

Receive Filter Design Considering a Complete Second Order Characterization

I. A. Arriaga-Trejo, *Member, IEEE*, and D. de la Rosa Gómez

Abstract—In active sensing applications, the design of sequences that improve the estimation and detection of objects in a medium is of fundamental interest. Two approaches are commonly employed to process the received data and improve range resolution as well as target detection. They involve the use of either a matched or a mismatched filter. Traditionally, the synthesis of these filters is based upon criteria that consider a partial second order characterization of the processed signals, being the only design parameter the minimization of the correlation sidelobes. This approach has proven to be adequate when strictly linear systems are used to model the scenarios under analysis. Here, we extend the synthesis approach of the receive filter when the profile to be estimated can be modeled by a widely linear system, whose output is affected with additive noise. The computation of the receive filter coefficients is based on the minimization of the peak sidelobe level (PSL) due to the correlation and complementary correlation of the processed signals. The resultant optimization problem is addressed by making use of the minimax algorithm, which can be implemented efficiently in a computer. Numerical results show that it is possible to jointly minimize the second order moments of the receive filter, however, for some scenarios a bound is reached where it is not possible to further decrease the magnitude of the correlation and complementary correlation of the filter with the probing sequence.

Index Terms—Mismatched filter, correlation, sidelobe level, sequences, optimization, widely linear system.

I. INTRODUCCIÓN

La alta integración de componentes discretos en obleas de silicio así como la capacidad de cómputo y manejo considerable de información en sistemas programables, han permitido avances tecnológicos en las telecomunicaciones inalámbricas y en los sistemas de sensado activo. En un sistema de comunicaciones inalámbrico se busca transmitir información a través de medios no guiados, como es el caso de radiación electromagnética. Uno de los principales retos en un sistema de comunicaciones es compensar los efectos del canal sobre las señales recibidas. Para ello, es común sintetizar y emplear formas de onda con propiedades matemáticas bien definidas por medio de las cuales sea posible eliminar la interferencia en recepción debido a fenómenos de multitrayectoria así como de varios usuarios presentes

[1] [2]. Mientras tanto, en los sistemas de sensado activo, se emplean ondas con el propósito de detectar objetos o discontinuidades en el medio al analizar las reflexiones que llegan a una unidad de recepción [3] - [6]. En este tipo de aplicaciones, se busca transmitir una forma de onda que permita tener una buena resolución y detección de los objetos que constituyen la escena de interés. Idealmente, el uso de un pulso de corta duración con suficiente nivel de energía permitiría alcanzar los objetivos buscados, sin embargo, en la práctica este enfoque no es factible debido a los niveles de potencia pico que tendrían que ser manejados. Es por ello que en su lugar se transmite una serie de pulsos modulados en fase o en frecuencia cuya potencia pico es menor [7]. Después de interactuar con los objetos en el medio, los pulsos reflejados hacia el receptor son procesadas para obtener un estimado del perfil de la zona iluminada. Este procedimiento se conoce como estimación de perfil por compresión de pulso. Es común encontrar en la literatura dos enfoques empleados para el diseño de filtros en sistemas de sensado activo. En uno de ellos, se busca que la señal utilizada para iluminar el área de interés posea buenas propiedades de autocorrelación. Bajo esta consideración, en el receptor se calcula la convolución entre la señal registrada por la unidad de recepción y un filtro cuya respuesta al impulso es la secuencia transmitida revertida en el tiempo. A dicho filtro se le conoce como filtro acoplado [7] - [10]. Es por ello conveniente, bajo esta perspectiva, que las formas de ondas posean una autocorrelación aperiódica del tipo impulso unitario con el propósito de evitar que lóbulos laterales pudieran ocultar objetivos presentes. La síntesis de secuencias con dichas características han sido objeto extenso de estudio debido a sus aplicaciones [2] [10] - [13]. Por otra parte, en un segundo enfoque, se busca diseñar un filtro en el receptor que minimice los lóbulos laterales de la correlación con la forma de onda transmitida, al cual se le conoce como filtro de variable instrumental o filtro desacoplado [7] [9]. Con el filtro desacoplado se tienen más grados de libertad en el diseño que con un filtro acoplado ya que no se restringe la amplitud de los coeficientes del filtro a poseer magnitud constante, además de que es posible considerar una longitud diferente a la de la secuencia de prueba. La construcción de filtros de variable instrumental en el receptor es un tema que ha sido abordado también de manera extensa en la literatura [14] - [20].

Ahora bien, como se ha señalado, la literatura dedicada al estudio de secuencias con buenas propiedades de autocorrelación así como la síntesis de filtros en recepción es amplia. No obstante, el diseño se basa en considerar únicamente un momento estadístico de segundo orden, el cual es suficiente

I. A. Arriaga-Trejo se encuentra adscrito al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) en comisión a la Universidad Autónoma de Zacatecas, Av. Jardín Juárez 147, Centro Histórico 98000, Zacatecas, Zac., México. e-mail: iaarriagatr@conacyt.mx

D. de la Rosa Gómez se encuentra adscrito a la Unidad Académica de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Zacatecas, Av. Ramón López Velarde 801, Zacatecas Centro 98000, Zacatecas, Zac., México. e-mail: delarosagd@uaz.edu.mx

Manuscrito enviado 22 de Julio de 2020 para su revisión.

para caracterizar el procesamiento lineal en el sentido estricto, siendo en este caso la correlación. Por otra parte, con los avances tecnológicos actuales ha sido posible integrar radiorreceptores completos en circuitos integrados (empleando la arquitectura de conversión directa), los cuales pueden ser configurados para operar en un rango amplio de frecuencias y con distintos anchos de banda. Sin embargo, debido a la alta integración electrónica de componentes discretos así como a procesos de manufactura es común que se acentúen fenómenos no lineales a los cuales la arquitectura de conversión directa es sensible como es el caso de fugas de corriente directa y desbalances en fase y cuadratura [21], estos últimos modelados mediante sistemas lineales en el sentido amplio (*widely linear systems* como se les refiere en la literatura especializada de habla inglesa). Así, cuando se analizan sistemas lineales en el sentido amplio es necesario llevar a cabo una caracterización completa de segundo orden de las señales bajo análisis, en este caso, la correlación y la correlación complementaria [22].

Bajo este contexto, en el trabajo presente, se considera la síntesis del filtro en recepción que minimiza los lóbulos laterales al considerar la correlación y correlación complementaria de las señales de interés. El criterio de diseño resulta de considerar un sistema lineal en el sentido amplio, situación que puede presentarse en la práctica al incluir efectos no lineales presentes en el frente analógico del receptor, como son los desbalances en fase y cuadratura [21] [23].

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección I Introducción se sitúa el contexto del problema abordado. En la Sección II se plantea el problema del diseño del filtro en recepción empleado para estimar el sistema bajo estudio. La Sección III presenta la técnica de optimización utilizada en las Secciones IV y V para llevar a cabo la síntesis del filtro en recepción, según el caso considerado. Resultados numéricos para el diseño del filtro en el receptor son incluidos en la Sección VI. Finalmente, se presentan las conclusiones en la Sección VII.

Notación. Se hace uso de caracteres en negrita como \mathbf{u} , \mathbf{v} para representar vectores columna. Para un vector \mathbf{u} los superíndices $*$, T y H se emplean para denotar el complejo conjugado, el vector transpuesto y el transpuesto conjugado de \mathbf{u} , respectivamente. La magnitud de un escalar α se indica mediante $|\alpha|$, mientras que la norma p del vector \mathbf{u} , a través de $\|\mathbf{u}\|_p$. Sean \mathbf{x} , \mathbf{y} vectores coordenados, dada una función real de varias variables reales $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la notación $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ representa al vector columna cuyos elementos son las derivadas parciales de $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ respecto a las componentes de \mathbf{x} .

