

# Linear Algebra Based Control: Application to a Second Order Chained Form System

Leandro P. Rodríguez, María C. Fernández, Mabel C. Sánchez, Gustavo J. Scaglia

**Abstract**—Control of underactuated systems with non-holonomic constraints has been an issue of interest in recent years. These systems are hard to control because their linearization makes them uncontrollable and current approaches generally involve complex calculations. In this manuscript, a controller for trajectory tracking and positioning for a second-order chained form system using a simple approach based on linear algebra is proposed. The control law is formulated by setting two of the six variables trajectories, while the other four are calculated assuming the equations system has an exact solution, and ensuring the error tends to zero. The stability of the proposed control system is demonstrated through the Khalil Lemma, and simulations show the performance of the controller.

**Index Terms**—Non-holonomic system, Linear algebra, Nonlinear tracking control, Positioning.

## I. INTRODUCCIÓN

El interés en el control de sistemas subactuados con restricciones no holonómicas ha aumentado en los últimos años. Éstos son sistemas mecánicos con menos actuadores independientes que grados de libertad para ser controlados, y están relacionados con aquellos sistemas con restricciones de aceleración no integrables [1]. En este artículo es considerado el control para el seguimiento de trayectoria y el posicionamiento de un sistema encadenado de segundo orden. En general, estos sistemas son difíciles de controlar porque su linealización los transforma en sistemas no-controlables [2].

Existen varias metodologías en la literatura que abordan el diseño de controladores para este tipo de sistemas. En [3], los autores resolvieron el problema del seguimiento de trayectoria aplicando un método de tres etapas que implica transformar el sistema original en dos subsistemas en forma de cascada, utilizando una retroalimentación lineal para el primer subsistema y estabilizando exponencialmente el segundo aplicando un procedimiento de retroceso.

El Consejo Nacional de Investigación Científica y Técnica (CONICET), el Instituto de Ingeniería Química (IIQ) de la Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), CONICET, Av. Lib. San Martín Oeste 1109, San Juan J5400ARL, Argentina. (e-mail: lrodri@unsj.edu.ar).

C. Fernández, Instituto de Ingeniería Química, Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), CONICET, Av. Lib. San Martín Oeste 1109, San Juan J5400ARL, Argentina. (e-mail: mcfernandez@unsj.edu.ar).

M. Sánchez, Planta Piloto de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Sur, CONICET, Camino La Carrindanga km. 7, Bahía Blanca, Argentina. (e-mail: msanchez@plapiqui.edu.ar).

G. Scaglia, Instituto de Ingeniería Química, Universidad Nacional de San Juan (UNSJ), CONICET, Av. Lib. San Martín Oeste 1109, San Juan J5400ARL, Argentina. (e-mail: gscaglia@gmail.com).

Además, utilizaron una excitación permanente en la trayectoria de referencia para garantizar la estabilidad del sistema. Esto implica que las señales no deben converger a cero, limitando el rango de aplicaciones.

Más recientemente, otros autores desarrollaron un procedimiento de control basado en cascada para seguimiento de trayectorias de sistemas no holonómicos en forma encadenada con señales de referencia que decaen a cero exponencialmente [4].

Un enfoque diferente consiste en aplicar controladores suaves, variantes en el tiempo, para abordar el seguimiento exponencial de estos sistemas. Estas técnicas utilizan la transformación de coordenadas basada en un enfoque de diseño en cascada. En contraste con el enfoque mencionado anteriormente, no se requiere la condición de excitación en la trayectoria de referencia, sin embargo, estas leyes de control implican cálculos complejos, su diseño no es intuitivo y solo es aplicable para una clase especial de sistemas no holonómicos [5]. Otro método utilizó controladores suaves y variantes en el tiempo basados en técnicas de retroalimentación continua. Al cambiar el problema de estabilización de origen a un problema de seguimiento de trayectoria variable en el tiempo, el sistema de segundo orden encadenado puede estabilizarse en una trayectoria exponencialmente estable en un tiempo finito [6].

Además, se han empleado otras metodologías de control de modo deslizante para seguimiento de trayectoria y posicionamiento de sistemas de formas encadenadas de segundo orden no holonómicas [7,8]. Mediante el control de modo deslizante adaptativo se resolvió el problema de posicionamiento de un tipo particular de sistema no holonómico, garantizando estabilidad en el sentido de Lyapunov [9].

Recientemente, se presentó un algoritmo de planificación de movimiento basado en la extracción de holonomía [10]. A partir del análisis de controlabilidad, existe una entrada de control admisible de modo tal que el sistema se puede dirigir desde cualquier punto de equilibrio a su vecindad durante un breve periodo de tiempo.

Es importante destacar que ciertos sistemas mecánicos con aplicaciones industriales, militares, científicas y comerciales pueden transformarse en sistemas encadenados de segundo orden. Por ejemplo, algunos manipuladores planos subactuados [11] pueden transformarse en una forma encadenada de segundo orden. Otros sistemas que pueden representarse de esta forma son los buques de superficie [12]. Además, la aeronave de despegue y aterrizaje vertical planar (PVTOL) [13] puede transformarse en un sistema de igual forma al sistema encadenado de segundo orden, este sistema representa un problema desafiante de control debido a que este sistema es

subactuado y no lineal. El modelo dinámico del PVTOL tiene tres grados de libertad y dos entradas de control. Aunque este sistema en particular es un modelo simplificado, conserva las características principales que deben tenerse en cuenta al diseñar las leyes de control para un avión real.

La literatura citada previamente demuestra que existen numerosos métodos de diseño de controladores para sistemas encadenados no holonómicos y todos ellos mejoran el rendimiento del control del sistema desde un punto de vista de interés particular; sin embargo, las leyes de control resultantes son relativamente complejas de implementar. En la Tabla 1 se muestra una comparación de la metodología de control propuesta con las más metodologías relevantes.

