

Robust Observer-Based Leader-Following Consensus for Multi-Agent Systems

Jesus A. Vazquez Trejo, Manuel Adam-Medina, Juan A. Vazquez, C.D. Garcia, J. Garcia

Abstract—This paper presents a robust observer-based leader-following consensus control for multi-agent systems subject to external disturbances. The stability and robustness to external disturbances are addressed through the Lyapunov approach and an optimal H_∞ criterion. It is shown that the design conditions for a correct convergence of the estimated states and consensus control can be expressed in a set of linear matrix inequalities whose solution allows computing the observer and controller gain matrices. In order to show the effectiveness of the proposed strategy, numerical examples are carried out to solve the formation control problem of a fleet of unmanned aerial vehicles (UAVs) under the effect of wind turbulence.

Index Terms—Leader-following, multi-agent systems, observer-based control, robust control, formation control.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas multiagentes han tomado gran interés de parte de la comunidad científica en los últimos años, debido a que su uso permite realizar tareas que un solo agente no podría o tardaría mucho tiempo en realizar. Algunas aplicaciones de los sistemas multiagentes pueden encontrarse en: misiones de vigilancia y reconocimiento de áreas geográficas extensas [1] [2], misiones de búsqueda y rescate [3], ataque de objetivos en movimiento [4], exploración marina [5], inspección de líneas de transmisión eléctrica [6], entre otras.

Resolver el problema de control de formación en sistemas multiagentes permite realizar formaciones deseadas utilizando diferentes estrategias como son: utilizando una estructura virtual [7], estrategias basadas en comportamiento [8], líder-seguidor [9], basado en grafos [10], potenciales artificiales [11], también se aborda el problema de control de formación con estrategias basadas en consenso [12], [13], o utilizando la relación de sistemas del tipo doble integrador [14], entre otras.

La estrategia líder-seguidor es la más utilizada en la literatura, por su sencillez en el análisis y por su fácil implementación [15], [16]. El problema en el caso del consenso líder-seguidor es considerar cuando, todas las trayectorias de los agentes deben converger a un agente líder físico o virtual. La manipulación de todo el sistema multiagente puede alcanzarse solamente controlando al líder [17].

Para garantizar que los sistemas multiagentes lleguen a un consenso se aplican técnicas robustas a perturbaciones, como en [18] donde utilizan un control basado en una red neuronal añadiendo el concepto de la evasión de perturbaciones por medio de potenciales artificiales. En [19] resuelven el problema de control de formación óptimo para sistemas multiagentes considerando perturbaciones externas. En [20] utilizan la estructura líder-seguidor y un esquema de control de modos deslizantes aplicado en un modelo con incertidumbres y perturbaciones externas en vehículos de superficie subactuada. En [21] trabajan con un control de seguimiento por consenso de

tiempo finito para sistemas multirobot añadiendo perturbaciones. En [22] diseñan un control por modelo de referencia basado en observador para sistemas multiagentes con un mecanismo activado por eventos que disminuye el intercambio de información entre los agentes. En [23] presentan una estrategia de control distribuida para resolver los problemas de consenso y control de formación en un equipo de VTOL-UAVs. En [24] proponen un observador de estimación de fallas distribuidas proporcional-integral para sistemas multiagentes con un enfoque distribuido.

En contraste con los trabajos anteriormente mencionados, donde se han estudiado estrategias robustas para compensar las perturbaciones sin considerar el análisis de estabilidad del consenso que involucre el diseño de un controlador basado en observador, en este trabajo se realiza el análisis de estabilidad utilizando el enfoque de Lyapunov y un criterio de optimización de H_∞ para el cálculo de un controlador y observador robustos que resuelven el problema de consenso líder-seguidor. La principal contribución en este trabajo es el diseño de un control basado en observador robusto con la técnica líder-seguidor aplicado en el modelo matemático de una flotilla de UAVs que resuelven el problema de control de formación. Para ello se obtienen condiciones de desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en inglés) que garantizan la existencia de las ganancias de un controlador y observador robustos resolviendo el problema de optimización por H_∞ . Se ejemplifica mediante simulaciones la efectividad del esquema propuesto, donde la ley de control se amplía para resolver el problema de control de formación utilizando el modelo dinámico de un equipo de UAVs sujetos a perturbaciones externas consideradas como turbulencias en el viento descritas por el modelo de Dryden presentado en [25].

La organización de este artículo se presenta a continuación. En la sección II se muestran los Preliminares. La teoría de grafos y el planteamiento del problema se encuentran en la sección III. En la sección IV se muestra el diseño del controlador basado en observador líder seguidor para un sistema multiagente y las condiciones LMIs obtenidas. En la sección V se muestra un ejemplo numérico que muestra la efectividad del control. Las conclusiones se muestran en la sección VI.

II. PRELIMINARES

Sea X una matriz, entonces X^T denota la transpuesta de la matriz, $X = X^T > (<)0$ denota una matriz simétrica definida positiva (negativa) respectivamente. El conjunto de números reales es representado por \mathbb{R} . $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana. Por simplicidad, $*$ para una matriz simétrica representa términos simétricos. La parte Hermitiana de una matriz cuadrada X es denotada por $He\{X\} := X + X^T$. El símbolo \otimes denota el productora Kronecker.

Lema 1 ([26]): Para matrices reales \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , y \bar{D} con dimensiones apropiadas, el producto Kronecker \otimes cuenta con las siguientes propiedades:

- 1) $(\bar{A} + \bar{B}) \otimes \bar{C} = \bar{A} \otimes \bar{C} + \bar{B} \otimes \bar{C}$,
- 2) $(\bar{A} \otimes \bar{B})^T = \bar{A}^T \otimes \bar{B}^T$,
- 3) $(\bar{A} \otimes \bar{B})(\bar{C} \otimes \bar{D}) = (\bar{A}\bar{C}) \otimes (\bar{B}\bar{D})$.

Lema 2 ([27]): Dada la matriz simétrica $\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{B}^T & \bar{C} \end{bmatrix} < 0$, los siguientes planteamientos son equivalentes.