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos un sistema lineal en el sentido amplio definido por las respuestas al impulso $\{h_1(n)\}_{n=-(N-1)}^{N-1}$ y $\{h_2(n)\}_{n=-(N-1)}^{N-1}$, ambas de longitud $2N - 1$, cuya salida se ve afectada por ruido aditivo $\nu(n)$ de media cero. Como se ha indicado, el sistema bajo consideración puede modelar los efectos conjuntos del medio de propagación así como desbalances en fase y cuadratura en la etapa de transmisión y recepción. Asimismo, sea $\{s(n)\}_{n=0}^{N-1}$ una secuencia compleja

de magnitud constante la cual es empleada para excitar al sistema bajo análisis. A la salida, se toma una ventana de N muestras a partir de la cual se busca estimar el coeficiente $h_1(0)$. De esta manera, si $\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ representa las N muestras recolectadas, es posible escribir la expresión que relacione la entrada con la salida mediante,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= h_1(0)\mathbf{s} + \sum_{\substack{l=-(N-1) \\ l \neq 0}}^{N-1} h_1(l)\mathbf{J}_l\mathbf{s} + \\ &+ \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} h_2(l)\mathbf{J}_l\mathbf{s}^* + \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{s} = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ y $\boldsymbol{\nu} = [\nu(0), \nu(1), \dots, \nu(N-1)]^T$. Por otra parte \mathbf{J}_l es la matriz de desplazamiento, la cual satisface $\dim \mathbf{J}_l = N \times N$ y posee la siguiente estructura,

$$\mathbf{J}_l = [\mathbf{e}_l \mathbf{e}_{l+1} \cdots \mathbf{e}_{N-1} \mathbf{0}_{N \times 1} \cdots \mathbf{0}_{N \times 1}] \quad (2)$$

con $\{\mathbf{e}_l\}$ denotando a los vectores columna de la base Euclidiana estándar para $l = 0, 1, \dots, N-1$. La matriz de desplazamiento se calcula para índices negativos a través de la relación $\mathbf{J}_{-l} = \mathbf{J}_l^T$. Luego, el problema se reduce a estimar $h_1(0)$ a partir de las muestras recolectadas a la salida del sistema. Dicha tarea puede llevarse a cabo al procesar la ventana de datos a través de un filtro \mathbf{w} de longitud N para obtener,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^H \mathbf{x} &= h_1(0)\mathbf{w}^H \mathbf{s} + \sum_{\substack{l=-(N-1) \\ l \neq 0}}^{N-1} h_1(l)\mathbf{w}^H \mathbf{J}_l \mathbf{s} + \\ &+ \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} h_2(l)\mathbf{w}^H \mathbf{J}_l \mathbf{s}^* + \mathbf{w}^H \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (3)$$

donde se propone

$$\hat{h}_1(0) = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{x}}{\mathbf{w}^H \mathbf{s}}, \quad (4)$$

como el estimado de $h_1(0)$. De (3) se observa que es necesario considerar un criterio de diseño sobre el filtro \mathbf{w} con el propósito de minimizar los términos $\mathbf{w}^H \mathbf{J}_l \mathbf{s}$ y $\mathbf{w}^H \mathbf{J}_l \mathbf{s}^*$ para evitar degradar el desempeño del estimador dado por (4). En el caso de procesamiento estrictamente lineal, es habitual encontrar el uso de dos métricas para lograr los fines buscados, siendo la minimización del lóbulo lateral integrado (ISL) o bien la minimización del pico máximo del lóbulo lateral (PSL) [7] [13]. En ambos casos el problema consiste en encontrar el mínimo de una función no lineal, reduciéndose para el criterio ISL, a la suma del cuadrado de las magnitudes de cada uno de los retardos de la correlación de las señales de interés (en este caso los términos $\mathbf{w}^H \mathbf{J}_l \mathbf{s}$). Mientras que para el criterio PSL, se minimiza el máximo de la magnitud al cuadrado de los retardos. Para los propósitos del análisis desarrollado, la métrica seleccionada es la última, debido a que con dicho enfoque se uniformiza la distribución de la magnitud de la correlación para distintos retardos y se presenta un menor número picos prominentes en algunos de ellos

[26]. Ahora bien, para el problema planteado se sigue de (4) que existen dos situaciones posibles por considerar. La primera de ellas es cuando se restringe a que $\mathbf{w} = \mathbf{s}$, en donde el problema se reduce a diseñar una secuencia $s(n)$ que posea buenas propiedades de autocorrelación y autocorrelación complementaria, esto es, un filtro acoplado. Por otra parte, si no se impone restricción alguna sobre el filtro \mathbf{w} en cuanto a la magnitud de sus componentes, entonces el problema se reduce al diseño de un filtro de variable instrumental. Es importante enfatizar que tanto en el caso del filtro acoplado como del desacoplado asociados a (1), se considera una caracterización completa de segundo orden para la secuencia y el filtro. Esto es, no sólo se busca minimizar la correlación entre \mathbf{w} y \mathbf{s} , la cual está dada por

$$r_{ws}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} w^*(n)s(n+l) \quad (5)$$

sino también su correlación complementaria,

$$\gamma_{ws}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} w^*(n)s^*(n+l) \quad (6)$$

para $l = -(N-1), -(N-2), \dots, N-1$.

III. MÉTODO MINIMAX

En distintas aplicaciones es común buscar un conjunto de valores que minimicen el valor máximo de una función respecto a otra variable concreta. Más formalmente consideremos una función $f(\mathbf{x}, w)$ que depende del vector \mathbf{x} y del parámetro real w que pertenece a un conjunto S . Naturalmente se puede buscar el valor w que maximiza f sobre el conjunto S y enseguida buscar el vector \mathbf{x} que minimiza dicho máximo. Es decir, se busca,

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{w \in S} f(\mathbf{x}, w) \quad (7)$$

Un problema de este tipo es llamado optimización minimax y los algoritmos usados para resolverlo se conocen como algoritmos minimax. En el presente trabajo consideramos el diseño de filtros acoplados y de variable instrumental. En ambos casos se requiere minimizar el máximo del lóbulo lateral. El algoritmo fundamental para el problema de optimización minimax mencionado, y que es usado en las secciones siguientes, es el llamado algoritmo de la menor norma p . Consiste en minimizar la norma L_p de la función de costo (7) para valores de p cada vez mayores. Esto es equivalente, cuando p tiende a infinito, a minimizar la norma L_∞ de la función objetivo y la norma L_∞ es el máximo de las componentes de la función en valor absoluto. El algoritmo se encuentra detallado y explicado en [26].