TABLA I  
METODOLOGÍAS DE CONTROL

	LABC	Referencia [10]
<b>Restricciones</b>	Dinámicas	Dinámicas
<b>F. Canónica</b>	2° orden FE	2° orden FE
<b>Aplicación</b>	PVTOL	MS
<b>Enfoque de Control</b>	Control basado en Álgebra Lineal	PM con entradas senoidales
<b>Objetivo de Control</b>	ST y Posicionamiento	ST
	<b>Referencia [8]</b>	<b>Referencia [5]</b>
<b>Restricciones</b>	Dinámicas	Cinematicas
<b>F. Canónica</b>	2° orden FE	1° orden FE
<b>Aplicación</b>	Manipulador 3-DOF	Robot Móvil
<b>Enfoque de Control</b>	CMDIA	Procedimiento de retroceso
<b>Objetivo de Control</b>	Estabilización a través de CMDIA	ST que decaen exponencialmente a 0
	<b>Referencia [4]</b>	<b>Referencia [3]</b>
<b>Restricciones</b>	Cinematicas	Dinámicas
<b>F. Canónica</b>	1° orden FE	2° orden FE
<b>Aplicación</b>	Robot Móvil	MS
<b>Enfoque de Control</b>	DCBC	DCBRC
<b>Objetivo de Control</b>	ST	ST

Dónde: Forma Encadenada (FE); Manipulador Subactuado (MS); Planeación de Movimiento (PM); Seguimiento de Trayectorias (ST); Ecuaciones Diferenciales ordinarias (DOF); Control de Modo Deslizante Integral Adaptivo (CMDIA); Diseño del Controlador Basado en Cascada (DCBC), Diseño del Controlador Basado en Retroceso y en Cascada (DCBRC).

En este trabajo, el problema del seguimiento de trayectoria y posicionamiento de un sistema PTVOL [13], cuyo modelo general es representado a través de un sistema encadenado de segundo orden, es resuelto por medio de un controlador basado en álgebra lineal (LABC) [14]. Esta técnica de control se basa en el cálculo de acciones de control mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, se ha aplicado a una gran variedad de sistemas no lineales [15-18] y permite lograr una ley de control de fácil implementación y bajo costo computacional.

La principal contribución de este trabajo es extender la técnica LABC para resolver el problema de control para seguimiento de trayectorias y posicionamiento de un sistema PTVOL de interés industrial y científico, cuyo modelo dinámico puede ser descrito a través de un sistema encadenado de segundo orden con restricciones no holonómicas. En la técnica basada en álgebra lineal, el problema de control consiste

en resolver un sistema de ecuaciones lineales conociendo la referencia de dos de las variables de estado. El valor deseado de las restantes variables es obtenido encontrando bajo qué condiciones el sistema de ecuaciones tiene solución exacta. Estas variables reciben el nombre de sacrificadas [14].

Este artículo está organizado de la siguiente forma: en la siguiente sección se formula el sistema de segundo orden encadenado con restricciones no holonómicas, y el problema de seguimiento de trayectoria y posicionamiento del sistema propuesto es resuelto utilizando un LABC. En la sección de Resultados y Discusión es mostrado, mediante resultados de simulación, la efectividad de los controladores propuestos. Las conclusiones son dadas al final de este manuscrito.

## II. FORMULACIÓN DEL SISTEMA

Las aeronaves PVTOL pueden ser representadas, en forma general, utilizando el modelo dinámico de un sistema encadenado de segundo orden con restricciones no holonómicas. Al diseñar controladores para este tipo de sistemas se llega a la siguiente forma canónica:

$$\ddot{Y}_1 = u_1 \quad (1.1)$$

$$\ddot{Y}_2 = u_2 \quad (1.2)$$

$$\ddot{Y}_3 = \gamma_2 u_1 \quad (1.3)$$

donde  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \gamma_3]^T \in R^3$  son las coordenadas del sistema encadenado de segundo orden, y  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T \in R^2$ , siendo  $u_1$  y  $u_2$  las entradas. Transformando el sistema (1)  $S_\gamma$  en un sistema de seis ecuaciones de primer grado,  $S_x$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 \quad (2.2)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.3)$$

$$\dot{x}_4 = u_2 \quad (2.4)$$

$$\dot{x}_5 = x_6 \quad (2.5)$$

$$\dot{x}_6 = x_3 u_1 \quad (2.6)$$

donde  $x_{2i-1} = \gamma_i$ , y  $x_{2i} = \dot{\gamma}_i$ ,  $i=1,2,3$ . El vector de estados del sistema (2),  $S_x$ , es  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T \in R^6$ . Además,  $\boldsymbol{\varphi}_x = [x_{1,ref}; x_{2,ref}; x_{3,ref}; x_{4,ref}; x_{5,ref}; x_{6,ref}]^T \in R^6$  es la trayectoria de referencia. Los errores de seguimiento  $\mathbf{e} = [e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6]^T \in R^6$  son la diferencia entre los valores de referencia y las variables.

## III. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Dado el sistema  $S_x$ , el problema de control para seguimiento de trayectoria es resoluble si es posible diseñar un controlador:

$$u_1 = u_1(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_x) \quad (3)$$

$$u_2 = u_2(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_x) \quad (4)$$

tal que el sistema cerrado constituido por las ecuaciones (2) y las acciones de control (3,4) es global, uniforme y asintóticamente estable. El método de control está basado en determinar las condiciones para las que el sistema tiene una solución exacta. Conociendo el modelo del sistema, solo es necesario fijar la trayectoria deseada de  $x_1$  ( $x_{1,ref}$ ) y  $x_5$  ( $x_{5,ref}$ ) para encontrar la solución [14]. La selección de las variables  $x_1$  y  $x_5$ , para encontrar la solución no es arbitraria, sino que surge del análisis del problema. Además, al seleccionar estas variables surge el problema más demandante, ya que con una

sola acción de control se deben conseguir resultados en estas dos variables.

**Observación 1:** El problema de control para posicionamiento del sistema (2) es un caso particular del problema de control para seguimiento de trayectoria, donde  $\varphi_x$  es cero.

#### IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR

En este trabajo se propone diseñar un controlador para seguimiento de trayectoria y posicionamiento del sistema (2) que representa el modelo general del sistema PTVOL [13]. Dado un estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ , el sistema  $S_x$  debe seguir una trayectoria deseada,  $\varphi_x$ , con un error de seguimiento acotado. Para esto es necesario encontrar una ley de control capaz de generar una señal  $\mathbf{u}$  tal que las variables del sistema sigan una trayectoria de referencia definida  $\mathbf{x}_{ref}$  (en el caso de posicionamiento la referencia es un valor constante). Una de las principales ventajas de esta metodología es que conociendo el modelo del sistema, solo es necesario fijar una trayectoria deseada para las variables  $x_1$  y  $x_5$  para encontrar la solución [14].

