

Comparative Analysis of Different Preconditioning Methods in Electromagnetic Scattering Problems using MoM-FMM

P. Del Pino and A. J. Zozaya

Abstract— The numerical solution of the electric field integral equation in electromagnetic scattering problems involving metallic bodies, using the method of moments in conjunction with the fast multipole method, gives rise a full matrix with highly spread complex eigenvalues and consequently with a low condition number. Thus, iterative methods may not converge or it will require an extremely large number of iterations, which make this strategy unfeasible due to the high solution time and the expensive computational resources required. To overcome this drawback, the system matrix must be preconditioned to ensure the convergence in a reasonable number of iterations and with appropriate accuracy. In this work, some preconditioning techniques are revised and applied to a linear equation system derived from such type of problems, and the performance of these preconditioners is estimated and analyzed comparatively using the generalized minimal residual iterative method.

Index Terms— EFIE, MoM, FMM, iLU, SPAI GMRES, RCSVV.

I. INTRODUCCIÓN

El problema de dispersión electromagnética de un objeto conductor eléctrico perfecto es abordado mediante el uso del teorema de equivalencia física[1,2], y queda modelado por la ecuación integral de campo eléctrico EFIE (*Electric Field Integral Equation*) [3-7].

Cuando la geometría del dispersor es arbitraria y de grandes dimensiones, la estrategia numérica que se sigue es discretizar el problema haciendo uso del método de los Momentos MoM (*Method of Moments*), [5-7], mediante la utilización de las funciones base Rao-Wilton-Glisson[7,8], y el método de los multipolos rápidos FMM (*Fast Multipole Method*), [7-15], convirtiendo así el problema modelado por una ecuación integral en un sistema de ecuaciones lineales que ha de ser resuelto haciendo uso de métodos iterativos de proyección[15-19].

La matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones así obtenido es muy dispersa y singular, de manera que su número de condición es muy grande por lo que su solución puede no converger o requerir de un número de iteraciones muy grande.

En la situación señalada, es necesario modificar la matriz de coeficientes del sistema, para construir un sistema equivalente

cuyo número de condición sea apropiado y garantizar así una convergencia rápida del método iterativo y obtener la solución del sistema con un error aceptable.

Para el fin descrito, es necesario construir una matriz de preconditionamiento [19,20], que permita modificar la matriz del sistema de ecuaciones original, en una con un número de condición más pequeño sin incurrir en costos computacionales importantes.

En este trabajo se describen y construyen algunos preconditionadores de uso general para ser utilizados en la obtención de la corriente inducida sobre una superficie conductora eléctrica perfecta en forma de ojiva.

Se evalúa y se compara el desempeño de los mismos, destacando la transformación que tiene lugar en las propiedades de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones obtenido con el propósito de proporcionar una idea de cuál preconditionador utilizar en un problema de dispersión electromagnética determinado, lo que representa la contribución de este trabajo en la resolución de problemas de dispersión electromagnética.

Para alcanzar el objetivo descrito se hace inicialmente un breve descripción teórica de los conceptos asociados con la determinación de la corriente inducida sobre una superficie conductora eléctrica perfecta, desde la formulación del problema mediante la EFIE, su discretización mediante MoM-FMM, el preconditionamiento y la resolución del sistema de ecuaciones mediante el uso de métodos iterativos de proyección.

Posteriormente se diseña un experimento numérico haciendo uso de una ojiva conductora eléctrica perfecta en la que se discretiza la EFIE mediante los métodos señalados antes y se resuelve el sistema de ecuaciones mediante un método iterativo en cinco escenarios de preconditionamiento.

A continuación se discute el efecto de cada preconditionador en los parámetros que caracterizan el sistema de ecuaciones, y se comparan sus desempeños de manera de ofrecer una idea sobre que preconditionador tiene el mejor rendimiento y facilitar así la selección de alguno en cualquier otro problema similar de dispersión electromagnética.

II. ECUACIÓN INTEGRAL DEL CAMPO ELÉCTRICO EFIE

La ecuación integral del campo eléctrico EFIE, que permite calcular el campo eléctrico dispersado por el cuerpo conductor es [5]:

P. J Del Pino, Universidad de Carabobo, Valencia, Estado Carabobo, Venezuela. pdelpi@gmail.com.

A. Zozaya, Departamento de Electricidad, Facultad de Ingeniería, Universidad Tecnológica Metropolitana. a.zozayas@utem.cl.