- 1) $\bar{A} < 0$, $\bar{C} - \bar{B}^T \bar{A}^{-1} \bar{B} < 0$,
- 2) $\bar{C} < 0$, $\bar{A} - \bar{B}^T \bar{C}^{-1} \bar{B} < 0$.

Lema 3 ([28]): Dadas las matrices X y Y de dimensiones apropiadas, para cualquier matriz invertible S y cualquier escalar $\mu > 0$ se tiene lo siguiente:

$$X^T Y + Y^T X \leq \mu X^T S X + \mu^{-1} Y^T S^{-1} Y.$$

Como se trabaja en [29] un grafo direccionado \mathcal{G} es un par $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ es un conjunto finito no vacío de nodos (agentes) y $\mathcal{E} = \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ es un conjunto de arcos. N es el número total de agentes. Los agentes vecinos del agente i son denotados como $j \in \mathcal{N}_i$. La matriz de adyacencias $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ asociada con el grafo \mathcal{G} se define tal que $a_{ii} = 0$, $a_{ij} > 0$ si y solo si $(i, j) \in \mathcal{E}$ y de lo contrario $a_{ij} = 0$. La matriz de adyacencias de un grafo bidireccional se define como $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \neq j$ y $\mathcal{A} = \mathcal{A}^T$. La matriz Laplaciana $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ se define como $\mathcal{L}_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij}$ y $\mathcal{L}_{ij} = -a_{ij}$. Sea $\alpha_i > 0$ si existe un enlace directo del agente líder al agente i , de lo contrario $\alpha_i = 0$ como lo reportan en [29], [30], y $\Lambda = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, entonces $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \Lambda$.

III. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Considere un sistema multiagente formado por agentes cada uno de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + Bu_i(t) + Dd_i(t), \\ y_i(t) &= Cx_i(t), \end{aligned} \quad (1)$$

en donde $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector que representa a todos los estados, el subíndice i representa el número N de agentes en el sistema, $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y_i(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas, $d_i(t) \in \mathbb{R}^d$ es el vector de perturbaciones ($i = 1, 2, \dots, N$) no son perturbaciones desvanecientes y tampoco son acopladas pero si deben estar acotadas, con matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times d}$. Las siguientes suposiciones se proponen en este trabajo:

- \mathcal{S}_1) Para cada agente se cumple que el par (A, B) es controlable.
- \mathcal{S}_2) Para cada agente se cumple que el par (A, C) es observable.
- \mathcal{S}_3) El grafo es fuertemente conectado.

Lema 4 ([29]): La matriz $\bar{\mathcal{L}}$ tiene eigenvalores no negativos. La matriz $\bar{\mathcal{L}}$ es definida positiva si y solo si el grafo \mathcal{G} es conectado y cuenta con un "árbol expandido directo" (spanning tree) indirecta (undirected graph).

En este artículo se diseña un control líder-seguidor robusto para el sistema multiagente en (1) tal que todos los agentes converjan a las trayectorias deseadas en consenso. Por lo tanto, el modelo dinámico del líder se describe a continuación:

$$\dot{x}_r(t) = Ax_r(t), \quad (2)$$

donde $x_r(t) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de estados n dimensional, $u_r(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y el subíndice r representa al agente líder. Se define al error de seguimiento para cada agente de la siguiente manera:

$$\delta_i(t) = x_i(t) - x_r(t), \quad (3)$$

entonces, se obtiene el siguiente error de seguimiento

$$\dot{\delta}_i(t) = A\delta_i(t) + Bu_i(t) + Dd_i(t). \quad (4)$$

El seguimiento del agente líder es alcanzado si se satisface que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_r(t)\| = 0, \forall i = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Por lo tanto, se propone el siguiente control basado en observador:

$$u_i(t) = K \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{\delta}_i(t) - \hat{\delta}_j(t)) + \alpha_i \hat{\delta}_i(t) \right], \quad (6)$$

donde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la ganancia del control a diseñar, $\alpha_i \geq 0$ es una constante positiva, $\hat{\delta}_i(t)$ es el vector de error de seguimiento estimado del agente i , y $\hat{\delta}_j(t)$ es el vector de error de seguimiento estimado del agente j .

El problema planteado en este artículo es diseñar un control robusto que resuelva el problema de líder-seguidor para sistemas multiagentes de la forma mostrada en (1) a partir de la estimación del error de seguimiento de los agentes locales y vecinos (4), con respecto a un agente virtual de la forma (2), cuya ley de control sea de la forma (6).

IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR BASADO EN OBSERVADOR LÍDER-SEGUIDOR

En esta sección se presenta el análisis de estabilidad utilizando el enfoque de Lyapunov para el diseño de un observador y un control líder-seguidor que son expresados como un conjunto de desigualdades matriciales lineales cuya solución permite el cálculo de las ganancias matriciales de estos.

En un escenario práctico es muy probable que no se cuente con sensores capaces de medir de forma precisa las salidas del sistema, por lo tanto, el control utiliza la estimación de estados proveída por el siguiente observador:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i(t) &= A\hat{x}_i(t) + Bu_i(t) + L_o \left(y_{\delta_i}(t) - \hat{y}_{\delta_i}(t) \right), \\ \hat{y}_{\delta_i}(t) &= C\hat{x}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\hat{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ es la estimación del vector de estados del agente i , $\hat{y}_{\delta_i}(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas estimadas, y $L_o \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es la ganancia del observador a diseñar. El error de estimación se define como $e_i(t) = \delta_i(t) - \hat{\delta}_i(t) = (x_i(t) - x_r(t)) - (\hat{x}_i(t) - x_r(t))$, por lo tanto, la dinámica del error de estimación queda descrito por:

$$\dot{e}_i(t) = (A - L_o C)e_i(t) + Dd_i(t). \quad (8)$$

Se definen los vectores $e(t) = [e_1(t)^T, e_2(t)^T, \dots, e_N(t)^T]^T$, $d(t) = [d_1(t)^T, d_2(t)^T, \dots, d_N(t)^T]^T$, por lo tanto, (8) puede ser reescrita utilizando el producto Kronecker

$$\dot{e}(t) = (I_N \otimes (A - L_o C))e(t) + (I_N \otimes D)d(t). \quad (9)$$

Al conectar el control en (6) con (7), se obtiene:

$$\dot{\delta}_i(t) = A\delta_i + BK \left(\sum_{j \in N_i} (\delta_i - \delta_j) + \alpha_i \hat{\delta}_i \right) + Dd_i, \quad (10)$$

nótese que,

$$\dot{\delta}_i = A\delta_i + BK \left(\sum_{j \in N_i} ((\delta_i - \delta_j) - (e_i - e_j) + \alpha_i(\delta_i - e_i)) \right) + Dd_i. \quad (11)$$