##### A. Diseño del Controlador para Seguimiento de Trayectoria

Expresando el sistema  $S_x$ , en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 - x_4 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 - x_6 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}; \mathbf{Az} = \mathbf{b} \quad (3)$$

Para que el sistema (3), expresado como un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $\mathbf{Az}=\mathbf{b}$ , tenga solución exacta se debe cumplir que  $\mathbf{b}$  pertenezca al espacio columna de  $\mathbf{A}$ . Esta condición puede satisfacerse aún en presencia de perturbaciones que sean físicamente realizables y cumplan con el modelo, es decir, que pertenezcan al espacio columna de  $\mathbf{A}$ . Una forma de expresar lo antes mencionado es que el rango de  $\mathbf{A}$  sea igual al rango de la matriz ampliada de  $\mathbf{A}$  con el vector de términos independientes, es decir,  $\text{Rango}(\mathbf{A}) = \text{Rango}([\mathbf{A} \ \mathbf{b}])$ . Entonces se debe cumplir,

$$\dot{x}_1 - x_2 = 0 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_3 - x_4 = 0 \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_5 - x_6 = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_4 = u_2 \quad (4.5)$$

Los errores de seguimiento se definen como la diferencia entre la trayectoria de referencia y la real, de esta manera  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_5$  se expresan como [14], para que los errores de seguimiento tiendan a cero en forma exponencial:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{1,ref} + k_1(x_{1,ref} - x_1) \quad (5)$$

$$\dot{x}_5 = \dot{x}_{5,ref} + k_5(x_{5,ref} - x_5) \quad (6)$$

Luego, las variables internas  $x_{2,ez}$ ,  $x_{3,ez}$ ,  $x_{4,ez}$  y  $x_{6,ez}$  son el valor que deben tener las variables 2, 3, 4 y 6 para que el sistema (3) tenga solución exacta. Expresando  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  y  $x_6$  en función de las variables internas, las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\dot{x}_{1,ref} + k_1(x_{1,ref} - x_1) = x_{2,ez} \quad (7.1)$$

$$\dot{x}_{3,ez} + k_3(x_{3,ez} - x_3) = x_{4,ez} \quad (7.2)$$

$$\dot{x}_{5,ref} + k_5(x_{5,ref} - x_5) = x_{6,ez} \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_{3,ez} \end{bmatrix} u_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{2,ez} + k_2(x_{2,ez} - x_2) \\ \dot{x}_{6,ez} + k_6(x_{6,ez} - x_6) \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\dot{x}_{4,ez} + k_4(x_{4,ez} - x_4) = u_2 \quad (7.5)$$

siendo  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  y  $k_6$  parámetros del controlador, y  $e_1 = (x_{1,ref} - x_1)$ ,  $e_2 = (x_{2,ez} - x_2)$ ,  $e_3 = (x_{3,ez} - x_3)$ ,  $e_4 = (x_{4,ez} - x_4)$ ,  $e_5 = (x_{5,ref} - x_5)$  y  $e_6 = (x_{6,ez} - x_6)$ , los errores de seguimiento.

La condición para que la ecuación (7.4) sea una expresión válida para todo  $u_1$  es:

$$x_{3,ez} = \frac{\dot{x}_{6,ez} + k_6 e_6}{\dot{x}_{2,ez} + k_2 e_2} \quad (8)$$

**Observación 2:** Las variables  $x_2, x_3, x_4$  y  $x_6$  tienden a seguir a  $x_{2,ez}, x_{3,ez}, x_{4,ez}$  y  $x_{6,ez}$ , mientras que estas tienden a seguir a  $x_{2,ref}, x_{3,ref}, x_{4,ref}$  y  $x_{6,ref}$ .

**Observación 3:** La variable  $x_{3,ez}$  no puede ser calculada si el numerador y el denominador de la ecuación (8) tienden a cero al mismo tiempo, ya que la división es indeterminada. Evitamos este problema a través de una adecuada elección de los parámetros  $k_2$  y  $k_6$ , forzando a que el numerador tienda a cero más rápidamente que el denominador.

Aplicando el método de aproximación por mínimos cuadrados se obtiene una expresión para el cálculo de la acción de control  $u_1$ :

$$u_1 = \frac{\dot{x}_{2,ez} + k_2 e_2 + (\dot{x}_{6,ez} + k_6 e_6) x_{3,ez}}{1 + x_{3,ez}^2} \quad (9)$$

**Observación 4:** La expresión de cálculo de  $u_1$  y  $u_2$  para posicionamiento coincide con la expresión de cálculo (7.5) y (9) para seguimiento de trayectoria, siendo la trayectoria de referencia  $\varphi_x$  cero.

**Teorema 1.** Dado el sistema  $S_x$  (2) y las acciones de control (7.5, 8 y 9), si  $k_i > 0 \forall i = \{1; \dots; 6\}$  y  $k_6 > k_2$ , entonces cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{\sum_{i=1}^6 e_i^2} \rightarrow 0$ .

Demostración:

Paso 1

De las ecuaciones (4.5) y (7.5) emerge la siguiente igualdad:

$$\dot{x}_4 = \dot{x}_{4,ez} + k_4 e_4 \quad (10)$$

Operando en la ecuación anterior:

$$0 = \dot{x}_{4,ez} - \dot{x}_4 + k_4 e_4 \quad (11)$$

Dado que  $\dot{e}_4 = \dot{x}_{4,ez} - \dot{x}_4$ , se obtiene:

$$0 = \dot{e}_4 + k_4 e_4 \quad (12)$$

Paso 2

Reemplazando  $x_4 = (x_{4,ez} - e_4)$  en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\dot{x}_3 = x_{4,ez} - e_4 \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que  $x_{4,ez} = \dot{x}_{3,ez} + k_3 e_3$ , la ecuación (13) es reescrita como:

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_{3,ez} + k_3 e_3 - e_4 \quad (14)$$

El error de seguimiento  $\dot{e}_3$  es definido como  $\dot{e}_3 = \dot{x}_{3,ez} - \dot{x}_3$ . Reordenando la ecuación anterior:

$$0 = \dot{e}_3 + k_3 e_3 - e_4 \quad (15)$$

Paso 3

A partir de las ecuaciones (2.2) y (9) se puede escribir la siguiente igualdad:

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_{2,e_z} + k_2 e_2 + (\dot{x}_{6,e_z} + k_6 e_6) x_{3,e_z}}{1 + x_{3,e_z}^2} \quad (16)$$

Despejando el término  $\dot{x}_{6,e_z} + k_6 e_6$  de la ecuación (8) y reemplazando en la ecuación (16):

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_{2,e_z} + k_2 e_2 + (\dot{x}_{2,e_z} + k_2 e_2) x_{3,e_z}^2}{1 + x_{3,e_z}^2} \quad (17)$$

