

# Trajectory Tracking Flight Control of a Tethered Kite using a Passive Sliding Mode Approach

M. A. Zempoalteca-Jimenez, R. Castro-Linares, J. Alvarez-Gallegos

**Abstract**—Airborne Wind Energy (AWE) systems take advantage of high altitude wind in order to generate electrical energy. One of the challenges when harvesting energy with an AWE system is to deal with strong disturbances such as changes in the wind velocity. This paper proposes a robust trajectory tracking controller for an AWE system, namely a tethered kite, when it operates in the energy generation phase. The controller design is based on an approximate model of the kite and makes use of feedback passivation together with sliding mode techniques. The trajectory tracking error of the closed loop system in the presence of parameter variations and external disturbances is formally studied using Lyapunov stability theory. The performance of the controller is verified through numerical simulations using a complete model of the kite.

**Index Terms**—Wind energy, tethered kite, robust control, power generation

## I. INTRODUCCIÓN

Un estudio reciente presentado en [1] hace una comparación de un aerogenerador comercial y un sistema AWE equivalente, el resultado indica que el sistema AWE puede alcanzar hasta cuatro veces la potencia nominal del aerogenerador. Éste resultado motiva la presente investigación. Para ahondar más en el tema se sugiere consultar [2], [3], [4].

La aportación principal de este trabajo es un modelo aproximado de la dinámica de un sistema AWE controlado desde tierra que usa un planeador ligero flexible para captar energía del viento. Ofrece una forma más simple en comparación con los modelos publicados más detallados [5], [6], [7], lo que facilita la tarea del diseño de controladores. Otra característica, es la incorporación explícita de la dinámica interna del sistema lo cual presenta una ventaja sobre los modelos más simplificados [8], [9], [10]. Lo novedoso de este trabajo se encuentra en el diseño del controlador, ya que emplea una combinación de ideas de pasividad y modos deslizantes para desarrollar una ley de control robusta aplicada al seguimiento de trayectoria de la salida de un sistema AWE, ésto empleando el modelo aproximado aquí propuesto.

Varios trabajos encontrados en la literatura que presentan resultados en la fase de generación de potencia con estos sistemas, aplican correcciones proporcionales-integrales-derivativas (PID) [8], [11], [12], para resolver el problema de seguimiento. Otros trabajos, han diseñado controladores más robustos [13], [14], con la desventaja de usar los modelos más

simplificados para su diseño. Algunos controladores más sofisticados se encontraron en [15], [16]. Debido a las perturbaciones en la velocidad y dirección del viento y las incertidumbres paramétricas presentes en el proceso de generación de potencia con sistemas AWE, es preferible usar controladores robustos que puedan compensar dichas variaciones y mantengan bajo control el sistema. Adicional a lo ya mencionado, los trabajos más recientemente publicados, con respecto de este tema, se enfocan en encontrar las trayectorias óptimas tomando en cuenta las características del sistema y las condiciones climatológicas [11], [15], [17]. Un controlador robusto, como el que se propone es este trabajo, será adecuado para seguir dichas trayectorias en presencias de incertidumbres.

En el presente trabajo se uso un modelo aproximado basado en una modificación de la llamada *Ley de Razón de Giro* (en inglés, *Turn Rate Law*), se reporta también la dinámica interna del sistema; este enfoque constituye una contribución importante ya que, por lo que los autores saben, no existe ningún trabajo que considere y analice esta dinámica. En el diseño del controlador se utilizó este modelo aproximado, empleando conceptos de equivalencia a sistemas pasivos, junto con la técnica de modos deslizantes, para resolver el problema de seguimiento de trayectoria en la fase de generación de potencia. Este procedimiento de diseño permite asegurar la robustez del sistema ante variaciones paramétricas en el modelo y a perturbaciones externas. Para completar el diseño se hizo un estudio formal del error de seguimiento de trayectoria utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Este artículo se organiza como sigue. En la sección II se presenta el modelo completo del papalote junto con un modelo aproximado del mismo. En la sección III se presenta el diseño de un controlador robusto para resolver el problema de seguimiento de trayectoria. La sección IV presenta algunas simulaciones numéricas para verificar el comportamiento del sistema con el controlador propuesto. Finalmente, en la sección V se incluye las conclusiones y el posible trabajo futuro.

## II. MODELO DEL PAPALOTE

### A. Modelo Completo

Para representar el sistema se usa el modelo presentado en [5]. La posición del papalote esta referida a un marco inercial en coordenadas esféricas, como se muestra en la Fig. 1(a), dónde se tiene un marco inercial  $G = [X, Y, Z]$  centrado en la estación terrena y un marco no inercial  $L = [L_N, L_E, L_D]$  centrado en la posición del papalote (ver también [8]).  $\theta$ ,  $\phi$  y  $r$  son el ángulo polar, el ángulo de azimut y la distancia radial o longitud de la cuerda, respectivamente. Se considera,

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Sección Mecatrónica, CINVESTAV-IPN, CDMX, México, miguel.zempoalteca@cinvestav.mx  
IEEE Senior Member, rcastro@cinvestav.mx  
jalvarez@cinvestav.mx

además, que la dirección del viento es en el sentido de  $X$  y que la variable de control (entrada del sistema) es la diferencia de longitudes en las cuerdas de dirección,  $\Delta l$  (véase la Fig. 1(b)). Se hace también la asignación de variables de estado  $x = (\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi})$  junto con  $u = \Delta l$ . Basándose en el sistema descrito en [18] y considerando una longitud de la cuerda,  $r$ , constante, como en [8], la ecuación de estado del sistema es

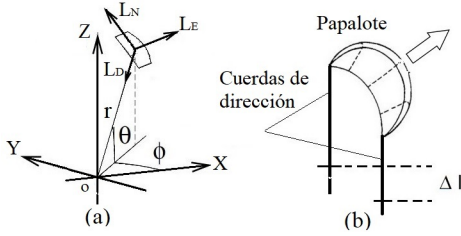


Fig. 1. (a) Posición del papalote en coordenadas esféricas. (b) Variable control (entrada del sistema) del papalote.

$$\dot{x} = f(x, u) = [x_2, F_2(x, u), x_4, F_4(x, u)]^T, \quad (1)$$

dónde  $F_2(x, u)$  y  $F_4(x, u)$  resultan de las fuerzas gravitacional, aparente y aerodinámica, y están dadas por

$$F_2(x, u) = \beta(x) [\cos \xi(x) \cos \psi(x, u) \cos \eta(x) \sin \Delta\alpha(x) - \sin \xi(x) (\cos \psi(x, u) \sin \eta(x) \sin \Delta\alpha(x) + \sin \psi(x, u) \cos \Delta\alpha(x))] - \frac{\beta(x)}{E} [\cos \xi(x) \cos \Delta\alpha(x)] - \frac{g \cos x_1}{r} - \sin x_1 \cos x_1 x_4^2, \quad (2)$$

$$F_4(x, u) = \beta(x) [\sin \xi(x) \cos \psi(x, u) \cos \eta(x) \sin \Delta\alpha(x) + \cos \xi(x) (\cos \psi(x, u) \sin \eta(x) \sin \Delta\alpha(x) + \sin \psi(x, u) \cos \Delta\alpha(x))] - \frac{\beta(x)}{E \cos(x_1)} [\sin \xi(x) \cos \Delta\alpha(x)] + 2x_2 x_4 \tan(x_1),$$

en dónde  $\xi(x)$ ,  $\psi(x, u)$  son los ángulos de guiñada y de alabeo respectivamente (véase la Fig. 2(b) y (c)). La variación del ángulo de ataque o ángulo de cabeceo se representa por  $\Delta\alpha(x)$ , donde el ángulo de ataque se define como la suma de un ángulo base  $\alpha_0$  y  $\Delta\alpha(x)$  (véase la Fig. 2(a)). Estos ángulos, junto a las funciones  $\beta(x)$  y  $\eta(x)$  se expresan como