Se definen los vectores $\delta(t) = [\delta_1(t)^T, \delta_2(t)^T, \dots, \delta_N(t)^T]^T$, por lo tanto, (11) puede ser reescrita utilizando el producto Kronecker

$$\dot{\delta} = (I_N \otimes A)\delta + (\bar{L} \otimes BK)(\delta - e) + (I_N \otimes D)d. \quad (12)$$

Se definen los siguientes vectores $z = [\delta^T, e^T]^T$, combinando (9) y (12),

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}d, \quad (13)$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I_N \otimes A + \bar{L} \otimes BK & -\bar{L} \otimes BK \\ 0 & I_N \otimes (A - L_o C) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_N \otimes D \\ I_N \otimes D \end{bmatrix}.$$

IV.I. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DEL CONTROL

A continuación se presenta el análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado (13).

Se define la siguiente función candidata de Lyapunov como $V = z^T \text{diag}(I_N \otimes P_1, I_N \otimes P_2)z$, donde $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_1 = P_1^T > 0$ y $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 = P_2^T > 0$. La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (13) están dadas por:

$$\dot{V} = 2z^T (\text{diag}(I_N \otimes P_1, I_N \otimes P_2))\dot{z}$$

$$= 2\delta^T (I_N \otimes P_1 A + \bar{L} \otimes P_1 BK)\delta - 2\delta^T (\bar{L} \otimes P_1 BK)e + 2\delta^T (I_N \otimes P_1 D)d + 2e^T (I_N \otimes (P_2 A - P_2 L_o C))e + 2e^T (I_N \otimes P_2 D)d. \quad (14)$$

Se define el siguiente cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= [T^{-1} \otimes I_N]\delta, \\ \varphi_2 &= [T^{-1} \otimes I_N]e, \\ \varphi_3 &= [T^{-1} \otimes I_N]d, \end{aligned} \quad (15)$$

donde $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ es una transformación lineal construida a partir de los eigenvectores asociados de la matriz Laplaciana \bar{L} tal que $\bar{L} = TJT^{-1}$, con $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$. Utilizando (15) en (14), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\varphi_1^T (I_N \otimes P_1 A + \bar{L} \otimes P_1 BK)\varphi_1 - 2\varphi_1^T (\bar{L} \otimes P_1 BK)\varphi_2 + 2\varphi_1^T (I_N \otimes P_1 D)\varphi_3 + 2\varphi_2^T (I_N \otimes (P_2 A - P_2 L_o C))\varphi_2 + 2\varphi_2^T (I_N \otimes P_2 D)\varphi_3, \end{aligned} \quad (16)$$

entonces debido al Lema 4, (16) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{j=1}^N \varphi_{1j}^T \text{He}\{P_1 A + \lambda_j P_1 BK\}\varphi_{1j} - 2 \sum_{j=1}^N \varphi_{1j}^T (\lambda_j P_1 BK)\varphi_{2j} + 2 \sum_{j=1}^N \varphi_{1j}^T (P_1 D)\varphi_{3j} + \sum_{j=1}^N \varphi_{2j}^T \text{He}\{P_2 A - P_2 L_o C\}\varphi_{2j} + 2 \sum_{j=1}^N \varphi_{2j}^T (P_2 D)\varphi_{3j}. \end{aligned} \quad (16)$$

De acuerdo a la teoría de control robusto como lo reportan en [31] la ganancia L_2 de $d(t)$ a $z(t)$ debe ser menor o igual que γ , por lo tanto, la siguiente desigualdad se mantiene

$$\|z(t)\|^2 \leq \gamma^2 \|d(t)\|^2. \quad (17)$$

Considere el siguiente índice de desempeño acorde con (16):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_T &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^N \left(\varphi_{1j}(t)^T \varphi_{1j}(t) + \varphi_{2j}(t)^T \varphi_{2j}(t) - \varphi_{3j}(t)^T \varphi_{3j}(t) \right) dt, \\ \mathcal{S}_T &\leq \int_0^\infty \sum_{j=1}^N \left(\varphi_{1j}(t)^T \varphi_{1j}(t) + \varphi_{2j}(t)^T \varphi_{2j}(t) - \varphi_{3j}(t)^T \varphi_{3j}(t) + \dot{V} \right) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

La finalidad de los índices de desempeño en (18) es la de minimizar el efecto de la perturbación.

Sustituyendo (16) en (18), se define $\varphi_j(t) = [\varphi_{1j}(t)^T, \varphi_{2j}(t)^T, \varphi_{3j}(t)^T]^T$, entonces $J_T \leq \sum_{j=1}^N \varphi(t)_j^T \Omega_j \varphi(t)_j$ donde

$$\Omega_j = \begin{bmatrix} He\{P_1 A + \lambda_j P_1 B K\} + I & -\lambda_j P_1 B K & P_1 D \\ * & He\{P_2 A - P_2 L_o C\} + I & P_2 D \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

Cuando $\Omega_j < 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, N$, implica que el error de seguimiento $\delta_i(t)$ y el error de estimación $e_i(t)$ son cuadráticamente estables con una norma H_∞ delimitada por γ . El siguiente teorema brinda condiciones de desigualdad matricial lineal para ser computadas.