Reordenando la ecuación anterior:

$$\dot{x}_2 = \frac{(\dot{x}_{2,e_z} + k_2 e_2)(1 + x_{3,e_z}^2)}{1 + x_{3,e_z}^2} \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{e}_2 = \dot{x}_{2,e_z} - \dot{x}_2$ , entonces:

$$0 = \dot{e}_2 + k_2 e_2 \quad (19)$$

Paso 4

Reemplazando  $x_2 = (x_{2,e_z} - e_2)$  en la ecuación (2.1):

$$\dot{x}_1 = x_{2,e_z} - e_2 \quad (20)$$

Y teniendo en cuenta  $x_{2,e_z}$  definido en la ecuación (7.1) se obtiene:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{1,ref} + k_1 e_1 - e_2 \quad (21)$$

Definiendo  $\dot{e}_1 = \dot{x}_{1,ref} - \dot{x}_1$  y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\dot{e}_1 + k_1 e_1 = e_2 \quad (22)$$

Paso 5

Reemplazando  $x_3 = (x_{3,e_z} - e_3)$  en la ecuación (2.6):

$$\dot{x}_6 = (x_{3,e_z} - e_3) u_1 \quad (23)$$

A partir de las ecuaciones (8) y (9):

$$x_{3,e_z} u_1 = \dot{x}_{6,e_z} + k_6 e_6 \quad (24)$$

Sustituyendo  $x_{3,e_z} u_1$  de la ecuación (24) en la ecuación (23):

$$\dot{x}_6 = \dot{x}_{6,e_z} + k_6 e_6 - e_3 u_1 \quad (25)$$

Definiendo  $\dot{e}_6 = \dot{x}_{6,e_z} - \dot{x}_6$  y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\dot{e}_6 + k_6 e_6 = e_3 u_1 \quad (26)$$

De la ecuación (7.4),  $u_1 = \dot{x}_{2,e_z} + k_2 e_2$ , y sustituyendo en la ecuación (26), surge:

$$\dot{e}_6 + k_6 e_6 = e_3 (\dot{x}_{2,e_z} + k_2 e_2) \quad (27)$$

Luego, teniendo en cuenta que  $\dot{x}_{2,e_z} = \dot{x}_{1,ref} + k_1 \dot{e}_1$ , la ecuación anterior es reescrita:

$$\dot{e}_6 + k_6 e_6 = e_3 (\dot{x}_{1,ref} + k_1 \dot{e}_1 + k_2 e_2) \quad (28)$$

A partir de la ecuación (22),  $\dot{e}_1 = e_2 - k_1 e_1$ , y reemplazando en la ecuación (28) se obtiene:

$$\dot{e}_6 + k_6 e_6 = e_3 (\dot{x}_{1,ref} + k_1 (e_2 - k_1 e_1) + k_2 e_2) \quad (29)$$

Paso 6

Reemplazando  $x_6 = (x_{6,e_z} - e_6)$  en la ecuación (2.5):

$$\dot{x}_5 = x_{6,e_z} - e_6 \quad (30)$$

Como se definió en la ecuación (7.3),  $x_{6,e_z} = \dot{x}_{5,ref} + k_5 e_5$ , y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\dot{x}_5 = \dot{x}_{5,ref} + k_5 e_5 - e_6 \quad (31)$$

Definiendo  $\dot{e}_5 = \dot{x}_{5,ref} - \dot{x}_5$ , y operando la ecuación (31) se obtiene:

$$\dot{e}_5 + k_5 e_5 = e_6 \quad (32)$$

Las ecuaciones (12, 15, 19, 22, 29 y 32) pueden ser escritas de acuerdo a las ecuaciones (5.32) y (5.33) de la página 221 de la referencia [21], con  $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  y  $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}_2)$ , siendo  $\mathbf{x}_1 = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}$  y  $\mathbf{x}_2 = \{x_3, x_4\}$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_5 \\ \dot{e}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Psi \end{bmatrix} \quad (33)$$

donde  $\Psi = \dot{x}_{1,ref} + k_1 (e_2 - k_1 e_1) + k_2 e_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_3 & 1 \\ 0 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Luego, si todos los  $k_i$   $i=1; \dots; 6$  son positivos, de acuerdo con el Lema de la estabilidad de Khalil [19],  $S_x$  es global, uniforme y asintóticamente estable y la condición de  $\sqrt{\sum_{i=1}^6 e_i^2} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  es satisfecha.

**Observación 5.** Se puede realizar seguimiento de trayectorias con referencias no lineales, lineales, constantes y posicionamiento manteniendo las siguientes condiciones sobre los parámetros del controlador:  $k_i > 0 \forall i = \{1; \dots; 6\}$ ,  $k_5 > k_1$  y  $k_6 > k_2$ .

### B. Ajuste de los Parámetros del Controlador

La combinación de los parámetros del controlador  $k_i$  que minimiza el error acumulado,  $E_T$  es calculada a través del algoritmo de Monte Carlo. Esta metodología consiste en simular el proceso  $N$  veces usando valores aleatorios de  $k_i$  y ha sido ampliamente utilizada en bibliografía [20], [21], [22]:

$$N \geq \left\lceil \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log \frac{1}{1-\varepsilon}} \right\rceil \quad (35)$$

donde  $\delta$  es el límite de confianza y  $\varepsilon$  la precisión.

Luego, se introduce el error total como:

$$E_T = \sum_{i=1}^6 \int_0^{t_f} \|(x_{i,ref} - x_i) / (x_{i,ref})\| dt \quad (36)$$

Los valores de  $k_i$  se eligen de forma tal que minimizan el error total. La ecuación anterior es la función objetivo que se minimiza con el algoritmo de Monte Carlo.

### C. Implementación del Controlador

El diagrama del controlador se muestra en la Figura 1 y el procedimiento matemático es el siguiente.

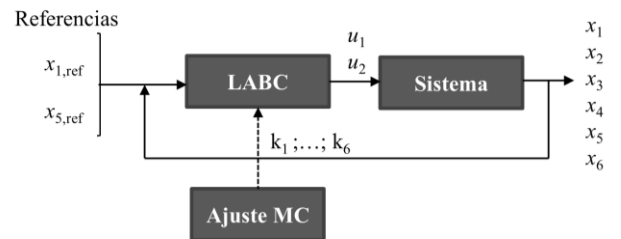


Fig. 1. Diagrama del controlador.

Paso 1: Definir la trayectoria de referencia  $\mathbf{x}_{ref}$ .