$$\xi(x) = \arctan(W_a^E(x)W_a^N(x)^{-1}), \quad (4)$$

$$\Delta\alpha(x) = \arcsen(-W_a^D(x)\|W_a(x)\|^{-1}), \quad (5)$$

$$\psi(x, u) = \arcsen(u/d - \cos x_1 \sin x_3), \quad (6)$$

$$\beta(x) = \rho AC_L \|W_a(x)\|^2 (2rm)^{-1}, \quad (7)$$

$$\eta(x) = \arcsen(\tan(\Delta\alpha(x)) \tan(\psi(x, u))), \quad (8)$$

dónde  $E$  es el coeficiente aerodinámico (el cual esta relacionado con los coeficientes de sustentación  $C_L$  y resistencia  $C_D$  como  $E = C_L/C_D$ ),  $m$  es la masa del sistema, la cual incluye al papalote y las cuerdas,  $d$  es la envergadura del papalote,  $A$  es el área proyectada del papalote,  $\rho$  es la densidad del aire,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\|\cdot\|$  denota la norma-2 de un vector real. Precisamente,  $W_a^N(x)$ ,  $W_a^E(x)$  y  $W_a^D(x)$  son las componentes del vector de velocidad aparente del papalote  $W_a(x)$ , la cual representa la diferencia entre las velocidades del papalote y del viento [2], [9], [18] y está dada por

$$W_a(x) = \begin{pmatrix} W_a^N \\ W_a^E \\ W_a^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_w \cos x_3 \sin x_1 - rx_2 \\ -V_w \sin x_3 - rx_4 \cos x_1 \\ -V_w \cos x_3 \cos x_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

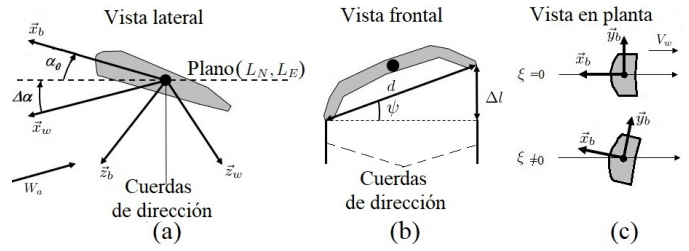


Fig. 2. (a) Ángulo de ataque ( $\alpha_0 + \Delta\alpha(x)$ ), (b) ángulo de alabeo  $\psi(x, u)$ , (c) ángulo de guiñada  $\xi(x)$ . ( $\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b$ ) son ejes cuerpo y ( $\bar{x}_w, \bar{y}_w, \bar{z}_w$ ) son ejes viento. En (a), se tiene un sistema de mano derecha por lo tanto  $\bar{y}_w$  es perpendicular a  $\bar{x}_w$  y a  $\bar{z}_w$ .

donde  $V_w$  es la velocidad del viento. Como en [18], en este trabajo se usa un modelo logarítmico para calcular la velocidad del viento a una cierta altura  $Z$ , más precisamente

$$V_w(Z) = V_{ref} (\text{Ln}(ZZ_r^{-1})) (\text{Ln}(Z_{ref}Z_r^{-1}))^{-1}, \quad (10)$$

dónde  $V_{ref}$  es la velocidad de referencia del viento medida a cierta altura de referencia  $Z_{ref}$  y  $Z_r$  es un coeficiente que caracteriza la rugosidad del suelo en el sitio de prueba.

El modelo (1) sólo describe el movimiento del papalote, pero no da información de la tensión en la cuerda del mismo. Basándose en [18] la tensión  $F_D$  en la cuerda del papalote está en la dirección de  $L_D$  (véase la Fig. 1) y está dada por

$$F_D(x) = -\beta(x)r[\cos \psi(x, u) \cos \eta(x) \cos \Delta\alpha(x) + E^{-1} \sin \Delta\alpha(x)] + g \sin x_1 - rx_2^2 + rx_4^2 \cos^2 x_1. \quad (11)$$

(3) Por otro lado, la salida del sistema (papalote) se debe escoger de tal forma que se pueda maniobrar la posición del mismo en el espacio. Una opción posible es escoger la orientación del papalote que está dada por el ángulo de guiñada  $\xi(x)$ , como se hace en [12]. Otra posibilidad es escoger el llamado *ángulo de la velocidad del papalote* como se hace en [8]. Al hacer esto último, se necesita la velocidad del papalote  $v$  la cual, asumiendo longitud constante en la cuerda, se expresa como  $v(x) = [rx_2, rx_4 \cos x_1, 0]^T$  en el marco  $L$ . De esta manera, el ángulo de la velocidad del papalote,  $h(x)$ , se define como

$$h(x) = \arctan(x_2^{-1} x_4 \cos x_1). \quad (12)$$

De acuerdo con [8], la orientación del papalote, dada por el ángulo  $\xi(x)$ , y el ángulo de su velocidad,  $h(x)$ , son aproximadamente iguales en condiciones de viento cruzado [11]. En el presente trabajo se escogió esta última posibilidad ya que la expresión para el ángulo  $h(x)$  es más simple y fácil de manejar que la expresión para el ángulo  $\xi(x)$ . Entonces la salida del sistema (1), es  $y = h(x)$ .

Como se muestra en [2], [8] y [12], la salida  $y$  permite generar potencia mecánica cuando el papalote vuela en condiciones de viento cruzado. La potencia producida obedece a la siguiente expresión:

$$P_m = F_D(x)\dot{r}, \quad (13)$$

dónde  $\dot{r}$  es la velocidad de la cuerda. Ya que el modelo (1) considera que la longitud de la cuerda es constante, la variación en su longitud (que ocasiona una velocidad en la cuerda,  $\dot{r}$ , diferente de cero), se introduce en el modelo como

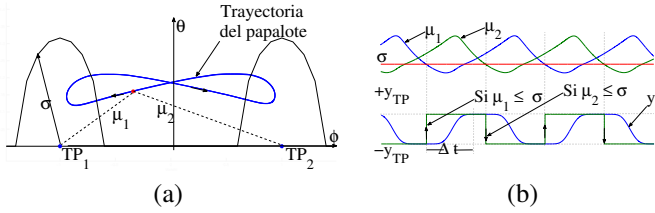


Fig. 3. (a)  $\sigma$  es el radio del círculo de referencia con centro en el punto objetivo  $TP_i$  con  $i = 1, 2$ . (b)  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son la distancia angular entre el papalote y el correspondiente punto objetivo  $TP_i$ .  $y_{TP}$  es el ángulo deseado de la velocidad para alcanzar el punto objetivo  $TP_i$  desde la posición del papalote,  $\Delta t$  es el tiempo de respuesta de  $\pm y_{TP}$  a  $\mp y_{TP}$  y  $y^*$  es la trayectoria deseada.

una incertidumbre paramétrica (sección III). La trayectoria específica que debe seguir la salida (12) para generar potencia mecánica se describe entonces a continuación.

A partir de la posición del papalote en el plano  $(\phi, \theta)$  (véase la Fig. 3(a)) se genera una referencia  $y_{TP}$  para alcanzar alguno de los puntos objetivo  $TP_i$  (con  $i = 1, 2$ ). Cuando la distancia  $\mu_i$  entre el  $TP_i$  actual es menor que el radio  $\sigma$ , el  $TP_i$  actual se cambia por el siguiente  $TP_i$ . Este ciclo se repite varias veces en la fase de generación de potencia. Debido al cambio entre  $TP_1$  y  $TP_2$  la referencia  $y_{TP}$  tiene cambios súbitos. Por esto, la trayectoria se suaviza usando polinomios de Bezier; esta última trayectoria es la trayectoria deseada  $y^*$  (véase la Fig. 3(b)). Se hace la siguiente suposición sobre la trayectoria deseada  $y^*$  y su derivada con respecto al tiempo  $\dot{y}^*$ .

**Suposición 1.** La trayectoria de referencia,  $y^*$ , y su derivada con respecto al tiempo,  $\dot{y}^*$ , están acotadas, es decir que satisfacen  $|y^*| \leq k_1$  y  $|\dot{y}^*| \leq k_2$  con  $k_1$  y  $k_2$  constantes reales positivas diferentes de cero.