IV. FILTRO ACOPLADO

En esta sección se aborda el diseño de un filtro acoplado $\{s(n)\}_{n=0}^{N-1}$ de longitud N , en donde se toma en cuenta su caracterización completa de segundo orden. El criterio de minimizar el máximo del lóbulo lateral está dado por,

$$\min_{s(n)} \max_{l \in \{-(N-1), \dots, N-1\}} \left\{ \alpha_l^{(r)} |r_{ss}(l)|^2, \alpha_l^{(\gamma)} |\gamma_{ss}(l)|^2 \right\} \quad (8)$$

donde $\alpha_l^{(r)}, \alpha_l^{(\gamma)}$ son números positivos empleados para enfatizar alguna región en particular de los momentos de segundo orden a través del índice l . Asimismo, es común imponer una restricción adicional al problema de optimización, siendo que la secuencia $s(n)$ posea magnitud constante, es decir, $|s(n)| = 1$ para $n = 0, 1, \dots, N-1$. El interés por utilizar secuencias con magnitud constante (o secuencias unimodulares como se les refiere también en la literatura) radica en el hecho que poseen una potencia instantánea que no presenta excursiones que pudieran excitar regiones de saturación en componentes no lineales de la cadena de transmisión. Dicha propiedad es cuantificada a través de la razón de potencia pico a potencia promedio (PAPR). Ahora bien, es importante resaltar que (8) es una generalización del criterio propuesto en [13] para la síntesis de secuencias con buenas propiedades de autocorrelación, ya que ahí únicamente se considera la minimización de los lóbulos laterales debidos a la autocorrelación de $s(n)$. De hecho, si en (8) se hace $\alpha_l^{(\gamma)} = 0$ para $l = -(N-1), -(N-2), \dots, N-1$ se reduce a la minimización del pico del lóbulo lateral. De la misma forma, si se fijan los escalares $\alpha_l^{(r)}$ y $\alpha_l^{(\gamma)}$ a valores no nulos para un determinado conjunto de índices, el problema se reduce al diseño de secuencias con buenas propiedades estadísticas de segundo orden como se reporta en [24] - [25]. La diferencia de la propuesta en este documento radica en que la síntesis de las secuencias se basa en minimizar el pico del lóbulo lateral, mientras que en las referencias indicadas se emplea el criterio de lóbulo lateral integrado.

La optimización de (8) puede realizarse al hacer uso de algoritmos minimax [18] [26]. Para ello es conveniente escribir la función objetivo como la norma p de un vector de error. De esta manera, se define el vector $\Phi = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]^T$, el cual parametriza las fases de la secuencia de interés $s(n) = e^{i\phi_n}$ y se hace

$$\mathbf{e}_r = \left[e_{-(N-1)}^{(r)}(\Phi), e_{-(N-2)}^{(r)}(\Phi), \dots, e_{N-1}^{(r)}(\Phi) \right]^T \quad (9)$$

junto con

$$\mathbf{e}_\gamma = \left[e_{-(N-1)}^{(\gamma)}(\Phi), e_{-(N-2)}^{(\gamma)}(\Phi), \dots, e_{N-1}^{(\gamma)}(\Phi) \right]^T \quad (10)$$

donde las componentes de (9) y (10) están dadas por $e_l^{(r)}(\Phi) = \alpha_l^{(r)} |r_{ss}(\Phi, l)|^2$ y $e_l^{(\gamma)}(\Phi) = \alpha_l^{(\gamma)} |\gamma_{ss}(\Phi, l)|^2$ respectivamente, con $l = -(N-1), -(N-2), \dots, N-1$. Por consiguiente, la optimización de (8) es equivalente a minimizar la norma p del vector de error

$$\mathbf{e}(\Phi) = \left[\mathbf{e}_r^T(\Phi) \mathbf{e}_\gamma^T(\Phi) \right]^T \quad (11)$$

para $p = 1, 2, \dots$ hasta converger. Conviene señalar que de manera explícita se ha indicado que las componentes del vector de error dependen de las fases de la secuencia $s(n)$ por sintetizar. Así pues, la norma p del vector de error, la cual se denota mediante $f(\Phi) = \|\mathbf{e}(\Phi)\|_p$, puede escribirse como,

$$f(\Phi) = E_\Phi \left(\left(\frac{\|\mathbf{e}_r(\Phi)\|_p}{E_\Phi} \right)^p + \left(\frac{\|\mathbf{e}_\gamma(\Phi)\|_p}{E_\Phi} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (12)$$

con $E_{\Phi} = \|\mathbf{e}(\Phi)\|_{\infty}$. Asimismo, a partir de (12) es posible obtener una expresión para las componentes del gradiente asociado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \phi_k} &= \left(\left(\frac{\|\mathbf{e}(\Phi)_r\|_p}{E_{\Phi}} \right)^p + \left(\frac{\|\mathbf{e}(\Phi)_{\gamma}\|_p}{E_{\Phi}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \\ &\cdot \left(\sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{e_l^{(r)}(\Phi)}{E_{\Phi}} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_k} e_l^{(r)}(\Phi) + \right. \\ &\left. + \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{e_l^{(\gamma)}(\Phi)}{E_{\Phi}} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_k} e_l^{(\gamma)}(\Phi) \right) \quad (13) \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \dots, N-1$. Las sumas en (13) pueden calcularse por medio de las expresiones,

$$\begin{aligned} &\sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{e_l^{(r)}(\Phi)}{E_{\Phi}} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_k} e_l^{(r)}(\Phi) = \\ &= 2\text{Im} \left\{ s_k^* \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \alpha_l^{(r)} \beta_r(\Phi, l) r_{ss}(\Phi, l) s_{k-l} \right\} - \\ &- 2\text{Im} \left\{ s_k \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \alpha_l^{(r)} \beta_r(\Phi, l) r_{ss}(\Phi, l) s_{k+l}^* \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \left(\frac{e_l^{(\gamma)}(\Phi)}{E_{\Phi}} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_k} e_l^{(\gamma)}(\Phi) = \\ &= -2\text{Im} \left\{ s_k \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \alpha_l^{(\gamma)} \beta_{\gamma}(\Phi, l) \gamma_{ss}(\Phi, l) s_{k-l} \right\} - \\ &- 2\text{Im} \left\{ s_k \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \alpha_l^{(\gamma)} \beta_{\gamma}(\Phi, l) \gamma_{ss}(\Phi, l) s_{k+l} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

con

$$\beta_{\{r,\gamma\}}(\Phi, l) = \left(\frac{e_l^{(r,\gamma)}(\Phi)}{E_{\Phi}} \right)^{p-1} \quad (16)$$

según sea el caso. La deducción de las relaciones (14)-(15) están contenidas en el Apéndice A. Al extender el razonamiento empleado en [12] y [28] es posible evaluar cada una de las componentes dadas por (13) de manera eficiente en términos de correlaciones y correlaciones complementarias.

V. FILTRO DE VARIABLE INSTRUMENTAL

La síntesis de un filtro de respuesta al impulso finito $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{2M+N-1}]^T$ de $2M+N$ coeficientes complejos que minimice la correlación y correlación complementaria con una secuencia de longitud N es ahora abordada. A diferencia del caso anterior, donde el problema se reducía a encontrar las fases de un conjunto de exponenciales complejas (esto con el propósito de garantizar una secuencia unimodular), para el caso del filtro desacoplado se busca encontrar los coeficientes w_n los cuales no están restringidos a poseer magnitud constante para toda $n \in \{0, 1, \dots, N+2M-1\}$. Adicionalmente, con el propósito de poseer un número mayor de grados de

libertad, es común variar la longitud del filtro [7] a través del parámetro M . Existen dos variantes del problema por resolver siendo el primero caso aquel en donde la secuencia $s(n)$ es fija y es necesario encontrar únicamente el filtro \mathbf{w} que minimiza el máximo de los lóbulos laterales tomando en cuenta una caracterización completa de segundo orden. En el escenario restante, se busca encontrar de manera conjunta las fases de la secuencia $s(n)$ así como los coeficientes del filtro \mathbf{w} que satisfacen los objetivos buscados. Cada uno de estas posibilidades son consideradas a continuación.