Paso 2: Definir y calcular las variables sacrificadas  $x_{2,e_z}$ ;  $x_{3,e_z}$ ;  $x_{4,e_z}$  y  $x_{6,e_z}$ .

Paso 3: Calcular las acciones de control  $u_1$  y  $u_2$ .

Paso 4: Ajustar el controlador.

## V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se observa a través de simulación el desempeño de los controladores propuesto para un sistema PVTOL cuyo modelo genérico es representado a través del

sistema de ecuaciones (2). En el primer test se analiza el controlador para seguimiento de trayectoria. En el segundo test se verifica el desempeño de los controladores para posicionamiento. En ambos test los controladores deben cumplir con requerimientos de sobretiro máximo permitido.

A. Ensayo para Seguimiento de Trayectoria

En esta sección se muestra como el controlador propuesto es capaz de calcular una ley de control que permita seguir efectivamente la trayectoria de referencia,  $\varphi_x$ , satisfaciendo un sobretiro máximo permitido  $\pm 0.5$  m para las variables  $x_1, x_3$  y de  $\pm 0.5$  m/s para las variables  $x_2, x_4$ , mientras que es de  $\pm 0.5$  rad para  $x_5$  y  $\pm 3$  rad/s para  $x_6$ , y un tiempo de estabilización menor a los 10 segundos.

Dicha  $\varphi_x$  fue simulada considerando un tiempo final de 40 segundos,  $\mathbf{x}(0) = \{-0.5, 1.4, -2.5, 0.25, 1, -0.2\}$  y  $\mathbf{x}_{ref}(0) = \{-0.25, 1.25, -2, 1.5, -0.65\}$ . Se fijaron trayectorias senoidales para las variables del sistema, de forma tal que  $\dot{x}_{2,ref} = 0.8 \cos(\frac{\pi}{5}t)$  y  $\dot{x}_{4,ref} = 0.8 \sin(\frac{\pi}{5}t)$ . Los parámetros del controlador son ajustados utilizando el algoritmo de Monte Carlo, donde  $\delta = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$ , resultando  $N = 1000$  para este problema. A lo largo de las N simulaciones, todos los parámetros del controlador cambian aleatoriamente en un rango  $\pm 15\%$  de su valor original al mismo tiempo, teniendo en cuenta que  $k_i > 0 \forall i = \{1; \dots; 6\}$ ,  $k_5 > k_1$  y  $k_6 > k_2$ . Las soluciones fueron encontradas después de 84.62 segundos utilizando un procesador Quad-Core Intel Core i7 con 16 GB de memoria RAM. Las figuras 2-7 muestran las trayectorias de las variables 1-6, donde las trayectorias de referencia son alcanzadas antes de los 5 segundos. Las variables  $x_1$  y  $x_3$  están expresadas en [m],  $x_2$  y  $x_4$  en [m/s], mientras que  $x_5$  en radianes y  $x_6$  en [rad/s].

Las figuras 8 y 9 la evolución de las acciones de control  $u_1$  y  $u_2$ , que están expresadas en [m/s<sup>2</sup>].

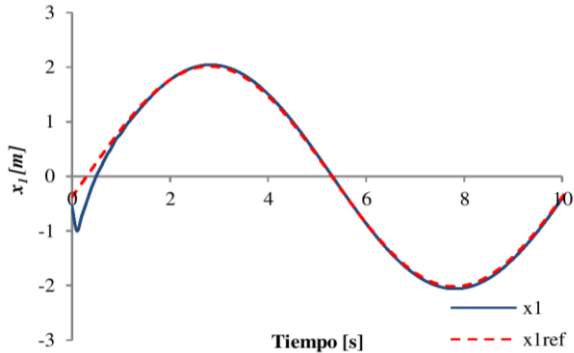


Fig. 2. Trayectoria de la variable  $x_1$ .

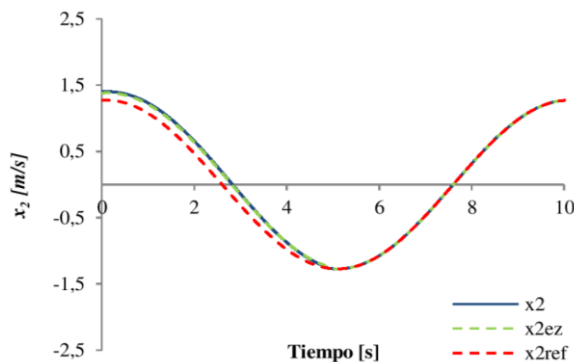


Fig. 3. Trayectoria de la variable  $x_2$ .

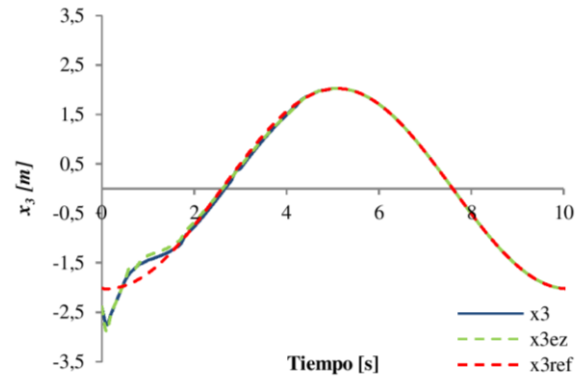


Fig. 4. Trayectoria de la variable  $x_3$ .

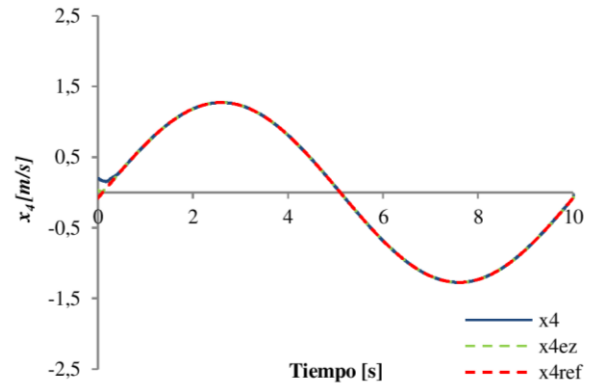


Fig. 5. Trayectoria de la variable  $x_4$ .