Corresponding author: Paulino J. Del Pino

$$\frac{1}{j\omega\mu_0} \mathbf{a}_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_n(\mathbf{r}) \times \int_{S'} \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot dS' \quad (1)$$

Donde: $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ es el campo eléctrico producido por las fuentes primarias, $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ es la densidad superficial de corriente eléctrica inducida en el cuerpo conductor, el término $\left[\mathbf{I} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right]$ es el operador diferencial diádico, siendo \mathbf{I} la díada unitaria, $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ es la función de Green y $\mathbf{a}_n(\mathbf{r})$ es un vector unitario normal a la superficie del conductor en el punto de observación \mathbf{r} , ω la frecuencia en rad/s, μ_0 la permeabilidad magnética del medio.

La ecuación (1), es denominada ecuación integral de campo eléctrico EFIE y es clasificada como una integral Freedholm de primera especie [3] y mediante ella se determinan las corrientes inducidas $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ y a partir de estas el campo eléctrico dispersado por el objeto conductor.

III. METODO DE LOS MOMENTOS MoM Y DE LOS MÚLTIPOLOS RÁPIDOS FMM

Cuando la geometría del dispersor es grande y arbitraria no es posible la obtención de una solución cerrada de (1), por lo que necesita ser discretizada y convertida en un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\mathbf{Z}\mathbf{i}$, mediante el Método de los Momentos (MoM) para lo cual utilizaremos las funciones base de Rao-Wilton Glisson (RWG)[8].

En este sistema de ecuaciones \mathbf{Z} es la matriz cuadrada de coeficientes del sistema, también denominada matriz impedancia, \mathbf{i} el vector de coeficientes de la expansión de corrientes inducidas, o también vector de incógnitas y \mathbf{V} el vector campo recibido, o también vector de valores conocidos. La componente m -ésima del producto matriz-vector señalado puede ser escrita como:

$$v_m = \sum_{n=1}^N z_{mn} i_n \quad (2)$$

Donde los elementos z_{mn} de la matriz impedancia se determinan como:

$$z_{mn} = \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{S_n} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{1}{\kappa^2} \nabla \nabla' \right] \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot dS' dS \quad (3)$$

Y los elementos v_m del vector \mathbf{V} son:

$$v_m = \frac{1}{j\omega\mu_0} \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) dS \quad (4)$$

En las ecuaciones (3) y (4), las funciones $\mathbf{f}_n(\mathbf{r}')$ y $\mathbf{f}_m(\mathbf{r}')$ son las funciones base mencionadas y se toman idénticas (método de Galerkin). La corriente $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')$ de (1) ha sido expandida en una suma finita de estas funciones base como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N i_n \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \quad (5)$$

La complejidad computacional del producto matriz-vector representado por (2), es de orden $O(N^2)$, en donde N es el número de elementos de la matriz del sistema \mathbf{Z} , y la necesaria reducción de la complejidad señalada se logra mediante la aplicación del método de los multipolos rápidos FMM como se describe en las referencias [9-14].

La ecuación (2), luego de utilizar FMM, puede escribirse como:

$$\mathbf{v}_m = (\mathbf{Z}\mathbf{I})_m^c + (\mathbf{Z}\mathbf{I})_m^l = \sum_{n=1}^{N_c} z_{mn}^{\text{MoM}} i_n + \sum_{n=1}^{N_l} z_{mn}^{\text{FMM}} i_n \quad (6)$$

Donde los superíndice c y l , corresponden a cercano y lejano respectivamente y son el número de funciones bases cercanas y lejanas a la función de prueba m [14,15].

Los elementos z_{mn}^{FMM} corresponden a las interacciones entre funciones base lejanas, las cuales son calculadas mediante la factorización de la función de Green y z_{mn}^{MoM} son los elementos la matriz de coeficientes correspondiente a las interacciones entre funciones base cercanas, los cuales se determinan mediante MoM convencional [7-14].

IV. PRECONDICIONAMIENTO

La matriz \mathbf{Z}^{MoM} , tiene las siguientes propiedades:

a) Es dispersa ya que solo incluye los elementos correspondientes a las interacciones de funciones bases cercanas. b) Está mal condicionada y es compleja. c) Exhibe una estructura simétrica, próxima a la |dominancia diagonal por bloques. d) Es no Hermitiana y tiene en general algunos autovalores con parte real negativa por lo que además es no definida positiva. e) Parte importante de sus autovalores tienen parte real nula por lo que es una matriz singular.