A. Secuencia Predefinida

Cuando la secuencia $s(n)$ está fija, el problema de optimización por resolver es encontrar los componentes del vector \mathbf{w} que cumplen con,

$$\min_{\mathbf{w}} \max_l \left\{ \alpha_l^{(r)} |r_{w\bar{s}}(l)|^2, \alpha_l^{(\gamma)} |\gamma_{w\bar{s}}(l)|^2, |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}^H \bar{\mathbf{s}}|^2 \right\} \quad (17)$$

para $l = -(N+M-1), -(N+M-2), \dots, N+M-1$. Al igual que para el filtro acoplado, $r_{w\bar{s}}(l)$ y $\gamma_{w\bar{s}}(l)$, denotan la correlación y correlación complementaria del filtro con la secuencia $\bar{s}(n)$, la cual se define mediante,

$$\bar{s}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, 1, \dots, M-1 \\ s(n) & \text{si } n = M, M+1, \dots, M+N-1 \\ 0 & \text{si } n = M+N, M+N+1, N+2M. \end{cases} \quad (18)$$

El término que involucra el producto interno entre los vectores \mathbf{w} y $\bar{\mathbf{s}}$ (los cuales satisfacen $\dim \mathbf{w} = \dim \bar{\mathbf{s}} = N+2M \times 1$) en (17) se incluye con el propósito de evitar la solución trivial, $\mathbf{w} = \mathbf{0}_{N+2M \times 1}$. Ahora bien, es importante mencionar que si se fijan los escalares $\alpha_l^{(\gamma)} = 0$ para todos los posibles retardos, el problema de diseño se reduce al reportado en [17] - [19].

De la misma manera que en el caso del filtro acoplado, es posible hacer uso de algoritmos minimax para encontrar los coeficientes complejos del filtro \mathbf{w} que satisfacen el criterio (17). Para ello, es conveniente introducir el vector de error $\mathbf{e}(\mathbf{w})$, el cual está dado por,

$$\mathbf{e}(\mathbf{w}) = [\mathbf{e}_r^T(\mathbf{w}) \ \mathbf{e}_{\gamma}^T(\mathbf{w}) \ e_{w\bar{s}}(\mathbf{w})]^T \quad (19)$$

donde $\mathbf{e}_r(\mathbf{w})$ es un vector cuyas componentes son la magnitud de la correlación del filtro con la secuencia extendida $\bar{s}(n)$ y su peso asociado para cada uno de los retardos, es decir, $\alpha_l^{(r)} r_{w\bar{s}}(\mathbf{w}, l)$ con $l = -(N+M-1), -(N+M-2), \dots, N+M-1$. El vector $\mathbf{e}_{\gamma}(\mathbf{w})$ a su vez tiene por componentes a los elementos de la correlación complementaria entre el filtro y la secuencia para los mismos retardos. Finalmente, $e_{w\bar{s}}(\mathbf{w}) = |\mathbf{w}^H \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}^H \bar{\mathbf{s}}|^2$ representa la restricción impuesta con el propósito de evitar la solución trivial en los coeficientes del filtro. Como se ha indicado, el algoritmo de optimización empleado minimiza de manera iterada la norma p de (19), la cual puede escribirse en función del vector \mathbf{w} mediante,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{w}) &= E_w \left(\left(\frac{\|\mathbf{e}_r(\mathbf{w})\|_p}{E_w} \right)^p + \left(\frac{\|\mathbf{e}_{\gamma}(\mathbf{w})\|_p}{E_w} \right)^p + \right. \\ &\left. + \left(\frac{e_{w\bar{s}}(\mathbf{w})}{E_w} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (20) \end{aligned}$$

donde $E_w = \|\mathbf{e}(\mathbf{w})\|_\infty$. Es necesario advertir que (20) es una función real de varias variables complejas. Por tanto, para poder emplear las reglas de derivación de una función de varias variables reales al problema tratado, se expresan las componentes del filtro en términos de su parte real e imaginario, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_R + i\mathbf{w}_I$. De esta manera, es posible interpretar a f como una función de $2N+4M$ variables reales. Su gradiente se calcula a partir de,

$$\nabla f(\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_R} f(\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_I} f(\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I) \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde los vectores $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}_R}(\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I)$ y $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}_I}(\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I)$ contienen las derivadas parciales respecto a cada una de las componentes de \mathbf{w}_R y \mathbf{w}_I , respectivamente. Las derivadas parciales respecto a las variables $w_R^{(k)}$ se calculan a partir de,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{w}_R, \mathbf{w}_I)}{\partial w_R^{(k)}} &= \left(\left(\frac{\|\mathbf{e}_r(\mathbf{w})\|_p}{E_w} \right)^p + \left(\frac{\|\mathbf{e}_\gamma(\mathbf{w})\|_p}{E_w} \right)^p + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{e_{w\bar{s}}(\mathbf{w})}{E_w} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \left(\left(\frac{e_{w\bar{s}}(\mathbf{w})}{E_w} \right)^{p-1} \cdot \right. \\ &\cdot \left(\frac{\partial e_{w\bar{s}}(\mathbf{w})}{\partial w_R^{(k)}} \right) + \sum_{l=-(N+M-1)}^{N+M-1} \left(\frac{e_l^{(r)}(\mathbf{w})}{E_w} \right) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial e_l^{(r)}(\mathbf{w})}{\partial w_R^{(k)}} \right) + \sum_{l=-(N+M-1)}^{N+M-1} \left(\frac{e_l^{(\gamma)}(\mathbf{w})}{E_w} \right) \cdot \\ &\cdot \left. \left(\frac{\partial e_l^{(\gamma)}(\mathbf{w})}{\partial w_R^{(k)}} \right) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

para $k = 0, 1, \dots, 2M + N - 1$. El cálculo de las derivadas parciales respecto a las variables $w_I^{(k)}$ se realiza siguiendo un procedimiento similar.

B. Diseño Conjunto de Filtro y Secuencia

El caso más general consiste en sintetizar de manera conjunta la secuencia $s(n)$ de longitud N y el filtro desacoplado asociado \mathbf{w} de longitud $2M + N$. El procedimiento es similar al caso anterior, sólo que se incrementa el número de incógnitas en el problema de optimización por resolver, siendo las fases de la secuencia $s(n)$, la cual se impone que sea de magnitud constante en el dominio del tiempo discreto. Si el vector que contiene las fases de la secuencia se denota por $\Phi = [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]^T$ y se definen los vectores $\mathbf{e}_r(\Phi, \mathbf{w})$, $\mathbf{e}_\gamma(\Phi, \mathbf{w})$ así como el escalar $e_{w\bar{s}}(\Phi, \mathbf{w})$, junto con

$$\mathbf{e}(\Phi, \mathbf{w}) = [\mathbf{e}_r^T(\Phi, \mathbf{w}) \ \mathbf{e}_\gamma^T(\Phi, \mathbf{w}) \ e_{w\bar{s}}(\Phi, \mathbf{w})]^T \quad (23)$$

entonces el problema de optimización que se busca resolver está dado por,

$$\min_{\Phi, \mathbf{w}} \|\mathbf{e}(\Phi, \mathbf{w})\|_\infty. \quad (24)$$

En (24) el vector $\mathbf{e}_r(\Phi, \mathbf{w})$ satisface $\dim \mathbf{e}_r(\Phi, \mathbf{w}) = 2(2M + N) - 1 \times 1$ y sus entradas son los retardos de la correlación entre el filtro y la secuencia $s(n)$ multiplicado por su peso respectivo, esto es, sus componentes son de la forma $\alpha_l^{(r)} |r_{w\bar{s}}(l)|^2$ para $l = -(M+N-1), -(M+N-2), \dots, M+$

$N - 1$. De manera similar se define el vector $\mathbf{e}_\gamma(\Phi, \mathbf{w})$, el cual satisface $\dim \mathbf{e}_\gamma(\Phi, \mathbf{w}) = 2(2M + N) - 1 \times 1$, sólo que sus entradas son las correlaciones complementarias entre el filtro y la secuencia, esto es, $\alpha_l^{(\gamma)} |\gamma_{w\bar{s}}(l)|^2$ para $l = -(M+N-1), -(M+N-2), \dots, M+N-1$. Finalmente, el escalar $e_{w\bar{s}}(\Phi, \mathbf{w})$ es la magnitud al cuadrado de $\mathbf{w}^H \bar{s} - \bar{s}^H \bar{s}$, condición que es necesario considerar con el propósito de evitar la solución trivial para el vector \mathbf{w} . Para este escenario, al igual que en los anteriores, de manera explícita se indican los parámetros de diseño siendo los vectores Φ y \mathbf{w} .