### B. Modelo Aproximado; Algunas Características Estructurales

El modelo aproximado está basado en los resultados reportados en [8] y [18]. Las principales suposiciones para obtener este modelo se enuncian a continuación: (a) En condiciones de viento cruzado la fuerza de sustentación es suficientemente grande para mover el papalote y las cuerdas [18]; (b) La diferencia entre el ángulo  $y$  y el ángulo  $\xi$  es despreciable y todas las fuerzas en la dirección del vector de velocidad  $v$  son despreciables comparadas con las fuerzas de sustentación y resistencia [8]; (c) el ángulo  $\psi$  es suficientemente pequeño lo que permite obtener aproximaciones lineales de las funciones trigonométricas en las cuales aparece como argumento [8]; (d) La variación de  $\Delta\alpha$  es pequeña para coeficientes aerodinámicos  $E$  entre 4 y 6 [8], [18].

Tomando en cuenta estas suposiciones se puede decir que  $\eta(x) \approx 0$ . Por otro lado, la configuración de la unidad terrena considerada en este trabajo, es similar a la presentada en [8] por lo que  $\psi(x, u) \approx u/d - \cos(x_1) \sin(x_3)$ . Entonces es posible obtener un modelo aproximado en la forma afín  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , es decir

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ f_2(x) \\ x_4 \\ f_4(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(x) \\ 0 \\ g_4(x) \end{pmatrix} u, \quad y = h(x), \quad (14)$$

dónde  $y$  es la salida del modelo, siendo  $h(x)$  el ángulo de velocidad del papalote dado por (12) y

$$f_2(x) = \beta(x) \cos \xi(x) \left( \Delta\alpha(x) - \frac{1}{E} \right) - \frac{g}{r} \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_1 x_4^2 - g_2(x) d \sin x_3 \cos x_1, \quad (15)$$

$$f_4(x) = \frac{\beta(x)}{\cos x_1} \sin \xi(x) \left( \Delta\alpha(x) - \frac{1}{E} \right) + 2x_2 x_4 \tan x_1 - g_4(x) d \sin x_3 \cos x_1, \quad (16)$$

$$g_2(x) = -\frac{\beta(x)}{d} (\Delta\alpha(x)^2 + 1) \sin \xi(x), \quad (17)$$

$$g_4(x) = \frac{\beta(x)}{d \cos x_1} (\Delta\alpha(x)^2 + 1) \cos \xi(x). \quad (18)$$

Se puede verificar que un punto de equilibrio del modelo (14) es  $x^0 = (\arctan(E), 0, 0, 0)$ . El punto de operación del papalote,  $x_{op}$ , se encuentra en una vecindad del punto de equilibrio  $x^0$ , dónde  $x_2$  y  $x_4$  son diferentes de cero, es decir un punto en el cual el papalote se encuentra en movimiento generando potencia. Con el fin de validar el modelo aproximado, la Fig. 4 muestra el resultado de una simulación numérica que compara la salida de cada modelo (la del modelo completo y la del modelo aproximado) bajo las mismas condiciones de operación en fase de generación de potencia.

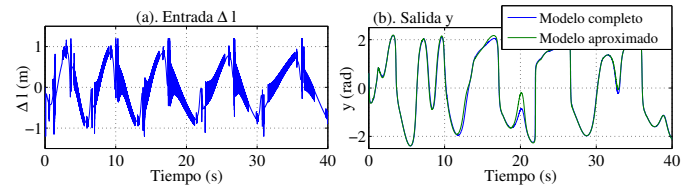


Fig. 4. (a) Señal de entrada. (b) Señales de salida.

El modelo aproximado (14) tiene características estructurales importantes, siendo una de ellas la llamada *dinámica interna* [19]. A nuestro conocimiento, está dinámica no ha sido estudiada en la literatura publicada sobre los sistemas AWE y, en particular para los papalotes. Para estudiar esta dinámica se verifica, primero, si el modelo aproximado tiene definido un *grado relativo* en alguna vecindad de algún punto en el espacio de estado. De acuerdo a [19], el modelo descrito por (14) tiene definido un grado relativo  $gr = 1$  en una vecindad del punto de operación  $x_{op}$  ya que la función escalar

$$b(x) = L_g h(x)|_{x=x_{op}} = \frac{\beta(x)(\Delta\alpha(x)^2 + 1)v_2(x)}{dV_K(x)}, \quad (19)$$

dónde  $V_K(x) = x_2^2 + x_4^2 \cos^2 x_1$  y  $v_2(x) = x_2 \cos \xi(x) + x_4 \cos x_1 \sin \xi(x)$ , es diferente de cero. La notación  $L_M \lambda(x)$  denota la derivada de Lie de la función escalar o vectorial  $\lambda(x)$  a lo largo del vector  $M(x)$ .

Ya que el modelo (14) tiene definido un grado relativo  $gr = 1$  en una vecindad de  $x_{op}$ , es posible representar el modelo en nuevas coordenadas. Esto permite identificar su dinámica interna y estudiarla, relacionándola, a su vez, con características físicas del comportamiento del papalote. De acuerdo a [19] se propone el cambio de coordenadas  $z = \Phi(x) = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4]^T = [z_1 \ \tilde{z}^T]^T = [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \phi_3(x) \ \phi_4(x)]^T = [\phi_1(x) \ \dot{\phi}(x)^T]^T$  dado por

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \dot{\phi}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{pmatrix}^T, \quad (20)$$

con  $\phi_1(x) = \arctan\left(\frac{x_4 \cos x_1}{x_2}\right)$ ,  
 $\phi_2(x) = \frac{\sqrt{x_2^2 + x_4^2 \cos^2 x_1}}{\cos x_1} \text{sign}(x_2)$ ,  $\phi_3(x) = \phi_2(x) + x_1$ ,  
 $\phi_4(x) = \phi_2(x) + x_3$  y  $\text{sign}(s)$  es la función signo definida como

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} +1, & \text{si } s > 0 \\ -1, & \text{si } s < 0 \end{cases}.$$

El mapeo inverso de (20) tiene la forma

$$\Phi(z)^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T, \quad (21)$$

con  $x_1 = z_3 - z_2$ ,  $x_2 = z_2 \cos z_1 \cos(z_3 - z_2)$ ,  $x_3 = z_4 - z_2$  y  $x_4 = z_2 \sin z_1$ . Antes de continuar se presenta el jacobiano de la función  $\phi(x)$ ,

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -c_1 \sin y & c_4 & 0 & \frac{\sin y \cos y}{x_4} \\ c_2 & c_3 & 0 & s_1 \sin y \\ c_2 + 1 & c_3 & 0 & s_1 \sin y \\ c_2 & c_3 & 1 & s_1 \sin y \end{pmatrix}, \quad (22)$$

donde  $s_1 = \text{sign}(x_2)$ ,  $c_1 = \cos y \tan x_1$ ,  $c_2 = s_1 c_1 x_2 / \cos x_1$ ,  $c_3 = s_1 \cos y / \cos x_1$ ,  $c_4 = -\sin y \cos y / x_2$ . El jacobiano es no singular siempre y cuando  $\det(x) = v_2(x)/V_K(x) \neq 0$ , entonces se puede concluir que la transformación (21) es un difeomorfismo local. Es importante observar que las funciones  $b(x)$  y  $\det(x)$  no están definidas para los siguientes casos: (a)  $x_2 = x_4 = 0$ , y (b)  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = n\pi/2$ , con  $n = 1, 3, 5, \dots$ . En la operación normal de un papalote, durante la fase de generación de potencia (que es el caso del presente trabajo), el punto de operación  $x_{op}$  no coincide con los casos (a) y/o (b); de igual manera, la vecindad de  $x_{op}$ , en la cual opera el papalote, no contiene estados que incluyan estos casos. En las nuevas coordenadas, el sistema (14) toma la forma