Teorema 1: Considere el sistema en lazo cerrado en (13), dados los eigenvalores $\lambda_j(\bar{L})$, $j = 1, 2, \dots, N$; si existen matrices $\bar{P}_1 = \bar{P}_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, N_1, M_o , y el escalar $\mu > 0$ fijo tal que la desigualdad matricial (19) se cumpla minimizando γ según (17), entonces la ganancia del observador puede ser calculada como $L_o = P_2^{-1} M_o$ y la ganancia del control como $K = N_1 \bar{P}_1^{-1}$; y se resuelve el problema de líder seguidor basado en observador robusto para el sistema multiagente (1) bajo el control (6) y el observador (7).

$$\begin{bmatrix} Q_{1j} & 0_{n \times n} & D & -\lambda_j B N_1 & 0_{n \times n} \\ * & Q_2 & P_2 D & 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ * & * & -\gamma^2 I_{m \times n} & 0_{m \times n} & 0_{m \times n} \\ * & * & * & -\mu^{-1} \bar{P}_1 & 0_{n \times n} \\ * & * & * & * & -\mu \bar{P}_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

Donde $Q_{1j} = He\{A \bar{P}_1 + \lambda_j B N_1\} + I_n$ y $Q_2 = He\{P_2 A - M_o C\} + I_n$, μ es una variable de sintonización para encontrar una posible solución y γ se describe en (17) y delimita la norma H_∞ .

Prueba: Pre y post multiplicando Ω_j por $diag(P_1^{-1}, I_{n \times n}, I_{n \times n})$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} He\{A \bar{P}_1 + \lambda_j B K \bar{P}_1\} + \bar{P}_1 \bar{P}_1 & -\lambda_j B K & D \\ * & He\{P_2 A - P_2 L_o C\} + I_{n \times n} & P_2 D \\ * & * & -\gamma^2 I_{m \times n} \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

note que (20) puede ser reescrita como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} He\{A \bar{P}_1 + \lambda_j B K \bar{P}_1\} + \bar{P}_1 \bar{P}_1 & 0_{n \times n} & D \\ * & He\{P_2 A - P_2 L_o C\} + I_{n \times n} & P_2 D \\ * & * & -\gamma^2 I_{m \times n} \end{bmatrix} + He \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda_j B K \\ 0_{n \times n} \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} [0_{n \times n} \quad I_{n \times n} \quad 0_{n \times m}] \right\} < 0. \quad (21)$$

Aplicando la relación de Young (Lema 3) en (21) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} He\{A \bar{P}_1 + \lambda_j B K \bar{P}_1\} + \bar{P}_1 \bar{P}_1 & 0_{n \times n} & D \\ * & He\{P_2 A - P_2 L_o C\} + I_{n \times n} & P_2 D \\ * & * & -\gamma^2 I_{m \times n} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -\lambda_j B K \\ 0_{n \times n} \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} \bar{P}_1 [-\lambda_j (B K)^T \quad 0_{n \times n} \quad 0_{n \times m}] + \mu^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ I_{n \times n} \\ 0_{m \times n} \end{bmatrix} \bar{P}_1^{-1} [0_{n \times n} \quad I_{n \times n} \quad 0_{n \times m}] < 0, \quad (22)$$

donde $\mu > 0$. Utilizando el complemento de Schur (Lema 2) en (22) se tiene la siguiente desigualdad como resultado:

$$\begin{bmatrix} \Theta_{1j} & 0_{n \times n} & D & -\lambda_j B K \bar{P}_1 & 0_{n \times n} & \bar{P}_1 \\ * & \Theta_2 & P_2 D & 0_{n \times n} & I_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ * & * & -\gamma^2 I_{m \times n} & 0_{m \times n} & 0_{m \times n} & 0_{m \times n} \\ * & * & * & -\mu^{-1} \bar{P}_1 & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ * & * & * & * & -\mu \bar{P}_1 & 0_{n \times n} \\ * & * & * & * & * & -I_{n \times n} \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

donde $\Theta_{1j} = He\{A \bar{P}_1 + \lambda_j B K \bar{P}_1\}$ y $\Theta_2 = He\{P_2 A - P_2 L_o C\} + I_n$. Reemplazando $N_1 = K \bar{P}_1$, $N_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $M_o = P_2 L_o$, $M_o \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en la desigualdad (23) se obtiene la desigualdad (19) por lo que el Teorema 1 queda demostrado (Q.E.D).

Observación 1: En el trabajo [27] se considera el problema de consenso de sistemas multiagentes con parámetros variantes utilizando una topología de comunicación "indirecta" donde la perturbación afecta tanto las entradas y salidas por igual. La diferencia con nuestro trabajo es que las condiciones LMIs se basan en el análisis de estabilidad donde se considera únicamente una perturbación en la entrada y que el tipo de topología de comunicación utilizada es "árbol expandido directo" (spanning tree). Además, las condiciones LMIs se obtienen a partir de la relación de Young como lo reporta [28] debido a que el control está basado en los estados estimados de un observador.

Observación 2: Para comprobar que la desigualdad (19) sea realizable se ha verificado con el trabajo presentado en [32].

V. EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección se presenta un ejemplo numérico para mostrar la efectividad de la estrategia presentada anteriormente, la cual es aplicada en un grupo de vehículos aéreos no tripulados cuyo modelo matemático se presenta a continuación:

$$\ddot{X}_i = (\cos \psi_i \sin \theta_i \cos \phi_i + \sin \psi_i \sin \phi_i) \frac{1}{m_i} T_i,$$

$$\ddot{Y}_i = (\sin \psi_i \sin \theta_i \cos \phi_i - \cos \psi_i \sin \phi_i) \frac{1}{m_i} T_i,$$

$$\ddot{Z}_i = -g + (\cos \theta_i \cos \phi_i) \frac{1}{m_i} T_i,$$

$$\ddot{\phi}_i = \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \left(\frac{J_y - J_z}{J_x} \right) + \frac{1}{J_x} R_i,$$

$$\ddot{\theta}_i = \dot{\phi}_i \dot{\psi}_i \left(\frac{J_z - J_x}{J_y} \right) + \frac{1}{J_y} P_i,$$

$$\ddot{\psi}_i = \dot{\theta}_i \dot{\phi}_i \left(\frac{J_x - J_y}{J_z} \right) + \frac{1}{J_z} Y_{wi},$$

(24)

donde X_i , Y_i y Z_i son las posiciones del agente i -ésimo en el espacio euclidiano, ϕ_i , θ_i y ψ_i son los ángulos de Euler *roll*, *pitch* y *yaw* respectivamente, T_i es el *thrust* o también llamado empuje, el cual es generado por los rotores y permite al dron elevarse, descender o mantener la posición de *hover* (posición de vuelo estática), R_i , P_i y Y_{wi} son los torques rotacionales, m_i es la masa del dron, g es la aceleración de la gravedad y J_x , J_y y J_z son los momentos de inercia con respecto a los diferentes ejes.