La optimización de (24) es posible llevarla a cabo haciendo uso de algoritmos minimax, al igual que con los problemas anteriores. Siguiendo la metodología empleada, es necesario encontrar la norma p del vector $\mathbf{e}(\Phi, \mathbf{w})$, la cual conviene expresarla como,

$$f(\Phi, \mathbf{w}) = E_{\Phi, \mathbf{w}} \left\| \frac{\mathbf{e}(\Phi, \mathbf{w})}{E_{\Phi, \mathbf{w}}} \right\|_p \quad (25)$$

donde de nueva cuenta se ha hecho $E_{\Phi, \mathbf{w}} = \max \|\mathbf{e}(\Phi, \mathbf{w})\|_\infty$. El lector puede verificar que (25) tiene la misma forma que (20), difieren en el hecho de que para este caso Φ puede variar, mientras que en (20) las fases de la secuencia permanecen fijas. Como consecuencia de ello, el vector gradiente asociado a (25) debe considerar N componentes adicionales respecto al caso anterior, obteniéndose

$$\nabla f(\Phi, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial f(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}_R} \\ \frac{\partial f(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}_I} \end{bmatrix} \quad (26)$$

en este caso $\dim \frac{\partial f(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \Phi} = N \times 1$ y contiene a las derivadas parciales respecto a cada una de las fases que definen a los elementos de la secuencia $s(n)$. Las componentes del vector $\frac{\partial f(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \Phi}$, se obtienen a partir de

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \phi_k} &= (\|\mathbf{e}(\Phi, \mathbf{w})\|)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \\ &\cdot \left(\sum_{l=-(N+M-1)}^{N+M-1} \left(\frac{e_l^{(r)}(\Phi, \mathbf{w})}{E_{\Phi, \mathbf{w}}} \right)^{p-1} \frac{e_l^{(r)}(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \phi_k} + \right. \\ &+ \sum_{l=N+M-1}^{N+M-1} \left(\frac{e_l^{(\gamma)}(\Phi, \mathbf{w})}{E_{\Phi, \mathbf{w}}} \right)^{p-1} \frac{\partial e_l^{(\gamma)}(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \phi_k} + \\ &+ \left. \left(\frac{e_{w\bar{s}}(\Phi, \mathbf{w})}{E_{\Phi, \mathbf{w}}} \right)^{p-1} \frac{\partial e_{w\bar{s}}(\Phi, \mathbf{w})}{\partial \phi_k} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

para $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Las derivadas parciales respecto a la parte real e imaginaria del filtro \mathbf{w} se obtienen de (25) al considerar a las fases de la secuencia como constantes.

VI. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para ejemplificar el diseño de filtros tomando en cuenta una descripción completa de segundo orden, se consideran los siguientes escenarios.

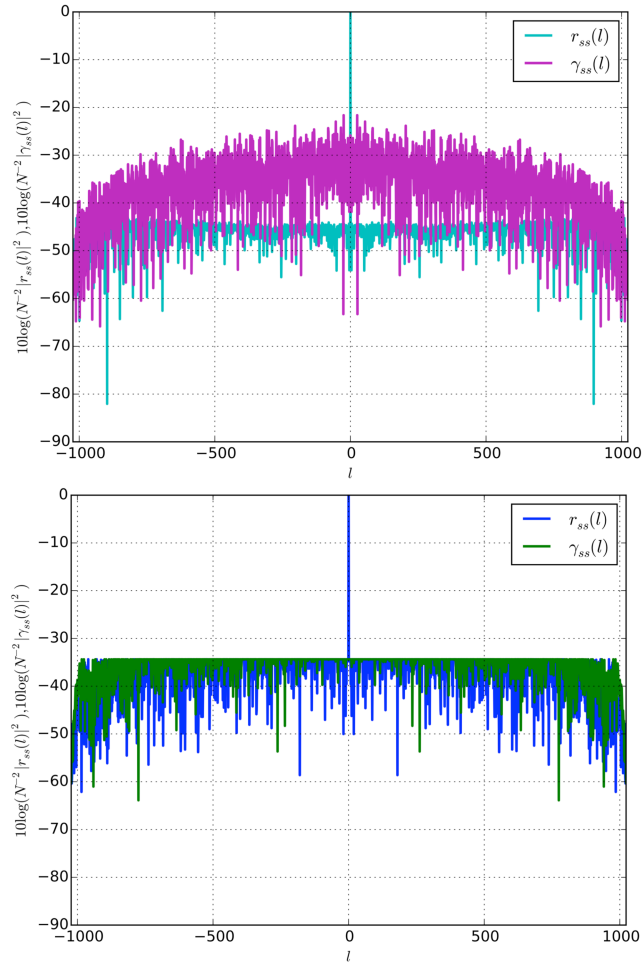


Fig. 1. (superior) Autocorrelación y autocorrelación complementaria de secuencia $s(n)$ de longitud $N = 1024$ obtenida al minimizar el criterio de ISL para $p = 4$ según [12]. (inferior) Autocorrelación y correlación complementaria de secuencia $s(n)$ de longitud $N = 1024$ que minimiza de manera conjunta los momentos de segundo orden.

A. Filtro Acoplado

La primer situación es el diseño de una secuencia $s(n)$ de magnitud constante y longitud $N = 1024$, con buenas propiedades de autocorrelación y autocorrelación complementaria. La secuencia referida se construye haciendo uso del algoritmo minimax para encontrar los valores de las fases ϕ_n que minimizan (8). Las fases iniciales consideradas, Φ_0 , se seleccionaron aleatoriamente de manera uniforme en el intervalo $[0, 2\pi)$. En cada iteración, la función objetivo se minimizó haciendo uso del algoritmo de memoria limitada L-BFGS [27]. Los momentos de segundo orden de la secuencia $s(n)$ resultante se muestra en la parte inferior de la Fig. 1. A partir de la gráfica referida es posible observar que el nivel mínimo al cual es posible reducir la correlación y la correlación complementaria para este caso es en torno de -33dB . En la gráfica superior de la Fig. 1 se muestran los momentos de segundo orden de una secuencia $s(n)$ de longitud $N = 1024$, que fue diseñada imponiendo únicamente buenas propiedades de autocorrelación (esto es $\alpha_l^{(\gamma)} = 0$ para $l = -1023, -1022, \dots, 1024$). La secuencia fue sin-

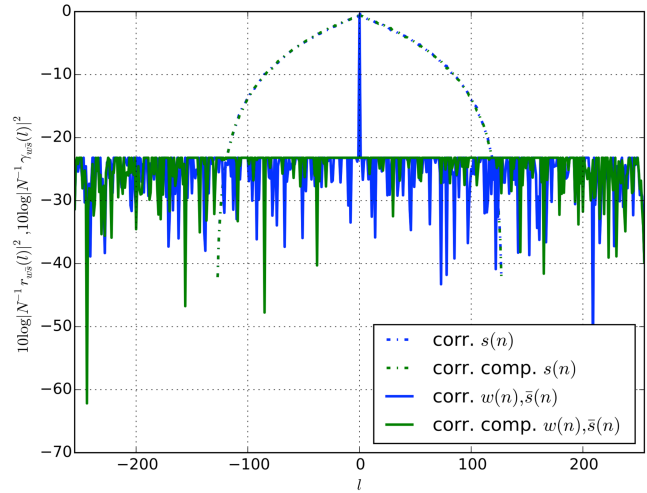


Fig. 2. Filtro desacoplado w de 384 coeficientes para secuencia $s(n)$ de longitud 128. Las fases de $s(n)$ se seleccionaron de manera aleatoria.

tetizada haciendo uso del criterio de minimizar el lóbulo lateral integrado según [12] fijando el valor de $p = 4$. Las fases iniciales consideradas fueron las mismas empleadas para construir la secuencia con una caracterización completa de segundo orden. Como puede observarse a partir de dicha gráfica, es posible disminuir los valores de la autocorrelación de manera considerable si no se impone restricción alguna sobre la correlación complementaria.