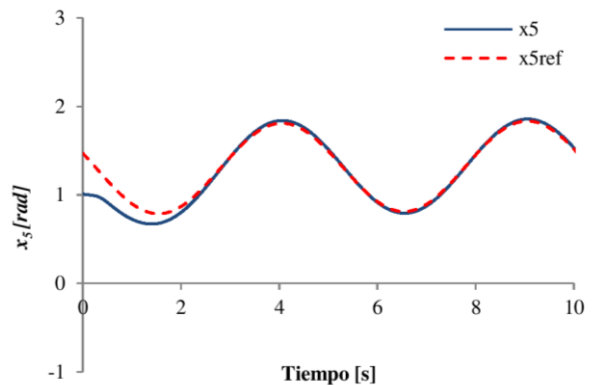


Fig. 6. Trayectoria de la variable  $x_5$ .

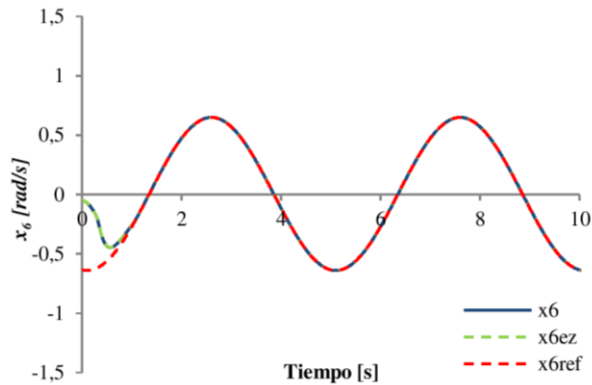


Fig. 7. Trayectoria de la variable  $x_6$ .

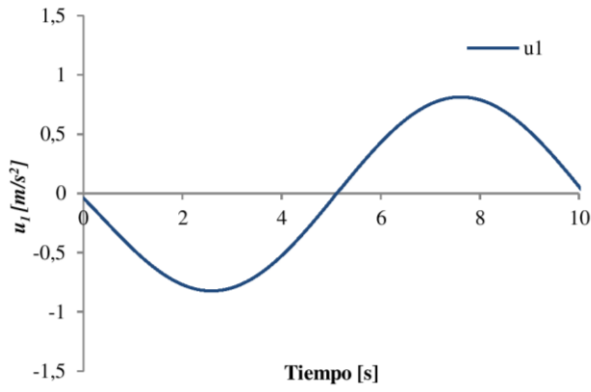


Fig. 8. Evolución de  $u_1$  en el tiempo.

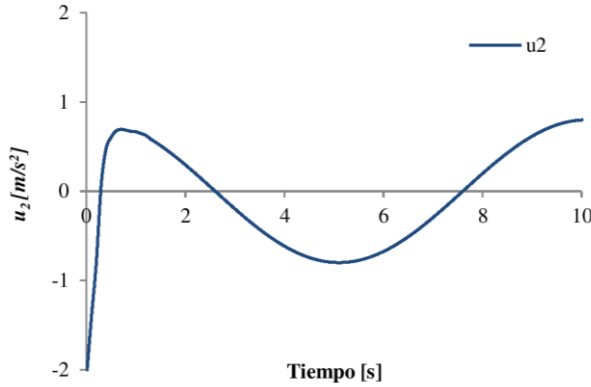


Fig. 9. Evolución de  $u_2$  en el tiempo.

**B. Ensayo para Posicionamiento**

En esta sección se mostrará como el controlador propuesto es capaz de calcular una ley de control para posicionamiento a cero de las variables del sistema, satisfaciendo un sobretiro máximo permitido de  $\pm 0.3$  m para las variables  $x_1, x_3$  y de  $\pm 3$  m/s para las variables  $x_2, x_4$ , mientras que es de  $\pm 0.3$  rad para  $x_5$  y  $\pm 3$  rad/s para  $x_6$ , y un tiempo máximo de estabilización de 40 segundos. El sistema de control se simuló considerando un tiempo final de 40 segundos y un estado inicial  $\mathbf{x}(0) = \{5, 0, 0, 0, 0.5, 0\}$ . Los valores de los parámetros del controlador fueron ajustados utilizando el algoritmo de Monte Carlo, donde  $\delta = 0.01$ ,  $\varepsilon = 0.005$ , resultando  $N = 1000$  y teniendo en cuenta que  $k_i > 0 \forall i = \{1; \dots; 6\}$ ,  $k_5 > k_1$  y  $k_6 > k_2$ . Las soluciones fueron encontradas después de 342.51 segundos utilizando un procesador Quad-Core Intel Core i7 con 16 GB de memoria RAM. Las figuras 10-15 muestran la trayectoria de las variables 1-6. Las variables  $x_1$  y  $x_3$  están expresadas en [m],  $x_2$  y  $x_4$  en [m/s], mientras que  $x_5$  en radianes y  $x_6$  en [rad/s]. Las figuras 16 y 17 muestran la evolución de las acciones de control  $u_1$  y  $u_2$  expresadas en [m/s<sup>2</sup>].

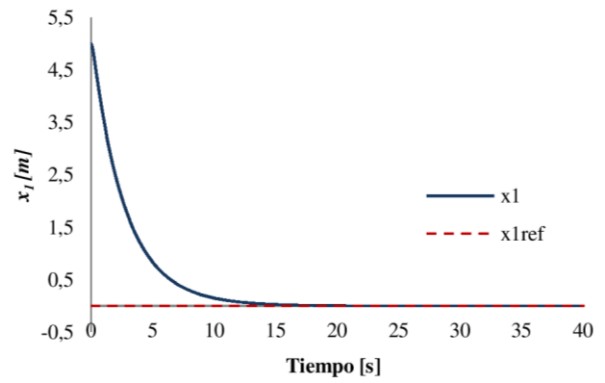


Fig. 10. Trayectoria de la variable  $x_1$ .

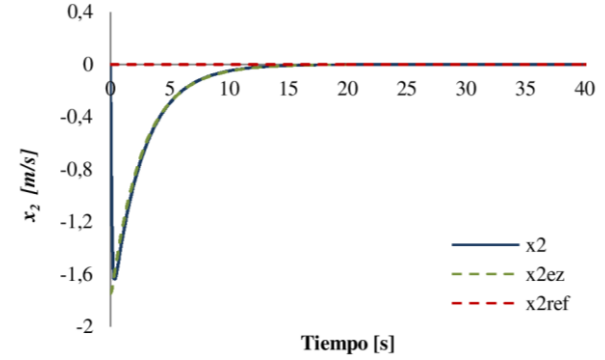


Fig. 11. Trayectoria de la variable  $x_2$ .