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(z_1, \tilde{z}) \\ q(z_1, \tilde{z}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(z_1, \tilde{z}) \\ 0 \end{pmatrix} u, \quad (23)$$

con salida  $y = z_1$ .  $a(z_1, \tilde{z})$ ,  $b(z_1, \tilde{z})$  y  $q(z_1, \tilde{z})$  están dadas por

$$a(z_1, \tilde{z}) = z_2 \cos^2(z_1) \sin(z_1) \sin(z_3 - z_2) + \frac{\sin(z_1) f_2(z)}{\cos(z_3 - z_2)} + \frac{\cos(z_1) f_4(z)}{z_2}, \quad (24)$$

$$b(z_1, \tilde{z}) = \frac{\sin(z_1) g_2(z)}{z_2 \cos(z_3 - z_2)} + \frac{\cos(z_1) g_4(z)}{z_2}, \quad (25)$$

$$q = \begin{pmatrix} z_2^2 \cos^3 z_1 \sin(z_3 - z_2) + \frac{f_2(z) \cos z_1}{\cos(z_3 - z_2)} + f_4(z) \sin z_1 \\ \dot{\phi}_2(z_1, \tilde{z}) + z_2 \cos(z_1) \cos(z_3 - z_2) \\ \dot{\phi}_2(z_1, \tilde{z}) + z_2 \sin z_1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

con  $f_2(z) = f_2(x)|_{x=\Phi(z)^{-1}}$ ,  $f_4(z) = f_4(x)|_{x=\Phi(z)^{-1}}$ ,  $g_2(z) = g_2(x)|_{x=\Phi(z)^{-1}}$ ,  $g_4(z) = g_4(x)|_{x=\Phi(z)^{-1}}$  y  $\dot{\phi}_2(z_1, \tilde{z}) = \dot{\phi}(x)|_{x=\Phi(z)^{-1}}$ . Es importante hacer notar que las funciones  $a(z_1, \tilde{z})$  y  $b(z_1, \tilde{z})$  corresponden a la llamada *Ley de razón de giro* en los modelos presentados por Fagiano et al. en [8], Erhard et al. en [9] y Schmehl et al. en [10]. La diferencia de éste modelo con el que se presenta en [18] es que tiene una forma más simple, lo cual resulta en una ventaja cuando se emplea en el diseño de controladores robustos. Así mismo, es distinto de los modelos presentados en [8], [9] y [10], ya que en el modelo propuesto en este trabajo se considera la dinámica interna del sistema, lo que permite usar técnicas de control que requieran el conocimiento de esta dinámica.

La dinámica interna del sistema está dada por la segunda componente de la ecuación (23), la cual no depende de la entrada  $u$  del sistema. La estabilidad de esta dinámica juega un papel importante en el diseño de esquemas de control y puede estudiarse a partir de las propiedades de estabilidad de la llamada *dinámica cero* asociada a ella [19]. La dinámica cero del sistema (23) se obtiene al hacer la salida  $y = z_1$  idénticamente cero y está dada por

$$\dot{\tilde{z}} = q(0, \tilde{z}) = q_0(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} z_2^2 \sin(z_3 - z_2) + \frac{f_2(\tilde{z})}{\cos(z_3 - z_2)} \\ \dot{\phi}_2(\tilde{z}) + z_2 \cos(z_3 - z_2) \\ \dot{\phi}_2(\tilde{z}) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

con  $f_2(\tilde{z}) = f_2(z)|_{z_1=0}$  y  $\dot{\phi}_2(\tilde{z}) = \dot{\phi}_2(z)|_{z_1=0}$ . Para analizar las propiedades de estabilidad de esta dinámica, se utilizó la aproximación lineal de (27) alrededor del punto de equilibrio  $\tilde{z}^0 = (0, 0, \arctan(E), 0)$ ; que corresponde al punto  $z^0 = \Phi(x^0)$  con  $z_1 = 0$ . Esta aproximación está dada por

$$\dot{\tilde{z}} \approx A \tilde{z}, \quad (28)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial q_0(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} \right|_{\tilde{z}=\tilde{z}^0} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & a_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

con  $a_1 = \Omega V_w E^{-1} (E^2 V_w - r)$ ,  $a_2 = -\Omega V_w^2 E$  y  $b_1 = a_1 + E^{-1}$ , donde  $\Omega = (\rho A C_L) (2rm)^{-1}$ . La ecuación característica asociada a la aproximación lineal (28), es

$$|\lambda I - A| = \lambda (\lambda^2 + \frac{\Omega r V_w}{E} \lambda + \Omega V_w^2) = 0, \quad (30)$$

cuyas raíces son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_{2,3} = -\frac{\Omega r V_w}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega r V_w}{2E}\right)^2 - \Omega V_w^2}$ . Entonces, la aproximación lineal (28) tiene un polo en el origen y dos con parte real negativa (ésto porque el primer término de  $\lambda_{2,3}$  siempre es negativo, ya que los parámetros son positivos, y es mayor en magnitud que el segundo término cuando éste es real). De hecho la matriz  $A$  satisface la desigualdad  $A + A^T \leq 0$  y, por lo tanto, la función candidata

$$W(\tilde{z}) = \frac{1}{2} \tilde{z}^T \tilde{z}, \quad (31)$$

es tal que su derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema (28) satisface  $\dot{W}(\tilde{z}) = \tilde{z}^T \dot{\tilde{z}} = \tilde{z}^T A \tilde{z} \leq 0$ . Entonces la dinámica cero (27) es estable en una vecindad del punto de equilibrio  $\tilde{z}^0$  [20]. Es decir, la dinámica cero del sistema (23), o, en forma equivalente, del sistema (14) es *débilmente de fase mínima* en una vecindad del punto de equilibrio [21], la cual incluye al punto de operación.

### III. ESTRATEGIA DE CONTROL

#### A. Estabilidad del Sistema y Seguimiento de Trayectoria

Se muestra primero que el modelo del papalote, cuya dinámica está dada por (14), puede hacerse equivalente a un sistema pasivo, localmente, por realimentación estática del estado. Considérese el modelo aproximado del papalote descrito por (23). Este sistema puede reescribirse, de acuerdo con [21], como

$$\dot{z}_1 = a(z_1, \tilde{z}) + b(z_1, \tilde{z}) u, \quad (32)$$

$$\dot{\tilde{z}} = q_0(\tilde{z}) + p(z_1, \tilde{z}) z_1, \quad (33)$$

con  $y = z_1$ , como salida.  $p(z_1, \tilde{z})$  se propone como

$$p(z_1, \tilde{z}) = \begin{pmatrix} p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}^T = (-q_0(\tilde{z}) + q(z_1, \tilde{z})) \frac{1}{z_1}, \quad (34)$$

donde  $p_2 = z_2 \sin(z_3 - z_2)(\cos^3 z_1 - 1) + f_4(z) \sin z_1 \sec(z_3 - z_2)(f_2 \cos z_1 + f_2(z))$ ,  $p_3 = p_2 + z_2 \cos(z_3 - z_2)(\cos z_1 - 1)$  y  $p_4 = p_2 + z_2 \sin z_1$ . Ya que el sistema (32)-(33) es débilmente de fase mínima en una vecindad del punto de equilibrio  $z^0$ , entonces, de acuerdo a [22] la retroalimentación

$$u(z_1, \tilde{z}) = b(z_1, \tilde{z})^{-1}[-a(z_1, \tilde{z}) + v], \quad (35)$$

con

$$v = -L_{p(z_1, \tilde{z})}W(\tilde{z}) + w, \quad (36)$$

donde  $W(\tilde{z})$  esta dada por (31) y  $w$  es una nueva entrada, hace pasivo al sistema (32)-(33) desde esta entrada hasta la salida  $y = z_1$ , con función de almacenamiento  $V(z_1, \tilde{z}) = \frac{1}{2}y^2 + W(\tilde{z})$ . En la retroalimentación (35)-(36) el término  $L_{p(z_1, \tilde{z})}W(\tilde{z})$  está dado por

$$L_{p(z_1, \tilde{z})}W(\tilde{z}) = [z_2 p_2 + z_3 p_3 + z_4 p_4]. \quad (37)$$