B. Filtro de Variable Instrumental

El diseño de un filtro desacoplado o de variable instrumental para una secuencia dada es abordado en este escenario, en donde se busca encontrar los coeficientes de un filtro w de longitud $N + 2M$ que minimizan (17) para una secuencia $s(n)$ de magnitud constante y longitud N . Los parámetros seleccionados fueron $N = 128$ junto con $M = N$. Para la secuencia $s(n)$ se consideraron dos casos, en el primero de ellos las fases de $s(n) = e^{i\phi_n}$ se seleccionaron de manera aleatoria en el intervalo unitario, esto es, $\phi_n \in [0, 1)$ para $n = 0, 1, \dots, 127$. En el segundo caso, las fases de la secuencia $s(n)$ se obtuvieron al utilizar el nuevo algoritmo cíclico (CAN por sus siglas en inglés) en [8]. En ambos casos, los coeficientes del filtro w se obtuvieron al aplicar el algoritmo minimax en [26] a la función de costo (20). Los pesos que definen las propiedades de segundo orden del filtro se seleccionaron como $\alpha_l^{(r)} = 1$ para $l = -383, -382, \dots, -1, 1, \dots, 383$ y $\alpha_0^{(r)} = 0$ en lo que se refiere a la autocorrelación, mientras que para la autocorrelación complementaria se hizo $\alpha_l^{(\gamma)} = 1$ para $l = -383, -382, \dots, 383$. En la Fig. 2 se muestra las estadísticas de segundo orden para la secuencia generada en el primer caso, así como el desempeño del filtro desacoplado asociado. Mientras tanto, en la Fig. 3 se muestra la autocorrelación y autocorrelación complementaria de la secuencia $s(n)$ de longitud $N = 128$ que fue generada con el algoritmo CAN. Asimismo, se muestra la correlación y correlación complementaria del filtro con la secuencia asociada para los parámetros indicados.

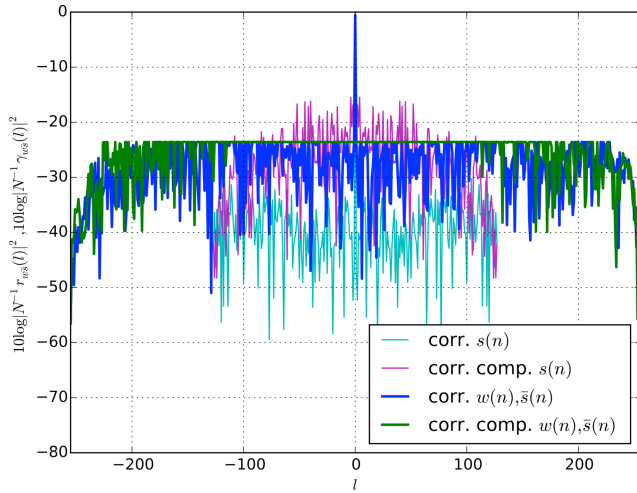


Fig. 3. Filtro desacoplado w de 384 coeficientes para secuencia $s(n)$ de longitud 128. Las fases de $s(n)$ se obtuvieron a partir del algoritmo CAN en [8].

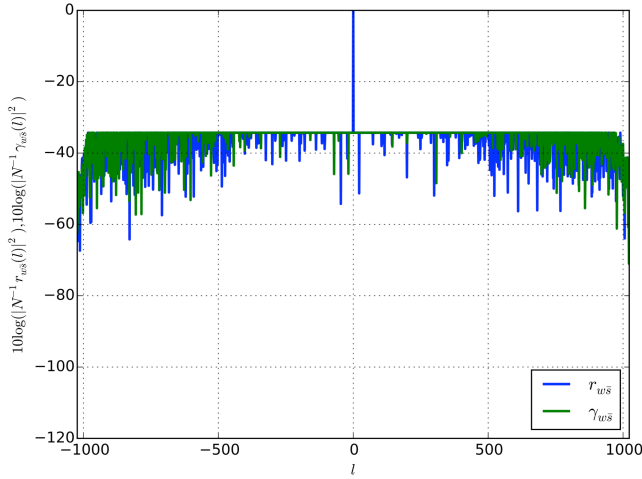


Fig. 4. Correlación y correlación complementaria normalizadas para el diseño conjunto de filtro w y secuencia $s(n)$ con $N = M = 512$.

C. Diseño Conjunto de Filtro y Secuencia

Se plantea ahora el problema de diseño conjunto, esto es, determinar los coeficientes del filtro w de longitud $N+2M$ así como sintetizar una secuencia $s(n)$ de magnitud constante y longitud N que minimicen (24), seleccionando los parámetros $N = M = 512$. Las fases iniciales de la secuencia $s(n)$ se generaron con una distribución uniforme de manera aleatoria en el intervalo $[0, 2\pi)$. Mientras que los coeficientes iniciales del filtro se seleccionaron de manera aleatoria del intervalo $[0, 1]$, tanto para la parte real como para la imaginaria. En la Fig. 4 se muestra la correlación y correlación complementaria del filtro w con la secuencia sintetizadas $s(n)$. Con propósitos de comparación, en la Fig. 5 se muestran las estadísticas de segundo orden que se obtendrían para el filtro acoplado w usando el enfoque descrito en [18]. Para este caso se consideró la misma secuencia aleatoria empleada para generar los resultados obtenidos en la Fig. 4. Tal como se aprecia de la Fig. 4 y Fig. 5 el hecho de imponer una caracterización

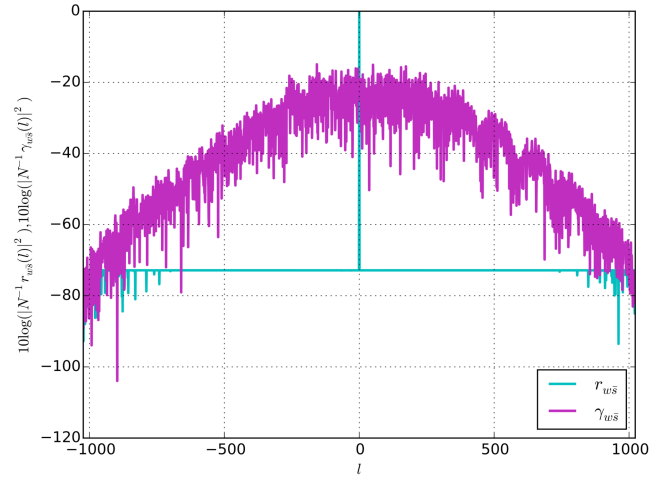


Fig. 5. Correlación y correlación complementaria normalizadas para el diseño conjunto de filtro w y secuencia $s(n)$ con $N = M = 512$ [18].