El tamaño y complejidad de la matriz \mathbf{Z}^{MoM} obliga a obtener la solución del sistema mediante métodos iterativos de proyección sobre subespacios de Krylov [16-20]. La convergencia y exactitud de este tipo de métodos requiere que la matriz de coeficientes esté bien condicionada, que no es el caso de la matriz del sistema generada como se ha señalado si tenemos en cuenta las propiedades antes descritas.

El condicionamiento de una matriz depende fuertemente del patrón de dispersión de autovalores de la matriz de coeficientes, y es medido mediante el parámetro denominado número de condición que se define como: $K = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ donde λ_{\max} y λ_{\min} son los valores máximo y mínimo, respectivamente, del espectro de autovalores de la matriz del sistema.

La estrategia a seguir para superar el problema del mal condicionamiento de la matriz \mathbf{Z} , es transformar el sistema de ecuaciones original en otro equivalente, de igual solución que el primero pero con mejores propiedades espectrales. Este proceso recibe el nombre de *Precondicionamiento* [21-24].

Lo anterior puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Z} \mathbf{i} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V} \quad (7)$$

Donde la matriz M es una matriz parecida a Z , en algún sentido, que modifica al sistema original y recibe el nombre de Matriz de Precondicionamiento o simplemente Precondicionador, debiéndose cumplir que el número de condición de la matriz precondicionada, sea menor al de la matriz Z sin precondicionar:

$$\kappa(M^{-1}Z) < \kappa(Z) \quad (8)$$

En forma general los requisitos de semejanza o aproximación que debe cumplir la matriz M^{-1} en relación a la matriz Z^{-1} , son: a) los autovalores de $M^{-1}Z$; sean lo más cercanos posible a la unidad y, b) que $\|M^{-1}Z - I\|_2$, sea tan pequeña como sea posible, siendo I la matriz identidad [16,21].

La elección y eficiencia de un determinado precondicionador depende de las características de cada problema y en definitiva de la matriz Z que se genere a partir de su discretización, del precondicionador utilizado M no existiendo algún criterio a priori que incline la elección por alguno en particular.

A. Precondicionador Diagonal

Su construcción se fundamenta en el método iterativo estacionario de Richardson [16,18] y en la descomposición de la matriz Z en la forma $Z = D - L - U$, donde D es una matriz diagonal, L es una matriz triangular inferior y U una matriz triangular superior resultando que para el precondicionador que: $M^{-1} = D^{-1}$.

Es simple de construir, poco costoso, computacionalmente hablando, sin embargo, es poco robusto y su utilización en este trabajo se limita a ser un elemento de comparación con los otros precondicionadores que se utilizarán.

B. Precondicionador iLU

Este precondicionador se centra en la realización dispersa, de una factorización LU mediante eliminación Gaussiana de la matriz Z , donde L y U , son los factores triangulares inferior y superior respectivamente de Z , pero sin introducir todo el llenado que se produce en el proceso de factorización, logrando así que estos factores sean aproximados en lo que respecta a los que se tendrían si la factorización fuese exacta [21,25,26].

La construcción del precondicionador de factorización incompleta iLU depende del patrón de dispersión que se elija y existen básicamente dos estrategias a seguir:

a) *Precondicionador $iLU(0)$* : En esta estrategia de precondicionamiento sin llenado, se define el patrón de dispersión S como el conjunto de elementos distintos de cero de la matriz Z , y mediante eliminación Gaussiana se determina la factorización LU tal que:

$$(LU)_{i,j} = z_{i,j} \quad \forall (i,j) \in S \quad (9)$$

b) *Precondicionador $iLU(\tau,p)$* : Para obtener un precondicionador iLU más preciso es necesario incorporar en el algoritmo descrito por (9), la posibilidad de elegir los elementos que serán extraídos tomando en cuenta su tamaño, y para ello, se utiliza una estrategia de umbral doble [27], que incorpora dos umbrales, el primero τ , que controla el tamaño de los elementos a extraer comparando el valor del elemento calculado del factor L o U con la norma Euclídea de la fila o columna correspondiente en la matriz de coeficientes original, escalada por τ , esto es: $|l(k)| \leq \tau \|Z(k,:)\|_2$; y p , con el que se retienen las p entradas más grandes de la fila o columna correspondiente en el factor L y U .