Se propone ahora una estrategia de control basada en un control proporcional, más precisamente

$$w = -k_p e, \quad (38)$$

donde  $k_p$  es una ganancia real positiva y  $e$  es el error de seguimiento definido como

$$e = y - y^*, \quad (39)$$

donde  $y^*$  es la trayectoria deseada (véase la Fig. 3). De acuerdo con [23], en un sistema de lazo cerrado como el de la Fig. 5 y con un controlador de ganancia finita  $k_p$ , el cual es estrictamente pasivo, al ser conectado en cascada a un sistema pasivo se tiene que el sistema en lazo cerrado es  $L_2$ -estable.<sup>1 2</sup> Entonces la acción de control (38) estabiliza al sistema y logra

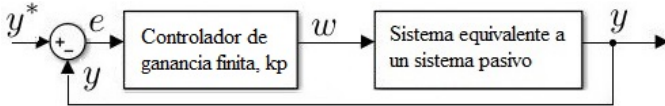


Fig. 5. Sistema de control en lazo cerrado para seguimiento de trayectoria estable.

además el seguimiento de la trayectoria  $y^*$  por la salida  $y$  del modelo del papalote, el cual se hace primero equivalente a un sistema pasivo por medio de la retroalimentación (35)-(36).

### B. Seguimiento Robusto

El sistema (14) o, en forma equivalente, (32)-(33) es afectado por incertidumbres tales como cambios en parámetros como son la velocidad del viento,  $V_w$ , y la longitud de la cuerda,  $r$ , así como perturbaciones externas (fenómenos de turbulencia, por ejemplo). Se considera entonces el sistema perturbado

$$\dot{z}_1 = a(y, \tilde{z}) + \Delta a(y, \tilde{z}, \zeta) + [b(y, \tilde{z}) + \Delta b(y, \tilde{z}, \zeta)]u, \quad (40)$$

$$\dot{\tilde{z}} = q_0(\tilde{z}) + p(y, \tilde{z})y + \Delta p(y, \tilde{z}, \zeta)y, \quad (41)$$

<sup>1</sup> $L_2$  es el conjunto de todas las funciones medibles:  $f: R_+ \rightarrow R$  tales que  $\|f(t)\|_2 = \left\| \int_0^\infty |f(t)|^2 dt \right\|^{1/2} < \infty$ .

<sup>2</sup>Un sistema  $y = G(u)$  es  $L_2$ -estable si  $u \in L_2$  implica que  $y \in L_2$ .

donde  $\Delta a(y, \tilde{z}, \zeta) = a_r(y, \tilde{z}, \zeta) - a(y, \tilde{z})$ ,  $\Delta b(y, \tilde{z}, \zeta) = b_r(y, \tilde{z}, \zeta) - b(y, \tilde{z})$ , y  $\Delta p(y, \tilde{z}, \zeta) = p_r(y, \tilde{z}, \zeta) - p(y, \tilde{z})$  son los términos de perturbación. Los términos  $a_r(y, \tilde{z}, \zeta)$ ,  $b_r(y, \tilde{z}, \zeta)$  y  $p_r(y, \tilde{z}, \zeta)$  son los términos reales asociados al sistema perturbado y  $\zeta$  representa las incertidumbres; cuando  $\zeta = 0$ ,  $a_r(y, \tilde{z}, 0) = a(y, \tilde{z})$ ,  $b_r(y, \tilde{z}, 0) = b(y, \tilde{z})$  y  $p_r(y, \tilde{z}, 0) = p(y, \tilde{z})$ , y el sistema perturbado (40)-(41) coincide con el sistema nominal (32)-(33). Para compensar las incertidumbres mencionadas arriba y lograr mantener la equivalencia del sistema perturbado (40)-(41) a un sistema pasivo, se propone en este trabajo utilizar la técnica de modos deslizantes [24]. En base a esta técnica se propone la función de conmutación

$$s(y, v) = y - \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (42)$$

Para atraer el movimiento del sistema a la superficie de deslizamiento definida por  $s = 0$ , es suficiente satisfacer la condición de atracción o deslizamiento  $\dot{s} < 0$ . Esta condición se satisface con la asignación

$$\dot{s} = \dot{y} - v = -\Gamma \text{sign}(s), \quad (43)$$

donde  $\Gamma > 0$ . Considerando el sistema nominal sin incertidumbres (32)-(33), la ecuación (43) toma la forma  $a(z_1, \tilde{z}) + b(z_1, \tilde{z})u - v = -\Gamma \text{sign}(s)$ , entonces el control que logra que el sistema alcance la superficie  $s = 0$  en un tiempo finito está dada por

$$u = b(z_1, \tilde{z})^{-1}[-a(z_1, \tilde{z}) + v - \Gamma \text{sign}(s)], \quad (44)$$

donde  $v$  es el término de pasivación (36). En la superficie de deslizamiento  $s = 0$ , el control equivalente,  $u_{eq}$ , asociado al control discontinuo (44) y que mantiene al sistema en esa superficie coincide con la retroalimentación (35)-(36) que hace al sistema pasivo. Al sustituir el control (44) en el sistema perturbado (40)-(41) se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\dot{z}_1 = v + \zeta_1(y, \tilde{z}, \zeta), \quad (45)$$

$$\dot{\tilde{z}} = q_0(\tilde{z}) + p(y, \tilde{z})y + \zeta_2(y, \tilde{z}, \zeta)y, \quad (46)$$

donde

$$\zeta_1 = -\Gamma \text{sign}(s) + \Delta a + \Delta b b^{-1}(-a - \Gamma \text{sign}(s) + v), \quad (47)$$

$$\zeta_2 = \Delta p. \quad (48)$$

Debido entonces a los términos de perturbación originados por las incertidumbres del sistema, éste podría alejarse de la superficie de deslizamiento  $s = 0$ , dejando así de ser equivalente a un sistema pasivo. Se hace entonces la siguiente suposición sobre los términos de perturbación y se da una condición de suficiencia sobre el parámetro  $\Gamma$  de la ley de control discontinua que asegura la atracción a la superficie  $s = 0$  para el sistema perturbado en lazo cerrado (45)-(46).

**Suposición 2.** Los términos de perturbación están acotados, es decir,  $|\Delta a| \leq k_3$ ,  $|\Delta b b^{-1}| \leq k_4$ ,  $\|\Delta p\| \leq k_5$  y que, además, el término  $(-a + v)$  también está acotado, más precisamente  $|(-a + v)| \leq k_6$ . Donde  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  y  $k_6$  son reales positivos diferentes de cero.

**Lema 1.** Considérese el sistema perturbado (40)-(41) junto con la ley de control (44). Asuma que se satisface la suposición

2. Entonces la superficie de deslizamiento  $s = 0$  es atractiva para cualquier punto en el dominio  $D = \{\tilde{z} \in \mathbb{R}^3 : \|\tilde{z}\| < r_D\}$ , siendo  $r_D$  el radio de la vecindad alrededor del punto de equilibrio  $z_0$  del sistema nominal (32)-(33), con la ley de control (44) si  $\Gamma$ , satisface

$$\Gamma > (1 - k_4)^{-1}[k_3 + k_4 k_6], \quad (49)$$

con  $k_4 \neq 1$ .