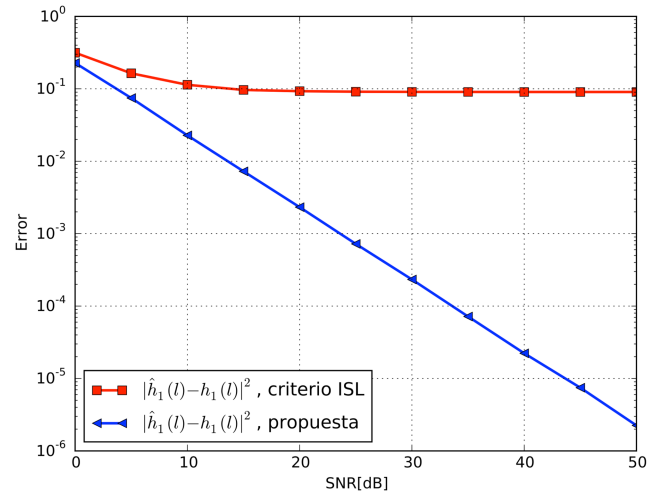


Fig. 6. Error de estimación de perfil considerado para un sistema lineal en el sentido amplio.

completa de segundo orden, limita que los niveles de la correlación y correlación complementaria del filtro con la secuencia $s(n)$ no puede ser inferior a -38dB .

D. Estimación de Perfil

Finalmente, se provee de aplicaciones de los filtros sintetizados. Se considera la estimación de la rama superior de un sistema lineal en el sentido amplio definido por las respuestas al impulso $h_1(n)$ y $h_2(n)$. Para el escenario planteado, se supone que la longitud de las respuestas al impulso que definen al sistema por identificar tienen longitud $L = 32$, mientras que la del filtro en recepción es de $N = 128$. Para el cálculo de $\hat{h}_1(l)$ se utiliza un filtro acoplado como el descrito en la Sección IV ajustando los pesos $\alpha_l^{\{r,\gamma\}}$ para asegurar buenas propiedades para la secuencia bajo una caracterización completa de segundo orden. El error de estimación para el escenario descrito se muestra en la Fig. 6, el cual resultó de promediar 100 realizaciones aleatorias del experimento. En cada ensayo, se generaron de manera aleatoria los coeficientes

de las respuestas $h_1(n)$ y $h_2(n)$ (a partir de una distribución normal, para la parte real e imaginaria). El sistema generado se excitó con la secuencia sintetizada para su identificación. La salida, la cual se ve afectada por ruido aditivo de media cero con distribución normal, se procesó con el filtro $\mathbf{w} = \mathbf{s}^*$. El error de estimación se define como $\|\mathbf{h}_1 - \hat{\mathbf{h}}_1\|_2^2$. Con fines de comparación, en la Fig. 6 se muestra el error de estimación de $h_1(n)$ cuando se emplea una secuencia con una caracterización parcial de segundo orden como en [12]. A partir de la figura referida, es posible observar el comportamiento asintótico que se obtiene en el error de estimación cuando se emplea un filtro que no considera una caracterización completa de segundo orden para estimar un sistema lineal en el sentido amplio. Dicho comportamiento se debe a que los términos $\mathbf{w}^H \mathbf{J} \mathbf{s}^*$ actúan como interferencia, independientemente de la región de razón de señal a ruido que se esté considerando. Por otra parte, se observa que cuando se emplea un filtro que posee una caracterización completa de segundo orden para la estimación de un sistema lineal en el sentido amplio bajo el escenario considerado, el error de estimación decrece conforme la relación señal a ruido incrementa.

VII. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha extendido el diseño del filtro en recepción y secuencia de prueba para la estimación de sistemas lineales en el sentido amplio, a través de considerar una caracterización completa de segundo orden para las señales de interés. La métrica empleada para la construcción del filtro y la secuencia de sondeo ha sido la de minimizar el máximo del lóbulo lateral debido a la correlación y la correlación complementaria, haciendo uso del método de optimización minimax. A partir de los experimentos numéricos realizados se recopilan los siguientes hechos,

- El problema de optimización considerado puede resolverse de manera eficiente al expresar el gradiente de la función de costo en términos de la correlación y correlación complementaria de las señales bajo consideración.
- La minimización conjunta del lóbulo lateral en el filtro de recepción impone una cota mínima en la correlación y correlación complementaria, lo cual puede inducir sesgo en el proceso de estimación del sistema bajo estudio.
- Es posible diseñar una secuencia con buena caracterización de segundo orden para un conjunto dado de retardos, la cual haga arbitrariamente pequeña la función de costo considerada.

APÉNDICE A

GRADIENTE PARA DISEÑO DE FILTRO ACOPLADO

Haciendo uso de las reglas convencionales de derivación para funciones de varias variables se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_l^{(r)}}{\partial \phi_k}(\Phi) &= 2\alpha_l^{(r)} \operatorname{Re} \{r_{ss}(\Phi, l)\} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Re} \{r_{ss}(\Phi, l)\} + \\ &+ 2\alpha_l^{(r)} \operatorname{Im} \{r_{ss}(\Phi, l)\} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Im} \{r_{ss}(\Phi, l)\} \end{aligned} \quad (28)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_l^{(\gamma)}}{\partial \phi_k}(\Phi) &= 2\alpha_l^{(\gamma)} \operatorname{Re} \{\gamma_{ss}(\Phi, l)\} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Re} \{\gamma_{ss}(\Phi, l)\} + \\ &+ 2\alpha_l^{(\gamma)} \operatorname{Im} \{\gamma_{ss}(\Phi, l)\} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Im} \{\gamma_{ss}(\Phi, l)\} \end{aligned} \quad (29)$$

Por otra parte, al emplear la regla de la cadena se obtienen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Re} \{r_{ss}(\Phi, l)\} &= -s_I^{(k)} \left(s_R^{(k+l)} + s_R^{(k-l)} \right) + \\ &+ s_R^{(k)} \left(s_I^{(k+l)} + s_I^{(k-l)} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Im} \{r_{ss}(\Phi, l)\} &= -s_I^{(k)} \left(s_I^{(k+l)} - s_I^{(k-l)} \right) + \\ &+ s_I^{(k)} \left(s_R^{(k-l)} - s_R^{(k+l)} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Re} \{\gamma_{ss}(\Phi, l)\} &= -s_I^{(k)} \left(s_R^{(k+l)} + s_R^{(k-l)} \right) - \\ &- s_R^{(k)} \left(s_I^{(k+l)} + s_I^{(k-l)} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \operatorname{Im} \{\gamma_{ss}(\Phi, l)\} &= s_I^{(k)} \left(s_I^{(k+l)} + s_I^{(k-l)} \right) - \\ &- s_R^{(k)} \left(s_R^{(k+l)} + s_R^{(k-l)} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

Al hacer uso de (30) - (31) es posible escribir (28) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_l^{(r)}}{\partial \phi_k}(\Phi) &= 2\alpha_l^{(r)} \operatorname{Im} \{r_{ss}(\Phi, l) s_k^* s_{k-l}\} - \\ &- 2\alpha_l^{(r)} \operatorname{Im} \{r_{ss}(\Phi, l) s_k s_{k+l}^*\} \end{aligned} \quad (34)$$

mientras que empleando (32) - (33) permite escribir (29) por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_l^{(\gamma)}}{\partial \phi_k}(\Phi) &= -2\alpha_l^{(\gamma)} \operatorname{Im} \{\gamma_{ss}(\Phi, l) s_k s_{k-l}\} - \\ &- 2\alpha_l^{(\gamma)} \operatorname{Im} \{\gamma_{ss}(\Phi, l) s_k s_{k+l}\} \end{aligned} \quad (35)$$

para $l = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Las expresiones (14) y (15) se siguen de (34) y (35) respectivamente.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo de I. A. Arriaga-Trejo es financiado por el proyecto 3066 de Cátedras CONACYT - “Establecimiento de un laboratorio de Telecomunicaciones Espaciales asociado a la Agencia Espacial Mexicana”.