En [33] se encuentran las relaciones que existen entre la ley de control u_i y los ángulos deseados ϕ_{di} , θ_{di} y ψ_{di} . Se calculan los ángulos deseados de todos los drones en el sistema como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\phi_{di} &= \arctan\left(\frac{-u_{2i}}{\sqrt{u_{1i}^2 + (u_{3i} + g)^2}}\right), \\ \theta_{di} &= \arctan\left(\frac{u_{1i}}{u_{3i} + g}\right), \\ \psi_{di} &= 0.\end{aligned}\quad (25)$$

Es necesario el diseño de un controlador interno para la parte rotacional del modelo dinámico de los UAVs (24) que permita manipular los ángulos mediante (25).

Para calcular el empuje o *thrust* de los rotores de los UAVs, la entrada de la parte traslacional del sistema, se utiliza la siguiente expresión:

$$T_i = m_i \sqrt{u_{1i}^2 + u_{2i}^2 + (u_{3i} + g)^2}.\quad (26)$$

Los parámetros utilizados en las simulaciones de este modelo dinámico se muestran en la Tabla 1, que fueron tomados de [34], parámetros que pertenecen al UAV modelo *crazyflie* 2.0.

TABLA I
PARÁMETROS CORRESPONDIENTES AL DRON *CRAZYFLIE* 2.0

Símbolo	Descripción	Valor
m	Masa total	0.33 [Kg]
g	Aceleración de la gravedad	9.81 [m/s ²]
J_x	Momento de inercia en el eje x	1.657 x 10 ⁻⁵ [Kg x m ²]
J_y	Momento de inercia en el eje y	1.665 x 10 ⁻⁵ [Kg x m ²]
J_z	Momento de inercia en el eje z	2.926 x 10 ⁻⁵ [Kg x m ²]

Es necesario adaptar el protocolo de consenso aplicado a resolver control de formación (28) (u_i), para ser las entradas del modelo dinámico de los UAVs.

Para poder resolver el problema de control de formación en una flotilla de UAVs se utiliza una representación de sistemas doble integrador descritos por:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t), \\ y_{pi}(t) &= p_i(t),\end{aligned}$$

(27) y el control en (6) se modifica haciendo las siguientes consideraciones $x_i(t) = [p_i(t)^T, v_i(t)^T]^T$, $x_r(t) = [p_r(t)^T, v_r(t)^T]^T$, definiendo los vectores h_i y h_j como la configuración rígida de la formación deseada la cual se considera estática, quedando de la siguiente manera:

$$u_i(t) = K \sum_{j \in N_i} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_j(t)) + \alpha_i K (\hat{x}_i(t) - \bar{x}_r(t)),\quad (28)$$

donde K es la ganancia de control, $\hat{x}_i(t) = [\hat{p}_i(t)^T - h_i, \hat{v}_i(t)^T]^T$ es el vector de estados estimados del agente i , $\hat{x}_j(t) = [\hat{p}_j(t)^T - h_j, \hat{v}_j(t)^T]^T$ es el vector de estados estimados del agente j , y $\bar{x}_r(t) = [p_r(t)^T, v_r(t)^T]^T$ son los estados del agente virtual. La ley de control (27) puede ser reescrita como:

$$u_i(t) = K \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\hat{\delta}_i(t) - \hat{\delta}_j(t)) + \alpha_i K \hat{\delta}_i.\quad (29)$$

Conectado (27) y (29), el sistema en lazo cerrado resultante puede ser representado como (12) y de esta manera se puede utilizar el Teorema 1 para calcular las ganancias del controlador y el observador.

Observación 2: De acuerdo a [32, 33] la formación alcanzable debe satisfacer la restricción $Ah_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, N$. Satisfaciendo la restricción anterior, las ganancias del controlador y observador pueden ser calculadas utilizando el Teorema 1 para resolver el problema de control de formación líder-seguidor utilizando la ley de control (29).

De esta manera se expresa en su forma de espacio de estados el sistema doble integrador:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{p}_{xi} \\ \dot{p}_{yi} \\ \dot{p}_{zi} \\ \dot{v}_{xi} \\ \dot{v}_{yi} \\ \dot{v}_{zi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \\ v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_{p1i} \\ y_{p2i} \\ y_{p3i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{xi} \\ p_{yi} \\ p_{zi} \\ v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (30)$$

Se define $H = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$, tal que la formación deseada es un hexágono definido por:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\quad (31)$$

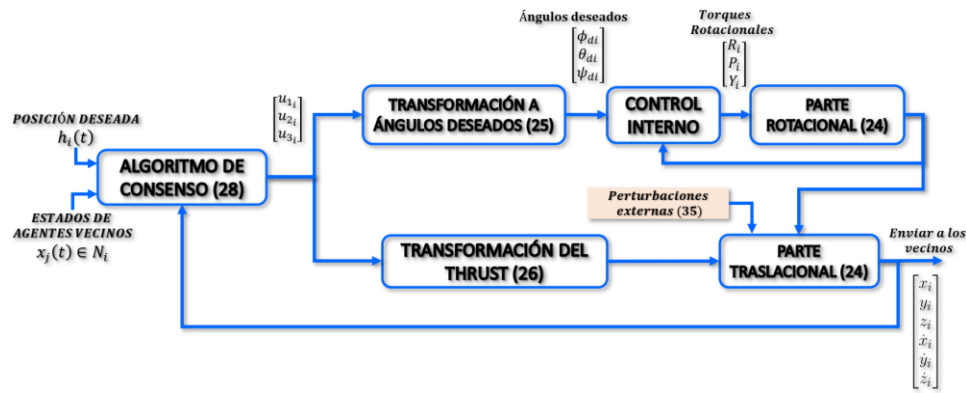


Fig. 2. Esquema de control utilizado en las simulaciones.