*Demostración.* Considere la función candidata de Lyapunov  $V_s(s) = \frac{1}{2}s^2$  dependiente de la superficie  $s$ . Entonces de acuerdo con el criterio de estabilidad de Lyapunov se debe cumplir la condición  $V_s(s) < 0$ , o escrito de otra forma  $s\dot{s} < 0$ , donde ésta última corresponde a la condición de atracción. Ahora, considere el sistema perturbado (40)-(41) en lazo cerrado con la ley de control (44), o de forma equivalente (45)-(46), además considere la función de conmutación (42). Entonces a partir de (45) se tiene que  $\dot{s} = \zeta_1(y, \tilde{z}, \zeta)$ , y, de la expresión (47), la condición de atracción toma la forma

$$s\dot{s} = s\zeta_1 = -\Gamma \text{sign}(s)s - \Delta b b^{-1} \Gamma \text{sign}(s)s + \Delta a s + \Delta b b^{-1} s(-a + v) < 0. \quad (50)$$

Reiterando la ecuación previa y considerando que se satisface la suposición 2 se tiene que  $|s|[-\Gamma + k_4\Gamma + k_3 + k_4 k_6] < 0$ , entonces, si  $\Gamma$  satisface (49) la superficie de deslizamiento  $s = 0$  se alcanza a partir de cualquier punto en el dominio  $D$ , con  $k_4 \neq 1$ .  $\square$

El resultado anterior da una condición de suficiencia que permite asegurar que la superficie de deslizamiento  $s = 0$  (donde el sistema es equivalente a un sistema pasivo) es atractiva. Sin embargo, es interesante estudiar el comportamiento del error de seguimiento (39) en el sistema perturbado en lazo cerrado. Se introduce entonces la siguiente suposición sobre los términos  $L_{p(z_1, \tilde{z})}W(\tilde{z})$  y  $L_{\Delta p(z_1, \tilde{z}, \zeta)}W(\tilde{z})$ .

**Suposición 3.** Existen funciones  $\kappa^3$ ,  $\alpha_1(\cdot)$  y  $\alpha_2(\cdot)$  tales que  $\|L_{p(z_1, \tilde{z})}W(\tilde{z})\| \leq \alpha_1(\tilde{z})$ ,  $\|L_{\Delta p(z_1, \tilde{z}, \zeta)}W(\tilde{z})\| \leq \alpha_2(\tilde{z})$ , con dominio  $D$ .

Se tiene entonces el siguiente resultado.

**Lema 2.** Considérese el sistema perturbado en lazo cerrado (45)-(46) con el término  $v$  dado por (36) y la retroalimentación (38). Entonces, bajo las suposiciones 1, 2 y 3, el error de seguimiento (39), está últimamente localmente acotado.

*Demostración.* Al sustituir (36) y la retroalimentación (38) en (45)-(46) y usando la definición del error de seguimiento (39) se obtiene la dinámica perturbada.

$$\dot{e} = -L_{p(e, y^*, \tilde{z})}W(\tilde{z}) - k_p e + \zeta_1(e, y^*, \tilde{z}, \zeta) - \dot{y}^*, \quad (51)$$

$$\dot{\tilde{z}} = q_0 + p(e, y^*, \tilde{z})(e + y^*) + \zeta_2(e, y^*, \tilde{z}, \zeta)(e + y^*). \quad (52)$$

Considérese la función candidata de Lyapunov  $V_e(e, \tilde{z}) = \frac{1}{2}e^2 + W(\tilde{z})$ , cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias del sistema (51)-(52) está dada por

$$\dot{V}_e = \dot{e}e + L_{q_0(\tilde{z})}W(\tilde{z}) + L_{p(e, y^*, \tilde{z})}W(\tilde{z})(e + y^*) + L_{\Delta p(e, y^*, \tilde{z}, \zeta)}W(\tilde{z})(e + y^*), \quad (53)$$

<sup>3</sup>Una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  se dice que es de clase  $\kappa$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$  [20].

o, en forma equivalente,

$$\begin{aligned} \dot{V}_e = & -k_p e^2 + L_{q_0}W + y^*(L_p W + L_{\Delta p}W) \\ & + e[-\Gamma \text{sign}(s) - \Delta b b^{-1} \Gamma \text{sign}(s) + \Delta a \\ & + L_{\Delta p}W + \Delta b b^{-1}(-a + v) - y^*]. \end{aligned} \quad (54)$$

Ya que la dinámica  $\dot{\tilde{z}}$  satisface  $L_{q_0(\tilde{z})}W(\tilde{z}) \leq 0$ , se tiene que bajo la suposiciones 1, 2 y 3,  $\dot{V}_e$  puede reiterarse como

$$\dot{V}_e \leq -k_p e^2 + |e|k + k_1(\alpha_1(r_D) + \alpha_2(r_D)), \quad (55)$$

con  $k = \Gamma + k_4\Gamma + k_3 + \alpha_2(r_D) + k_4 k_6 + k_2$ . La ecuación (55) se puede reescribir como

$$\dot{V}_e \leq -(1 - \theta)k_p e^2 - \theta k_p e^2 + k|e| + k_1(\alpha_1(r_D) + \alpha_2(r_D)), \quad (56)$$

con  $0 < \theta < 1$ . Entonces se puede decir que

$$\dot{V}_e \leq -(1 - \theta)k_p e^2 \quad \forall e \geq \mu_r, \quad (57)$$

con  $\mu_r = \frac{(-k \pm \sqrt{k^2 + 4\theta k_p k_1(\alpha_1(r_D) + \alpha_2(r_D))})}{(-2\theta k_p)^{-1}}$ . Por otro lado se puede concluir que, si el error de seguimiento  $e$  crece más allá de  $\mu_r$ ,  $\dot{V}_e \leq 0$ . Es decir, el error  $e$  está últimamente localmente acotado [20].  $\square$

#### IV. SIMULACIÓN NUMÉRICA

El objetivo de la simulación es mostrar el comportamiento del sistema en lazo cerrado bajo perturbaciones en la fase de potencia del llamado *ciclo de bombeo* [2]. En esta fase el papalote es empujado por el viento a cierta velocidad y además se sigue una trayectoria como la descrita en la sección II, esto para incrementar la tensión en las cuerdas [25].

##### A. Detalles de la Simulación

La Fig. 6 muestra los bloques usados en la simulación. El sistema se representa por (1), el controlador diseñado corresponde al control de seguimiento (44), el generador de trayectoria se describe en la Fig. 3 y el bloque de control de ciclo y de la velocidad de la cuerda regula cada estado dentro del ciclo. Los parámetros del papalote son los mos-

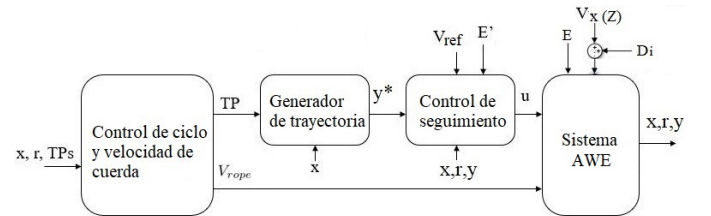


Fig. 6. Diagrama de bloques usado para construir la simulación.

trados en [12]:  $m = 7\text{kg}$ ,  $A = 21\text{m}^2$ ,  $d = 6\text{m}$ ,  $E = 5$ ,  $C_L = 0.85$ ,  $E' = 4.6$ . Se proponen los valores para  $m$  y  $d$ . Las condiciones de conmutación son:  $\theta_{TP1} = \theta_{TP2} = 0.6\text{rad}$ ,  $\phi_{TP1} = -\phi_{TP2} = -1.1\text{rad}$ ,  $\sigma^2 = 0.33$ ,  $l_{transfer} = 290\text{m}$  y  $l_{restart} = 125\text{m}$ ,  $\theta_r = 1.34\text{rad}$ . Las ganancias propuestas de los controladores son:  $k_p = 80$ ,  $\Gamma = 50$ . Para disminuir el efecto de castaño debido a la discontinuidad de la función  $\text{sign}(s)$ , se usa en su lugar la función saturación dada por

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s > \epsilon_1 \\ s/\epsilon_1, & \text{si } -\epsilon_1 \leq s \leq \epsilon_1 \\ -1, & \text{si } s < -\epsilon_1 \end{cases},$$

donde  $\epsilon_1$  es el espesor de la franja límite en el espacio  $s$ . Durante la evolución de la dinámica del sistema en fase de transición,  $s$  podría moverse dentro y fuera de ésta franja límite. Sin embargo, una vez que la función de Lyapunov  $V_s$  alcanza la condición  $V_s < \epsilon_1^2/2$ ,  $s$  permanece acotada por dicha franja [26], y entonces el lema 1 mantiene su validez cuando  $s < \epsilon_1$ .