REFERENCIAS

- [1] P. Fan and M. Darnell. *Sequence Design for Communications Applications*, Research Studies Press, 1996.
- [2] J. M. Velazquez-Gutierrez and C. Vargas-Rosales, "Sequence Sets in Wireless Communication Systems: A Survey," in *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 19, no. 2, pp. 1225-1248, 2017, doi: 10.1109/COMST.2016.2639739.
- [3] S. D. Blunt and K. Gerlach, "Adaptive pulse compression via MMSE estimation," in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 42, no. 2, pp. 572-584, April 2006, doi: 10.1109/TAES.2006.1642573.
- [4] M. Anun, A. Menara and S. A. Rodriguez Gonzalez, "Analysis, Simulation and Testing of RF Reception System of a RIR Type Radar," in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 11, no. 1, pp. 65-70, Feb. 2013, doi: 10.1109/TLA.2013.6502779.
- [5] V. H. Alves Ribeiro, G. Reynoso Meza and L. dos Santos Coelho, "Comparison of Different Classifiers for Automatic Target Recognition Systems," in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 1, pp. 13-18, 2018, doi: 10.1109/TLA.2018.8291448.
- [6] F. Rodriguez-Morales et al., "Radar Systems for Ice and Snow Measurements Onboard Manned and Unmanned Aircraft," in *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 9, pp. 2473-2480, 2018, doi: 10.1109/TLA.2018.8789571.
- [7] P. Stoica, J. Li and M. Xue, "Transmit codes and receive filters for radar," in *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 25, no. 6, pp. 94-109, November 2008, doi: 10.1109/MSP.2008.929231.
- [8] P. Stoica, H. He and J. Li, "New Algorithms for Designing Unimodular Sequences With Good Correlation Properties," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 4, pp. 1415-1425, April 2009, doi: 10.1109/TSP.2009.2012562.
- [9] W. Roberts, H. He, J. Li and P. Stoica, "Probing Waveform Synthesis and Receiver Filter Design," in *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 27, no. 4, pp. 99-112, July 2010, doi: 10.1109/MSP.2010.936724.
- [10] H. Hao, J. Li and P. Stoica, *Waveform Design for Active Sensing Systems. A Computational Approach*, Cambridge University Press, 2012.
- [11] H. He, P. Stoica and J. Li, "Designing Unimodular Sequence Sets With Good Correlations—Including an Application to MIMO Radar," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 11, pp. 4391-4405, Nov. 2009, doi: 10.1109/TSP.2009.2025108.
- [12] J. M. Baden, M. S. Davis and L. Schmieder, "Efficient energy gradient calculations for binary and polyphase sequences," 2015 IEEE Radar Conference (RadarCon), Arlington, VA, 2015, pp. 0304-0309, doi: 10.1109/RADAR.2015.7131014.
- [13] L. Zhao, J. Song, P. Babu and D. P. Palomar, "A Unified Framework for Low Autocorrelation Sequence Design via Majorization–Minimization," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 2, pp. 438-453, 15 Jan.15, 2017, doi: 10.1109/TSP.2016.2620113.
- [14] N. Levanon, "Cross-correlation of long binary signals with longer mismatched filters," in *IEEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, vol. 152, no. 6, pp. 377-382, 9 Dec. 2005, doi: 10.1049/ip-rsn:20050024.
- [15] P. Stoica, H. He and J. Li, "Optimization of the Receive Filter and Transmit Sequence for Active Sensing," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 4, pp. 1730-1740, April 2012, doi: 10.1109/TSP.2011.2179652.
- [16] O. Rabaste and L. Savy, "Mismatched filter optimization via quadratic convex programming for radar applications," 2014 International Radar Conference, Lille, 2014, pp. 1-6, doi: 10.1109/RADAR.2014.7060333.
- [17] O. Rabaste and L. Savy, "Mismatched filter optimization for radar applications using quadratically constrained quadratic programs," in *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 51, no. 4, pp. 3107-3122, Oct. 2015, doi: 10.1109/TAES.2015.130769.
- [18] L. Xu, H. Liu, K. Yin, H. Zang, S. Zhou and H. Wang, "Joint design of phase coded waveform and mismatched filter," 2015 IEEE Radar Conference, Johannesburg, 2015, pp. 32-36, doi: 10.1109/RadarConf.2015.7411849.
- [19] U. Tan, O. Rabastc, C. Adnet and J. -. Ovarlez, "A Sequence-Filter Joint Optimization," 2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Rome, 2018, pp. 2335-2339, doi: 10.23919/EUSIPCO.2018.8553260.
- [20] Uy Hour Tan. *Méthodologies de conception de formes d'onde pour radars sol. Application au cas du radar MIMO. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]*. Université Paris-Saclay, 2019 (en francés).
- [21] B. Razavi, "Design considerations for direct-conversion receivers," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 44, no. 6, pp. 428-435, 1997, doi: 10.1109/82.592569.
- [22] T. Adali, P. J. Schreier and L. L. Scharf, "Complex-Valued Signal Processing: The Proper Way to Deal With Impropriety," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 11, pp. 5101-5125, Nov. 2011, doi: 10.1109/TSP.2011.2162954.
- [23] Fa-Long, L. *Digital Front-End in Wireless Communications and Broadcasting. Circuits and Signal Processing* Cambridge University Press 2011.
- [24] I. A. Arriaga-Trejo, A. G. Orozco-Lugo and J. Flores-Troncoso, "Design of Unimodular Sequences With Good Autocorrelation and Good Complementary Autocorrelation Properties," in *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 24, no. 8, pp. 1153-1157, Aug. 2017, doi: 10.1109/LSP.2017.2696950.
- [25] A. Bose, I. A. Arriaga-Trejo, A. G. Orozco-Lugo and M. Soltanian, "Generalized Cyclic Algorithms for Designing Unimodular Sequence Sets with Good (Complementary) Correlation Properties," 2018 IEEE 10th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), Sheffield, 2018, pp. 287-291, doi: 10.1109/SAM.2018.8448920.
- [26] A. Antoniou and W. Sheng Lu, *Practical Optimization. Algorithms and Engineering Applications*, Springer, 2017.
- [27] R. H. Byrd, P. Lu and J. Nocedal, "A Limited Memory Algorithm for Bound Constrained Optimization," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 16, no. 5, 1995, pp. 1190-1208.
- [28] F. Arlery, R. Kassab, U. Tan and F. Lehmann, "Efficient gradient method for locally optimizing the periodic/apertic ambiguity function," 2016 IEEE Radar Conference (RadarConf), Philadelphia, PA, 2016, pp. 1-6, doi: 10.1109/RADAR.2016.7485309.



Israel Alejandro Arriaga-Trejo es originario de la Ciudad de México. Realizó estudios de ingeniería en telemática en el Instituto Politécnico Nacional (1998-2002), estudios de maestría en ciencia y tecnología espacial en la Universidad de Lulea, en Suecia (2005-2007). En el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (2008-2012), cursó estudios de doctorado en el área de procesamiento de señales. Actualmente es catedrático CONACYT asignado en comisión a la Universidad Autónoma de Zacatecas.



Daniel de la Rosa Gómez nació en Zacatecas, ZAC, México en 1986. Se graduó de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas en 2008. Obtuvo el master en matemáticas y aplicaciones de la Universidad Pierre y Marie Curie en París, Francia en 2011 y realizó estudios de doctorado en matemáticas en el área de campos vectoriales complejos en la Universidad Paul Sabatier en Toulouse, Francia (2015 - 2019). Actualmente es profesor investigador en la facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de Zacatecas.