Las simulaciones se realizaron utilizando la dinámica no lineal mostrada en (24). Realizando las transformaciones (25) y (26) se puede considerar al modelo de los UAVs como un doble integrador y utilizar como ley de control (28) para realizar formaciones deseadas y mantener el seguimiento de un líder virtual (2) incluyendo perturbaciones externado (35).

En la Fig. 3 se muestra el primer resultado de simulación, se utiliza la ley de control de formación clásica donde para el cálculo de las ganancias del controlador y observador no se toma en cuenta la dinámica de perturbaciones. El UAV número 1, es afectado por una perturbación externa, haciendo que este se desplace de su posición deseada, y este tampoco es capaz de seguir al líder virtual. Todas las simulaciones fueron resueltas ocupando el método numérico de Euler con un paso de integración numérica igual a 0.01 Matlab.

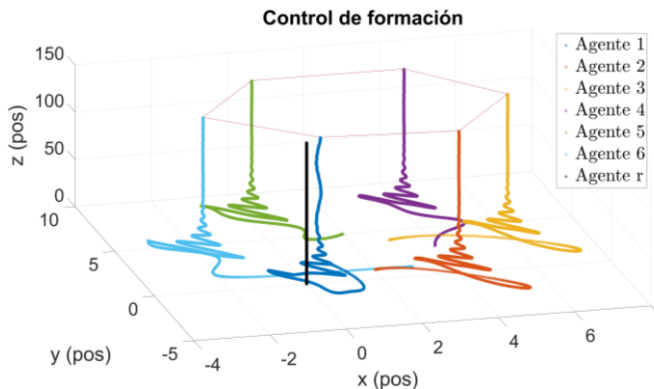


Fig. 3. Formación final en una perspectiva de 3 dimensiones.

En la Fig. 4 se ilustra la formación alcanzada en donde se aprecia claramente la deformación ocurrida en el agente perturbado comprometiendo la formación final.

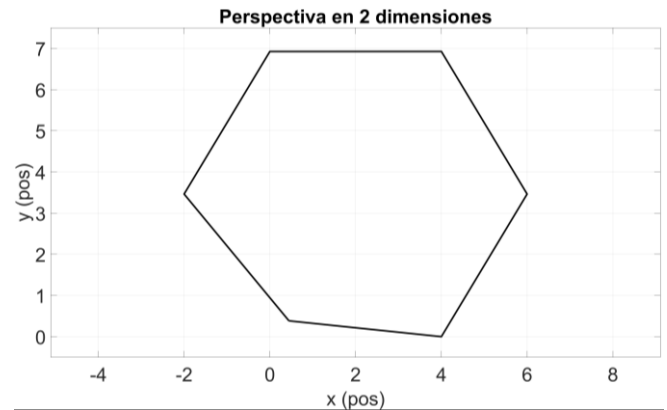


Fig. 4. Formación final en una perspectiva de 2 dimensiones.

En la Fig. 5 se muestra la formación final que alcanza el control de formación presentado en (28), implementado bajo las mismas condiciones que la simulación anterior y claramente se visualiza al agente perturbado en su posición deseada y siguiendo al agente virtual.

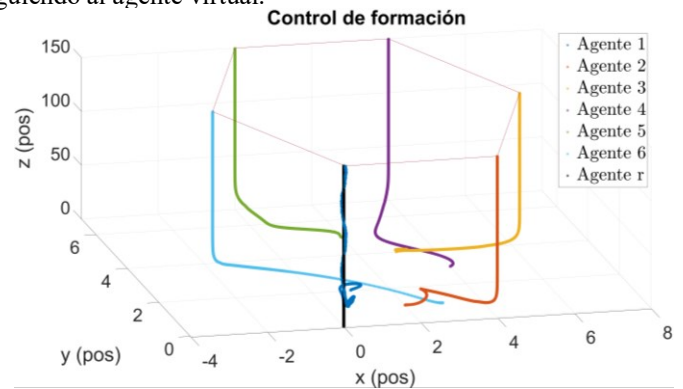


Fig. 5. Formación final en una perspectiva de 3 dimensiones.

Para comparar desde otra perspectiva ambos resultados, se muestra en la Fig. 6 la formación final en 2 dimensiones y se muestra que al contrario de la Fig. 4 en este ejemplo se alcanza la formación deseada compensando las perturbaciones.

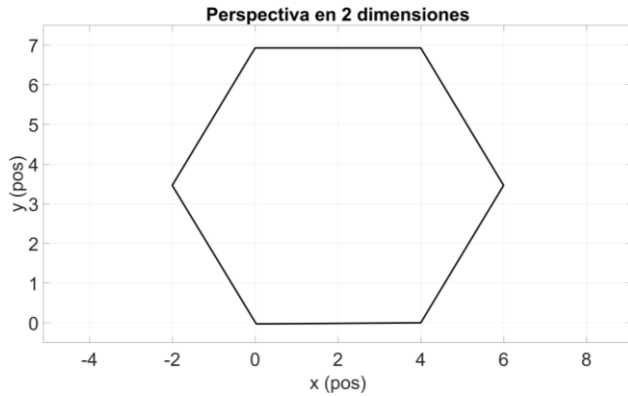


Fig. 6. Formación final en una perspectiva de 2 dimensiones.

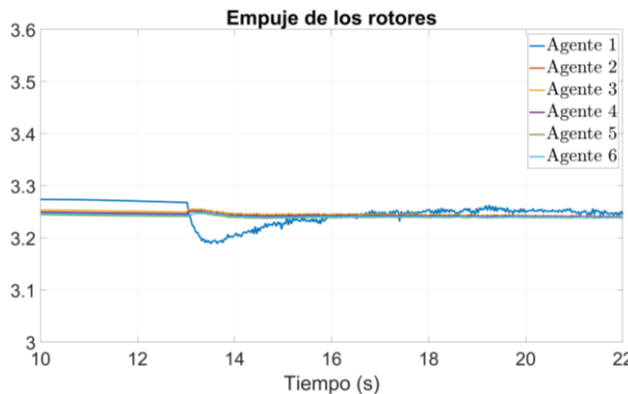


Fig. 7. Se muestra la compensación en la ley de control en presencia de perturbaciones.