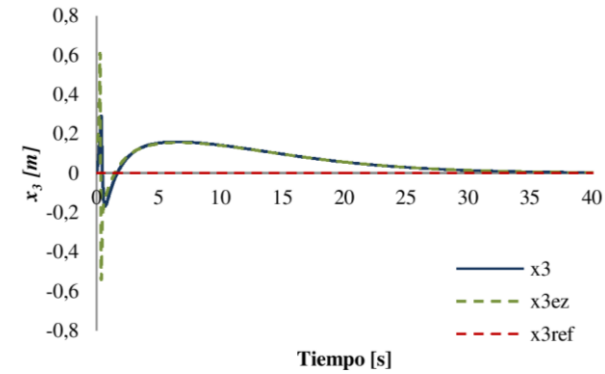


Fig. 12. Trayectoria de la variable  $x_3$ .

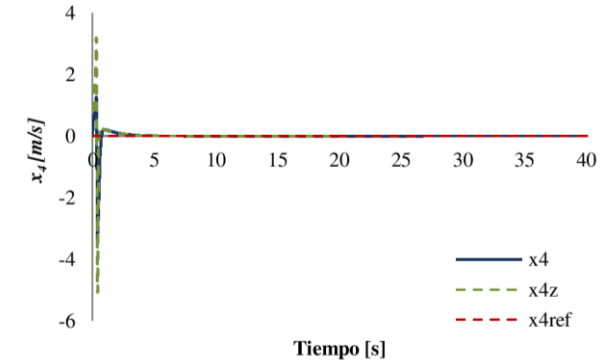
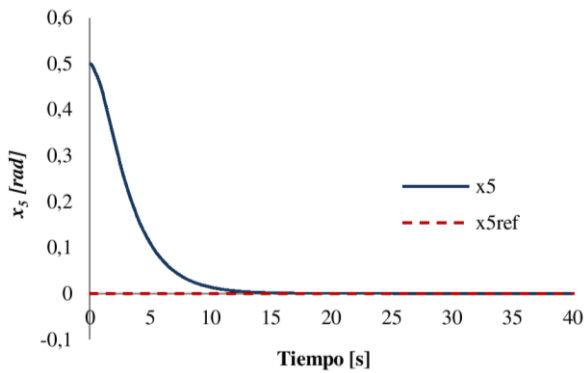
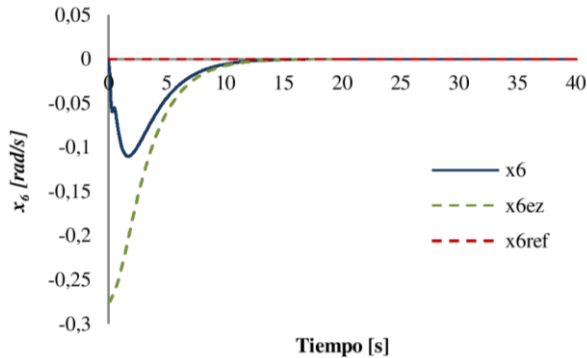
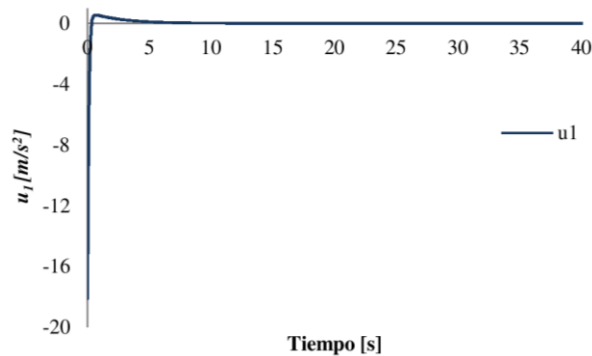
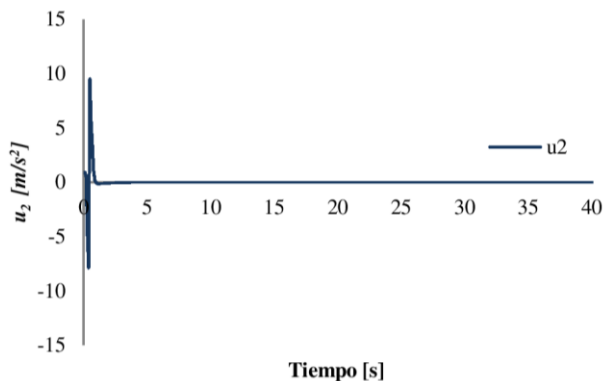


Fig. 13. Trayectoria de la variable  $x_4$ .

Fig. 14. Trayectoria de la variable  $x_5$ .Fig. 15. Trayectoria de la variable  $x_6$ .Fig. 16. Evolución de  $u_1$  en el tiempo.Fig. 17. Evolución de  $u_2$  en el tiempo.

## VI. CONCLUSIONES

La principal contribución de este trabajo es la extensión de la técnica de control LABC para el seguimiento de trayectoria y el posicionamiento de un sistema PTVOL cuyo modelo general

puede ser representado a través de un sistema encadenado de segundo orden. Este controlador se basa en determinar las condiciones necesarias para las cuales el modelo del sistema tiene una solución exacta. Las variables  $x_1$  y  $x_5$  se establecen como referencias, mientras que  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  y  $x_6$ , son las variables sacrificadas para que los errores de seguimiento vayan a cero. Los parámetros del controlador fueron ajustados utilizando el algoritmo de Monte Carlo.

Como se ve observa en los resultados de simulación, la ley de control propuesta lleva a cero los errores de seguimiento de trayectoria, tal como se propuso en el Teorema 1. Cuando el estado inicial del sistema está alejado de la referencia establecida, el sistema es estabilizado antes del límite de tiempo establecido dentro de las especificaciones del máximo sobretiro permitido. Por otro lado, cuando el estado inicial del sistema es cercano a la trayectoria de referencia establecida, el tiempo de estabilización es menor y el sobretiro es más acotado.

Una ventaja importante del controlador propuesto es la baja carga computacional de las operaciones matemáticas requeridas y su sencilla implementación en cualquier lenguaje de programación. Además, la metodología propuesta para el diseño del controlador puede aplicarse a otros tipos de sistemas.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo contó con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), del Instituto de Ingeniería Química (IIQ) de la UNSJ y de la Universidad Nacional del Sur.