Las condiciones de viento son similares a las reportadas en [12] y [8]:  $V_w = V_{ref} = 7.5\text{m/s}$ ,  $\Delta\phi = 0.3\text{rad}$ ,  $\rho = 1.22\text{Kg/m}^3$ ,  $Z_r = 6 \times 10^{-4}\text{m/s}$ ,  $Z_{ref} = 32.5\text{m}$ . Las condiciones iniciales son:  $\theta_0 = 1\text{rad}$ ,  $\phi_0 = 0$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0.2\text{rad/s}$ ,  $\dot{\phi}_0 = 0.2\text{rad/s}$ ,  $r_0 = 125\text{m}$ . Parámetros adicionales de simulación son:  $y_{TP} = 1.8\text{rad}$ ,  $\Delta t = 2\text{s}$ , velocidad de cuerda  $V_{rope} = V_{out} = 1.5\text{m/s}$ ,  $u_{lim} = \pm 3\text{m}$ ,  $\epsilon_1 = 0.05$ . Las perturbaciones presentes en el proceso son: **(a)** El uso del modelo aproximado en el diseño del controlador introduce incertidumbre. **(b)** El parámetro  $E$  es variable debido a la flexibilidad del papalote. **(c)** El controlador considera un valor constante para la velocidad del viento  $V_w$ , pero en el sistema se introduce una perturbación de la forma  $Di = 0.25 \cos(3t) + 1.5 \sin(0.5t + 0.5)$ , (véase la Fig. 7(a)). **(d)** El modelo considera que la dirección del viento está alineada con  $X$  en el marco no inercial. La simulación considera que la dirección del viento se desvía un ángulo  $\Delta\phi$ , medido a partir del eje  $X$ . **(e)** La velocidad de la cuerda también se introduce como una incertidumbre paramétrica.

## B. Resultados

El modelo aproximado se basa en que  $\Delta\alpha(x) \approx 0$  y  $\psi(x, u) \approx 0$ . La Fig. 7(b) muestra que estos ángulos son pequeños indicando que el modelo aproximado es adecuado en esta fase. La acción de control  $u$  en la Fig. 7(c) está limitada a  $\pm 3\text{m}$ , nótese que tiene un pequeño corrimiento hacia abajo debido a la desviación en la dirección del viento. En la práctica, el actuador trabaja como un filtro evitando

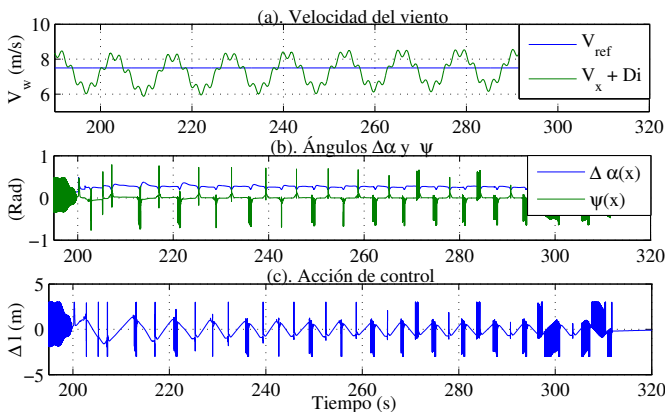


Fig. 7. **(a)** Velocidad del viento. **(b)** Ángulos  $\Delta\alpha(x)$  y  $\psi(x, u)$  **(c)** Acción de control.

el castaño generado por la ley de control, por lo que la señal entregada al sistema será suave. La Fig. 8(a) muestra la salida del sistema (ángulo de velocidad), mientras que la Fig. 8(b) y 8(c) muestra el error de seguimiento y la superficie de deslizamiento. Obsérvese, cómo es posible controlar el sistema aún con las perturbación presentes.

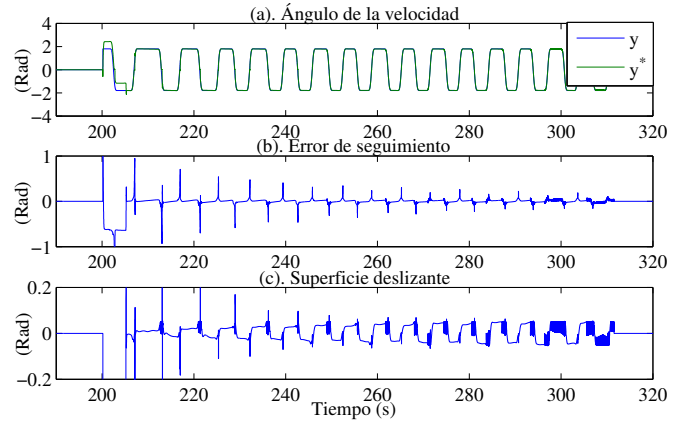


Fig. 8. **(a)** Salida, ángulo de velocidad. **(b)** Error de seguimiento. **(c)** Superficie deslizante.

**Comentario 1.** De acuerdo con el lema 1 la superficie de deslizamiento es atractiva si se satisface (49) (véase Fig. 8(c)), por lo tanto el sistema será pasivo bajo esta condición. También, de acuerdo con el lema 2, cuando el error crece más allá de  $\mu_r$ , la ley de control (44) hará que el sistema (40)-(41) alcance la trayectoria de referencia (véase Fig. 8(a)) y el error de seguimiento estará acotado (véase Fig. 8(b)).

## C. Cálculo de Energía

Los resultados mostrados en la Fig. 9 se obtienen usando condiciones similares a las reportadas en [12], es por ello que dicho trabajo se usa como referencia para evaluar los resultados presentados en este trabajo. Entonces, nótese que: **(a)** La principal diferencia es el controlador usado para se-

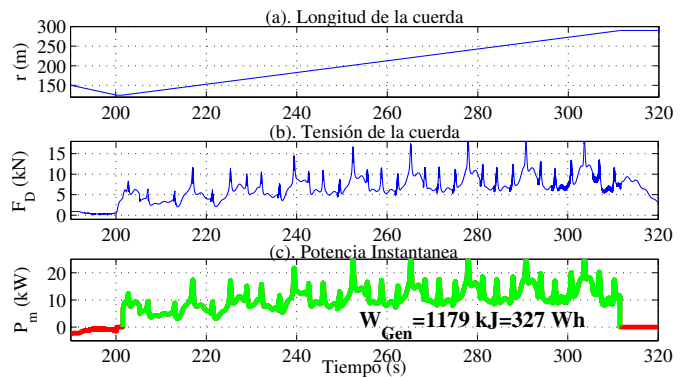


Fig. 9. Comportamiento en la fase de potencia.

guimiento de trayectoria. En [12] se usa una combinación de un control proporcional y un control PI. **(b)** Medir la velocidad aparente del papalote (como en [12]) es equivalente a medir la perturbación en la velocidad del viento, el control propuesto es robusto ante esta perturbación usando sólo una estimación de ese valor, evitando el uso de un sensor a bordo del papalote. **(c)** La ley de control (44) es capaz de compensar todas las perturbaciones presentes en el proceso y mantener el sistema estable. **(d)** Como consecuencia, la trayectoria deseada se sigue adecuadamente y la energía, en fase de generación, es mayor que la reportada en [12]. Más precisamente, se

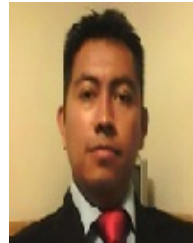
alcanza una mayor tensión en la cuerda y una mayor potencia instantánea en dicha fase, y por lo tanto una mayor cantidad de energía: 1179kJ en este trabajo comparados con los 884kJ y 995kJ reportados en [12].

