Marquez, *Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales (in Spanish)*. México: Person, 2018.
- [17] Z. Lendek, T. M. Guerra, R. Babuška, and B. De-Schutter, *Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models*. Netherlands: Springer-Verlag, 2010.
- [18] F. R. López-Estrada, C. Astorga, G. Valencia, C. Rios, C. Galicia, and E. Escobar, "Observer-based LPV stabilization system for a riderless bicycle," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 4, pp. 1076–1083, 2018.
- [19] H. Ohtake, K. Tanaka, and H. O. Wang, "Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept," *Integrated Computer-Aided Engineering*, vol. 10, no. 4, pp. 333–341, 2003.
- [20] B. Aguiar, R. Márquez, and M. Bernal, "An LMI-based global non-quadratic observer design via Takagi-Sugeno models and Levant's robust differentiators," in *2016 American Control Conference*, 2016, pp. 119–124.
- [21] K. Tanaka and H. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A linear matrix inequality approach*. NY: John Wiley & Sons, 2001.
- [22] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, USA: SIAM: Studies In Applied Mathematics, 1994, vol. 15.
- [23] C. Scherer, *Linear Matrix Inequalities in Control Theory*. Delf, The Netherlands: Delf University, 2004.
- [24] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. Wang, "Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 250–264, 1998.
- [25] P. Bergsten and D. Driankov, "Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Trans. on Systems, Man and Cyb., Part B*, vol. 32(1), pp. 114–121, 2002.
- [26] T. M. Guerra, R. Márquez, A. Kruszewski, and M. Bernal, " H_∞ LMI-based observer design for nonlinear systems via Takagi-Sugeno models with unmeasured premise variables," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 3, pp. 1498–1509, 2018.
- [27] D. Ichalal, B. Marx, S. Mammar, D. Maquin, and J. Ragot, "How to cope with unmeasurable premise variables in Takagi-Sugeno observer design: Dynamic extension approach," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 67, pp. 430–435, 2018.
- [28] D. Quintana, V. Estrada-Manzo, and M. Bernal, "A methodology for real-time implementation of nonlinear observers via convex optimization," in *2018 15th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*. Mexico City, Mexico: IEEE, 2018, pp. 1–6.
- [29] C. Ariño and A. Sala, "Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 20, no. 8, pp. 1036–1046, 2007.
- [30] A. Sala and C. Ariño, "Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polyá's theorem," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 158, no. 24, pp. 2671–2686, 2007.
- [31] D. Luenberger, "Observers for multivariable systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 11 (2), pp. 190–197, 1966.
- [32] H. Khalil, *Nonlinear Control*. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2014.
- [33] T. Taniguchi, K. Tanaka, and H. Wang, "Model construction, rule reduction and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 9, no. 2, pp. 525–537, 2001.
- [34] D. Bertsekas, A. Nedi, and A. Ozdaglar, *Convex analysis and optimization*. Athena Scientific, 2003.
- [35] A. Tapia, M. Bernal, and L. Fridman, "Nonlinear sliding mode control design: An LMI approach," *Systems & Control Letters*, vol. 104, pp. 38–44, 2017.
- [36] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*. Natick, USA: Math Works, 1995.