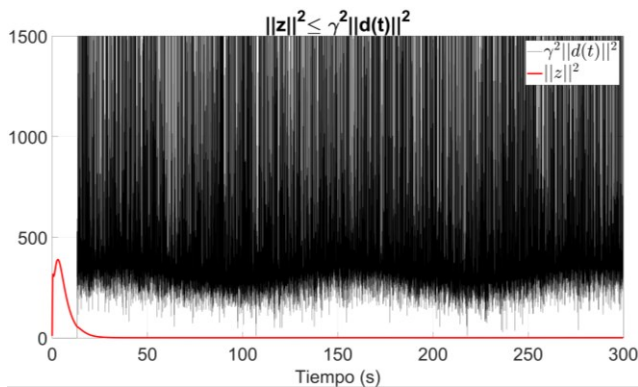


Fig. 8. Comprobación del valor funcional de γ .

En la Fig. 8 se muestra que se cumple con (17) ya que $\|z\|^2$ siempre es menor que $\gamma^2 \|d(t)\|^2$, esto quiere decir que la selección del valor de γ es correcto ya que esta variable es la que delimita la norma H_∞ . La perturbación se añade una vez que el equipo de UAVs alcanza la formación deseada, es por ello el cambio abrupto de $\gamma^2 \|d(t)\|^2$.

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un control por consenso líder-seguidor optimizado con H_∞ basado en observador para sistemas multiagentes con perturbaciones externas. Se garantiza la existencia de ganancias robustas para el controlador y el

observador al resolver las desigualdades lineales matriciales. También se comprobó la efectividad del diseño del control propuesto en (29) se ilustra en la fig. 5 mostrando simulaciones con un sistema multiagente y se realizó la comparación entre el control de formación clásico y la técnica robusta líder-seguidor basada en observador (28), mostrando que sólo la técnica propuesta es capaz de compensar perturbaciones externas manteniendo el seguimiento de un líder virtual.

REFERENCIAS

- [1] M. Saska, "Autonomous deployment of swarms of micro-aerial vehicles in cooperative surveillance," in *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2014, pp. 584–595.
- [2] W. Zheng-Jie and L. Wei, "A solution to cooperative area coverage surveillance for a swarm of MAVs," *International journal of advanced robotic systems*, vol. 10, no. 12, p. 398, 2013.
- [3] T. Tomic, "Toward a fully autonomous UAV: Research platform for indoor and outdoor urban search and rescue," *IEEE robotics & automation magazine*, vol. 19, no. 3, pp. 46–56, 2012.
- [4] X. Chen and Y. Liu, "Cooperative Task Assignment For Multi-UAV Attack Mobile Targets," in *2019 Chinese Automation Congress (CAC)*, 2019, pp. 2151–2156.
- [5] Y. Wang, W. Yan, and J. Li, "Passivity-based formation control of autonomous underwater vehicles," *IET control theory & applications*, vol. 6, no. 4, pp. 518–525, 2012.
- [6] L. F. Luque-Vega, B. Castillo-Toledo, A. Loukianov, and L. E. Gonzalez-Jimenez, "Power line inspection via an unmanned aerial system based on the quadrotor helicopter," in *MELECON 2014-2014 17th IEEE Mediterranean electrotechnical conference*, 2014, pp. 393–397.
- [7] Y. Liu and Y. Jia, "An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems," *Systems & Control Letters*, vol. 61, no. 1, pp. 148–154, 2012.
- [8] Y.-H. Chang, C.-I. Wu, and H.-W. Lin, "Adaptive distributed fault-tolerant formation control for multi-robot systems under partial loss of actuator effectiveness," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 16, no. 5, pp. 2114–2124, 2018.
- [9] K. Shojaei, "Leader-follower formation control of underactuated autonomous marine surface vehicles with limited torque," *Ocean Engineering*, vol. 105, pp. 196–205, 2015.
- [10] D. Li, S. S. Ge, W. He, G. Ma, and L. Xie, "Multilayer formation control of multi-agent systems," *Automatica*, vol. 109, p. 108558, 2019.
- [11] X. Liu, S. S. Ge, and C.-H. Goh, "Formation potential field for trajectory tracking control of multi-agents in constrained space," *International Journal of Control*, vol. 90, no. 10, pp. 2137–2151, 2017.
- [12] J. Jin, Y.-G. Kim, S.-G. Wee, and N. Gans, "Consensus based attractive vector approach for formation control of nonholonomic mobile robots," in *2015 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2015, pp. 977–983.
- [13] Y. Kuriki and T. Namerikawa, "Consensus-based cooperative formation control with collision avoidance for a multi-UAV system," in *2014 American Control Conference*, 2014, pp. 2077–2082.
- [14] J. Zhan and X. Li, "Asynchronous consensus of multiple double-integrator agents with arbitrary sampling intervals and communication delays," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 62, no. 9, pp. 2301–2311, 2015.
- [15] D. Panagou and V. Kumar, "Maintaining visibility for leader-follower formations in obstacle environments," in *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2012, pp. 1811–1816.
- [16] A. Mahmood and Y. Kim, "Leader-following formation control of quadcopters with heading synchronization," *Aerospace Science and Technology*, vol. 47, pp. 68–74, 2015.
- [17] M. He, J. Mu, and X. Mu, " H_∞ leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems under semi-Markovian switching topologies with partially unknown transition rates," *Information Sciences*, vol. 513, pp. 168–179, 2020.
- [18] X. Liu, S. S. Ge, and C.-H. Goh, "Neural-network-based switching formation tracking control of multiagents with uncertainties in constrained space," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 49, no. 5, pp. 1006–1015, 2017.