## V. CONCLUSIÓN

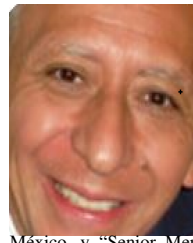
Se obtuvo un modelo aproximado de la forma  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  basado en la Ley de Razón de Giro y que considera la dinámica interna del sistema. Se diseñó un controlador de seguimiento de trayectoria en la fase de potencia, basado en el modelo aproximado y combinando ideas de pasividad y modos deslizantes. Las simulaciones numéricas respaldan los resultados expresados por medio de los lemas 1 y 2. También, indican un buen desempeño del controlador compensando las perturbaciones, siguiendo la trayectoria de referencia y produciendo energía en la fase potencia. Como trabajo futuro se propone minimizar el esfuerzo de control en la fase de potencia, con el fin de disminuir la energía consumida. Además, los resultados obtenidos se evaluarán en una plataforma real.

## REFERENCIAS

- [1] M. De Lellis, A. K. Mendonga, R. Saraiva, A. Trofino, and A. Lezana. "Electric Power Generation in Wind Farms with Pumping Kites: An economical analysis". *Renewable Energy*, vol. 86, pp. 163-172, 2016.
- [2] U. Ahrens, M. Diehl, and R. Schmehl, Eds., *Airborne wind energy, green energy and technology*. Berlin, Heidelberg: Springer, ISBN 978-3-642-39964-0, 2013.
- [3] Airborne Wind Energy System Modeling, Control and Optimization, [Online], Available: <http://www.awesco.eu/>
- [4] L. Barros, N. de Souza, W. Vianna, "Generation of Wind Energy with Kites: a Review of the Airborne Wind Energy Technology". En proc. *2020 IEEE PES Transmission and Distribution Conference and Exhibition*. Latin America (T&D LA), 2020.
- [5] L. Fagiano, M. Milanese, D. Piga, "High-Altitude Wind Power Generation". *IEEE Transactions on energy conversion*, vol. 25, no. 1, pp. 168-180, 2010.
- [6] U. Fechner, R. van der Vlugt, E. Schreuder, R. Schmehl. "Dynamic Model of a Pumping Kite Power System", *Renewable Energy*, vol 83, pp. 705-7016, 2015.
- [7] E. Malz, F. Hedenus, L. Göransson, V. Verendel, S. Gros. "Drag-mode airborne wind energy vs. wind turbines: An analysis of power production, variability and geography". *Energy*. Vol. 193, 2020.
- [8] L. Fagiano, A. Zraggen, M. Morari, and M. Khammash, "Automatic crosswind flight of tethered wings for airborne wind energy: Modeling, control design, and experimental results", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 4, pp. 1433-1447, 2014.
- [9] M. Erhard, H. Strauch, "Control of Towing Kites for Seagoing Vessels", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 21, no. 5, pp. 1629-1640, 2013.
- [10] C. Jehle, R. Schmehl, "Tracking Control on the Unit Sphere Applied to Traction Kites for Power Generation", *AIAA Journal Guidance, Control and Dynamics*, vol. 37, no. 4, pp. 1211-1222, 2014.
- [11] S. Costello, G. Francois, D. Bonvin, "Real-Time Optimizing Control of an Experimental Crosswind Power Kite" *IEEE Transactions on control systems technology*, vol. 26, no. 2, pp. 507-522, 2018.
- [12] M. Erhard and H. Strauch. "Flight control of tethered kites in autonomous pumping cycles for airborne wind energy", *Control Engineering Practice*, vol. 40, pp. 13-26, 2015.
- [13] B. Salman, M. Umer. "Sliding mode control for autonomous flight of tethered kite under varying wind speed conditions". En Proc. *2020 17th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology*. Islamabad, Pakistan, January, 2020.
- [14] J. Alvarez-Gallegos, R. Castro-Linares, M. A. Zempoalteca-Jimenez. "Robust Nonlinear flight Control of a Power-Generating tethered kite". En Proc. *2019 16th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, CDMX, Mexico, Sep. 2019.
- [15] T. Dief, U. Fechner, R. Schmehl, S. Yoshida and M. Rusdi. "Adaptive Flight Path Control of Airborne Wind Energy Systems". *Energies*, vol. 13, no. 3, 2020
- [16] J. Lago, M. Erhard, M. Diehl. "Warping model predictive control for application in control of a real airborne wind energy system". *Control Engineering Practice*, vol. 78, pp. 65-78, 2018.
- [17] T. Aoki and T. Tsuchiya. "Multiple Trajectories Generation to Realize Stable Flight of Kites in Airborne Wind Energy System". *2020 59th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, Chiang Mai, Thailand, September 2020.
- [18] L. Fagiano, M. Milanese, D. Piga "Optimization of airborne wind energy generators", *International Journal of Robust and nonlinear control*, vol. 22, no. 18, pp.2055-2083, 2012.
- [19] Alberto Isidori, "Nonlinear Control Systems", Third Edition. Springer-Verlag, London. (1995). ISBN 978-1-4471-3909-6
- [20] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems", Third Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. (2002). ISBN 0130673897
- [21] Christopher I. Byrnes, Alberto Isidori, Jan C. Willems. "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems", *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 36, no. 11, pp. 1228-1240, 1991.
- [22] R. Sepulchre, M. Jankovic, P.V. Kokotovic, "Constructive nonlinear control". Springer-Verlag. ISBN:3540761276, (1997).
- [23] M. Vidyasagar, "Input-Output Analysis of Large-Scale Interconnected Systems", Springer-Verlag, Berlin. (1985).
- [24] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li, "Applied Nonlinear Control". Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. (1991).
- [25] B. Houska, M. Diehl, "Optimal control for power generating kites", En proc. *European Control Conference (ECC)*, Kos, Greece, 2007.
- [26] E. Hakan, N. Olgac, "Robust Output Tracking Control of Nonlinear MIMO Systems via Sliding Mode Technique". *Automatica*, vol. 28, no. 1, pp. 145-151, 1992.



**M. A. Zempoalteca-Jimenez** Obtuvo el título de ingeniero en electricidad en 2008 por el Instituto Tecnológico de Pachuca, Hidalgo, México. El grado de maestro en ciencias en 2011 por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey, Nuevo León, México. Actualmente cursa estudios para obtener el grado de Doctor en ingeniería eléctrica en el CINVESTAV-IPN, CDMX, México. Sus intereses son los sistemas mecatrónicos y la aplicación de energías renovables.



**R. Castro-Linares** Obtuvo el título de Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica en ESIME-IPN, México, CDMX, en 1981, obtuvo los grados de Maestría y Doctorado en Ingeniería eléctrica en CINVESTAV en 1982 y 1987 respectivamente. Actualmente, es Investigador Titular en el Departamento de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV. Ha sido profesor visitante en universidades e institutos de investigación de Francia, Italia, Holanda, Estados Unidos de América y Chile. Es Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, Miembro de la Academia Mexicana de Ciencias, Miembro Titular de la Academia de Ingeniería, México, y "Senior Member" del IEEE. Ha publicado alrededor de 400 artículos en revistas internacionales y memorias de congresos especializados. Sus intereses de investigación son los sistemas de control no lineal y su aplicación a servomecanismos.



**J. Alvarez-Gallegos** (SM'97) recibió el título de Ingeniero en electrónica en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), CDMX, México en 1973 y los grados de Maestría y Doctorado en Ingeniería eléctrica en el CINVESTAV en 1974 y 1978, respectivamente. Fue Jefe del departamento de Ingeniería Eléctrica del CINVESTAV (1992-1996) y Director de la escuela de Ingeniería Interdisciplinaria y Tecnología Avanzada del IPN (1997-2000). También fue director del Centro de Investigación en Computación, IPN (2007-2009). Fue profesor visitante en el Imperial College of Science and Technology, Londres, UK. (1985-1986). Actualmente, es profesor en el departamento de ingeniería eléctrica en el CINVESTAV. Sus intereses la mecatrónica, métodos de optimización y el control de sistemas no lineales.