## REFERENCES

- [1] N. P. I. Aneke, "Control of underactuated mechanical systems," PhD dissertation, Department of Mechanical Engineering, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 2003.
- [2] R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann, "Asymptotic stability and feedback stabilization," in *Differential Geometric Control Theory*, Eds. pp. 2961–2963, 1983.
- [3] N. P. Aneke, H. Nijmeijer, A.G. de Jager, "Tracking control of second-order chained form systems by cascaded backstepping" *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, pp. 95-115, 2003.
- [4] Y. P. Tian and K. C. Cao, "Time-varying linear controllers for exponential tracking of nonholonomic systems in chained form," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, pp. 631–647, 2007.
- [5] Z. P. Yuan, Z. P. Wang and Q. J. Chen, "Trajectory tracking control of a nonholonomic mobile robot," *IEEE ICCA 2010*, Xiamen, pp. 2207-2211, 2010.
- [6] M. Asif, M. J. Khan, N. Cai, "Adaptive sliding mode dynamic controller with integrator in the loop for nonholonomic wheeled mobile robot trajectory tracking," *International Journal of Control*, vol. 87, pp 964-975, 2014.
- [7] M.A. Fairus, Z. Mohamed, M.N. Ahmad, W.S. Loi "LMI-based multi objective integral sliding mode control for rotary inverted pendulum system under load variations," *Journal Teknologi*. vol. 73, pp. 125-137, 2015.
- [8] M. Sarfraz, "Stabilization of Perturbed Nonholonomic Systems in Chained Form". Ph.D. Thesis, Capital University of Science and Technology, Islamabad, Pakistan, 2018.
- [9] G. He, C. Zhang, W. Sun, Z. Geng, "Stabilizing the second-order nonholonomic systems with chained form by finite-time stabilizing controllers," *Robotica*, vol. 34, pp. 2344-2367, 2016.
- [10] M. Ito, "Motion Planning of a Second-Order Nonholonomic Chained Form System Based on Holonomy Extraction". *Electronics*, 8, 1337, 2019.
- [11] H. Arai, K. Tanie, N. Shiroma, "Nonholonomic control of a three-DOF planar underactuated manipulator". *IEEE Trans. Robot. Autom.* 14, 681–695. 1998.

- [12] I. Fantoni, R. Lozano, "Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems". Springer-Verlag, 2002
- [13] D. Gandolfo, C. Rosales, , D. Patiño, , G. Scaglia, and M. Jordan, "Trajectory Tracking Control of a PVTOL Aircraft Based on Linear Algebra Theory". *Asian J Control*, 16: 1849-1858, 2014.
- [14] Scaglia Serrano Mario Emanuel, Albertos Pedro (2020). "Linear Algebra Based Controller - Design and Applications". Publisher: Springer International Publishing.
- [15] G. Scaglia, E. Serrano, A. Rosales, and P. Albertos, "Tracking Control Design in Nonlinear Multivariable Systems: Robotic Applications", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2019, Article ID 8643515, 15 pages, 2019.
- [16] M. E. Serrano, D. C. Gandolfo, G. J.E. Scaglia, "Trajectory tracking controller for unmanned helicopter under environmental disturbances", *ISA Transactions*, 2020.
- [17] M.C. Fernández, M.N. Pantano, S. Rómoli, D. Patiño, O.A. Ortiz, G.J.E. Scaglia, "An Algebra Approach for Nonlinear Multivariable Fed-Batch Bioprocess Control". *International Journal of Industrial and Systems Engineering*, 2019.
- [18] L. Guevara, O. Camacho, A. Rosales, J. Guevara, G. Scaglia. "A linear algebra controller based on reduced order models applied to trajectory tracking for mobile robots: an experimental validation". *Int. J. Automation and Control*, 13, 2, 2019.
- [19] H.K. Khalil, "Nonlinear Systems," Second Edition. Prentice-Hall. New Jersey. United States of America, 1996.
- [20] M. C. F. Puchol, M. N. Pantano, S. Godoy, E. Serrano, G. Scaglia. Optimización de Parámetros Utilizando los Métodos de Monte Carlo y Algoritmos Evolutivos. Aplicación a un Controlador de Seguimiento de Trayectoria en Sistemas no Lineales. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*. v. 16, n. 1, p. 89 99, 2019.
- [21] María N. Pantano, María C. Fernández, Mario E. Serrano, Oscar A. Ortiz, and Gustavo J. E. Scaglia. "Tracking Control of Optimal Profiles in a Nonlinear Fed-Batch Bioprocess under Parametric Uncertainty and Process Disturbances" *Ind. Eng. Chem. Res.* 2018, 57, 32, 11130-11140.
- [22] E. Serrano, Daniel C. Gandolfo, Francisco Rossomando, Gustavo J.E. Scaglia. "Estimation based controller for marine vessel exposed to environmental perturbations", *Ocean Engineering*, 2019, 187, 106199.



**First A. Leandro Rodriguez** received the Food Processing Engineering degree from the National University of San Juan – Argentina, in 2008. Then, he received the Ph.D. in Chemical Engineering from the National University of the South – Argentina, in 2015. At this time, he is dedicated to process engineering, specifically to optimization and control of multivariable nonlinear systems. His main research interests include modeling, state estimation, optimization, sensor location and trajectory tracking control of chemical process and water systems.



**Second A. Cecilia Fernández** received the Food Processing Engineering degree from the National University of San Juan - Argentina, in 2014. Then she received the Doctorate in Chemical Engineering - Mention Clean Processes degree from the National University of San Juan - Argentina, in 2019. At this time, she is dedicated to process engineering, specifically to optimization and control of multivariable non-linear processes. Her main research interests include modeling, state estimation, and trajectory tracking control of biochemical processes.



**Third A. Mabel Sánchez** received the Chemical Engineering degree from the National University of the South, Argentina, in 1982, and the Ph.D. in Chemical Engineering from the National University of the South, Argentina, in 1996. She is a Research Fellow of the Council for Scientific and Technological Research, Argentina, since 2001. She leads different technological projects and at this time, she is dedicated to process engineering, specifically to monitoring and statistical process control of nonlinear systems. Her main research interests include robust state estimation, sensor network design, and statistical process control of chemical process and water systems.



**Forth A. Gustavo Scaglia** received the Eng. degree in Electronic Engineering with orientation in Control Systems from the National University of San Juan, Argentina, in 1999, and the Ph.D in Control Systems from the Institute of Automatic Control at the National University of San Juan, Argentina in 2006, his work was about a new tracking trajectories algorithms. He is a Research Fellow of the Council for Scientific and Technological Research, Argentina, since 2011. He leads different technological projects and his current scientific research at the Engineering Chemical Institute from National University of San Juan. His main interests are algorithms for tracking trajectories, nonlinear and adaptive control theory, and mechanical and chemical process.