- [19] X.-X. Yang, G.-Y. Tang, Y. Li, and P.-D. Wang, "Optimal formation control for multi-agents systems with external disturbances," in *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference*, 2012, pp. 2291–2295.
- [20] Z. Sun, G. Zhang, Y. Lu, and W. Zhang, "Leader-follower formation control of underactuated surface vehicles based on sliding mode control and parameter estimation," *ISA transactions*, vol. 72, pp. 15–24, 2018.
- [21] S. Khoo, L. Xie, and Z. Man, "Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems," *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, vol. 14, no. 2, pp. 219–228, 2009.
- [22] J. A. Vazquez Trejo, D. Rotondo, M. Adam Medina, and D. Theilliol, "Observer-based event-triggered model reference control for multi-agent systems," [Online]. Available: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02901547>.
- [23] J. Guerrero-Castellanos, "Leader-Following Consensus and Formation Control of VTOL-UAVs with Event-Triggered Communications," *Sensors*, vol. 19, no. 24, p. 5498, 2019.
- [24] B. Farrera, F.-R. López-Estrada, M. Chadli, G. Valencia-Palomo, and S. Gómez-Peñate, "Distributed Fault Estimation of Multi-Agent Systems Using a Proportional-Integral Observer: A Leader-Following Application," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 30, no. 3, pp. 551–560, 2020.
- [25] A. Rodríguez-Mata, G. Flores, A. Martínez-Vásquez, Z. Mora-Felix, R. Castro-Linares, and L. Amabilis-Sosa, "Discontinuous high-gain observer in a robust control UAV quadrotor: Real-time application for watershed monitoring," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2018, 2018.
- [26] A. N. Langville and W. J. Stewart, "The Kronecker product and stochastic automata networks," *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 167, no. 2, pp. 429–447, 2004.
- [27] J. Chen, W. Zhang, Y.-Y. Cao, and H. Chu, "Observer-based consensus control against actuator faults for linear parameter-varying multiagent systems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 47, no. 7, pp. 1336–1347, 2016.
- [28] H. Kheloufi, A. Zemouche, F. Bedouhene, and M. Boutayeb, "On LMI conditions to design observer-based controllers for linear systems with parameter uncertainties," *Automatica*, vol. 49, no. 12, pp. 3700–3704, 2013.
- [29] W. Ni and D. Cheng, "Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies," *Systems & Control Letters*, vol. 59, no. 3–4, pp. 209–217, 2010.
- [30] H. Li, X. Liao, T. Huang, and W. Zhu, "Event-triggering sampling based leader-following consensus in second-order multi-agent systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 60, no. 7, pp. 1998–2003, 2014.
- [31] H. Ito, "Robust control for nonlinear systems with structured L2-gain bounded uncertainty," *Systems & control letters*, vol. 28, no. 3, pp. 167–172, 1996.
- [32] B. Sánchez, C. Cuvas, P. Ordaz, O. Santos-Sánchez, and A. Poznyak, "Full-order observer for a class of nonlinear systems with unmatched uncertainties: Joint attractive ellipsoid and sliding mode concepts," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 7, pp. 5677–5686, 2019.
- [33] J.-F. Guerrero-Castellanos, A. Vega-Alonzo, N. Marchand, S. Durand, J. Linares-Flores, and G. Mino-Aguilar, "Real-time event-based formation control of a group of VTOL-UAVs," in *2017 3rd International Conference on Event-Based Control, Communication and Signal Processing (EBCCSP)*, 2017, pp. 1–8.
- [34] J. Förster, "System identification of the crazyflie 2.0 nano quadcopter," *Institute for Dynamic Systems and Control*, Zurich 2015.
- [35] Z. Li, Z. Duan, and G. Chen, "Dynamic consensus of linear multi-agent systems," *IET Control Theory & Applications*, vol. 5, no. 1, pp. 19–28, 2011.
- [36] C. Ma and J. Zhang, "On formability of linear continuous-time multi-agent systems," *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 25, no. 1, pp. 13–29, 2012.
- [37] J. Lofberg, "YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, 2004, pp. 284–289.
- [38] F. M. Hoblit, *Gust loads on aircraft: concepts and applications*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988.



Jesús Avelino Vázquez Trejo he received the Professional Diploma degree in Electromechanical engineering with the speciality in Automation at the Technological Institute of Zacatepec (August 2012 – December 2017, Zacatepec, Morelos, México), and M.Sc. degree in electronics engineering from the

Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Cuernavaca, Mexico, in 2020. He is pursuing a Ph.D. degree in CENIDET. His current research interest includes formation control for multi-agent systems.



Manuel Adam Medina was born in Minatitlán, Mexico. He received the Professional Diploma degree in electronic engineering of instrumentation from the Minatitlán Institute of Technology, Minatitlán, in 1991, the M.Sc. degree in electronics engineering from the Centro Nacional de Investigación y Desarrollo

Tecnológico (CENIDET), Cuernavaca, Mexico, in 1995, and the Ph.D. degree in engineering from Henri Poincaré University, Nancy, France, in 2004. He is currently a Professor with the Department of Electronic Engineering, CENIDET. He is involved in fault tolerant control and fault diagnosis systems.



Juan Antonio Vázquez Trejo earned his Computer Systems Engineering bachelor's degree at the Technological Institute of Zacatepec (August 2009 – December 2013, Zacatepec, Morelos, México). He received the master degree in Automatic control at the National Research and Technological Development (CENIDET) in August 2017.

Nowdays, he is pursuing a Ph.D. degree in automatic control CENIDET. His current research interest includes multi-agent.



Carlos Daniel García-Beltrán received his professional diploma in Electronics Engineering from the San Luis Potosí University, México, in 1992, and M.Sc. degree in Electronic Engineering from the Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Cuernavaca, Morelos, México, in 1997, and a Ph.D. degree in Engineering from the

INPG, France, in 2004. He is currently professor of department of electronic engineering at the CENIDET. His research areas are intelligent control, fault diagnosis, fault tolerant control and embedded control systems.



Jarniel García Morales was born in Morelos. He received the professional diploma degree in Electromechanical Engineering from at the Technological Institute of Zacatepec, Morelos, México in 2010, and M.Sc. degree in electronics engineering from the Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Cuernavaca, Morelos, Mexico, in 2013, and a Ph.D. degree in electronics engineering from the CENIDET, Cuernavaca, Morelos, Mexico, in 2017. He is currently a Professor with the Department of Electronic Engineering, CENIDET. His research areas are control of electronic power systems, efficient energy control, efficiency analysis of internal combustion engines, and fault diagnosis systems.