C. Precondicionador SPAI Mediante Minimización de la Norma de Frobenius

El precondicionador inversa aproximada dispersa o SPAI, es una estrategia de precondicionamiento de tipo explícito en la que se procura obtener una matriz dispersa M , que sea una aproximación de la inversa de la matriz Z , de manera que la matriz residuo $F(M) = (I - ZM)$, donde I es la matriz identidad, sea mínima en su norma de Frobenius, para algún patrón de dispersión definido, por ejemplo para el patrón de dispersión S , de elementos no nulos de Z [28-30].

La principal tarea para obtener un precondicionador SPAI exitoso, es la selección apropiada de un patrón de dispersión para M , y las estrategias a seguir para ello pueden clasificarse como: a) Patrón de dispersión estático, en el que se establece a priori un patrón de dispersión definido por algún criterio, y b) Patrón de dispersión adaptativo, en el que se inicia el proceso de construcción del precondicionador M con un patrón inicial, y se va ajustando hasta encontrar uno que sea apropiado para la inversa aproximada que se calcula, este proceso es costoso computacionalmente por lo que su uso requiere ambientes de cómputo paralelo.

V. METODOLOGÍA

Para evaluar el desempeño de los precondicionadores descritos se ha elegido a la Ojiva conductora eléctrica perfecta como dispersor sobre el que se calcularán las corrientes inducidas.

Para este fin se escribió un programa de computador para resolver el sistema de ecuaciones generadas mediante MoM – RWG-FMM, el cual fue resuelto usando para ello el método de solución iterativo GMRES [16,18], acompañado de los precondicionadores: a) S/P (sin precondicionador), b) Diagonal, c) $iLU(0)$, $iLU(\tau, p)$ y d) SPAI de patrón estático.

Los parámetros que se usaron para comparar el desempeño del sistema con y sin precondicionamiento fueron: a) Espectro de autovalores del sistema sin precondicionar y precondicionado, incluyendo un histograma de frecuencias para visualizar la disposición y magnitudes de los autovalores y número de condición del sistema en ambos casos, b) El tiempo de construcción de cada precondicionador, c) El tiempo de solución del sistema, d) El número de iteraciones requeridas para converger y e) el error relativo determinado como la norma del vector corriente de salida calculada usando precondicionador contra la misma calculada sin precondicionar y d) La grafica de convergencia del sistema en todos los casos

mostrando el vector residuo relativo contra el número de iteraciones requeridas.

La Fig. 1, muestra el diagrama de bloques que describe el experimento numérico realizado, en él pueden apreciarse cuatro grandes procesos.

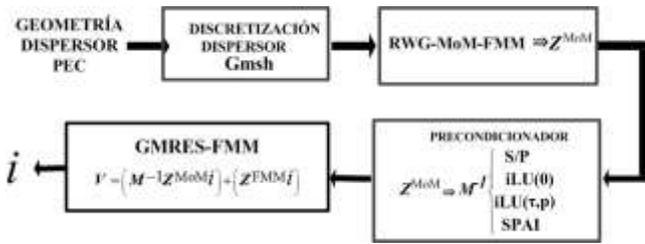


Fig. 1. Diagrama de bloques del experimento numérico diseñado.

A) Bloque Gmsh

En este bloque, mediante el programa Gmsh [31], se construyó la superficie conductora eléctrica perfecta bajo estudio y se discretizó en elementos triangulares, produciendo a la salida un archivo de tipo estereolitográfico (.stl), con toda la información requerida para la discretización de la ecuación integral EFIE correspondiente.

B) RWG-MoM-FMM

En este bloque se programan los métodos MoM y FMM usando funciones bases RWG y se genera la matriz Z^{MoM} , cuyos elementos se obtienen mediante la discretización de la ecuación integral EFIE usando el método de los momentos MoM en forma ordinaria. La matriz Z^{MoM} es utilizada en la confección del preconditionador en cada caso.

C) Precondicionador

Se determinan los preconditionadores objeto de estudio en este trabajo, saber: (a) Sin Precondicionador S/P, (b) Jacobi (Diagonal), (c) $iLU(0)$, (d) $iLU(\tau,p)$ y (e) SPAI. En cada caso se utiliza la matriz de elementos pertenecientes a agrupaciones cercanas Z^c ya que esta es la matriz que se conoce explícitamente y de la que se dispone en memoria.

D) Bloque GMRES-FMM

En este bloque se resuelve el sistema de ecuaciones preconditionado, es decir se calculan los elementos de corriente inducida i pertenecientes a los grupos cercanos y se incorporan los elementos de corriente calculados mediante FMM, además se determinan los parámetros señalados anteriormente para medir y comparar el desempeño de los preconditionadores en cada caso.

VI. RESULTADOS Y DISCUSION

En la Fig. 2, se resumen las características del problema de dispersión a tratar sobre la ojiva ya discretizada mediante 1176 elementos triangulares haciendo uso del programa Gmsh como ya se ha dicho.

Vale la pena mencionar que la longitud eléctrica de la ojiva bajo estudio es de tres longitudes de onda a la frecuencia de estudio (3,0 GHz). Sobre la Ojiva se hizo incidir una onda plana con polarización vertical en la dirección $\theta = \pi/2$ y $\varphi = \pi/2$.

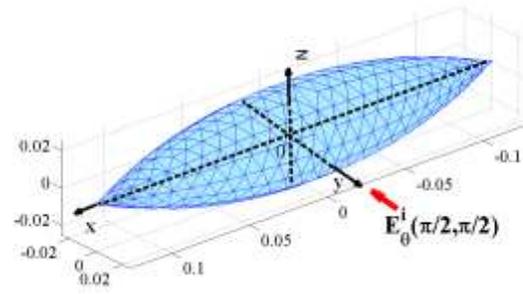


Fig. 2. Ojiva PEC. Frecuencia 3.0GHz, $L=3\lambda$, N° de elementos triangulares=1176.

La discretización de la ecuación integral se realizó mediante programas escritos para ejecutar los algoritmos MoM-FMM sobre los elementos de superficie triangulares y la matriz Z^{MoM} resultante presentó las propiedades que se resumen en la Fig. 3.

Como se observa en la Fig. 3(a), la gran mayoría de los autovalores correspondientes a Z^{MoM} (marcas rojas), yacen sobre el eje imaginario señalando que se trata de una matriz no Hermitiana debiéndose agregar que es una matriz singular ya que la mayoría de sus autovalores se encuentran muy cerca del origen.

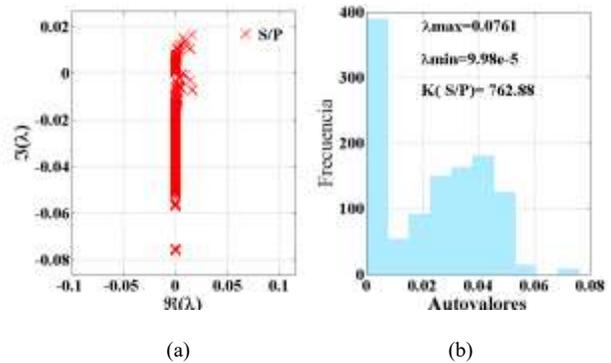


Fig. 3. (a) Distribución de autovalores en el plano complejo (b) Histograma de frecuencias de los autovalores de la matriz Z^{MoM} sin preconditionar.

Como se observa en la Fig. 3(a), la gran mayoría de los autovalores correspondientes a Z^{MoM} (marcas rojas), yacen sobre el eje imaginario señalando que se trata de una matriz no Hermitiana debiéndose agregar que es una matriz singular ya que la mayoría de sus autovalores se encuentran muy cerca del origen.

El histograma de frecuencias de la Fig. 3(b), confirma lo señalado en el párrafo anterior ya que muestra que cerca de 400 de ellos se agrupan alrededor del origen, además de señalar los valores máximos y mínimos de estos autovalores, $\lambda_{max} = 0,0761$ y $\lambda_{min} = 9,9 \times 10^{-5}$ respectivamente, dejando lugar a un número de condición alto para la matriz Z^{MoM} sin preconditionar, esto es: $K(S/P) = 762,88$.

La Fig. 4, muestra lo que ocurre al preconditionar a la matriz Z^{MoM} mediante un preconditionador diagonal, destacándose, Fig. 4(a), el cambio experimentado en la distribución de autovalores en el plano complejo.

Los autovalores del sistema preconditionado señalados con círculos azules, se han separado de manera moderada del origen, teniendo en cuenta las diferentes escalas utilizadas en las Fig 3 y Fig. 4.

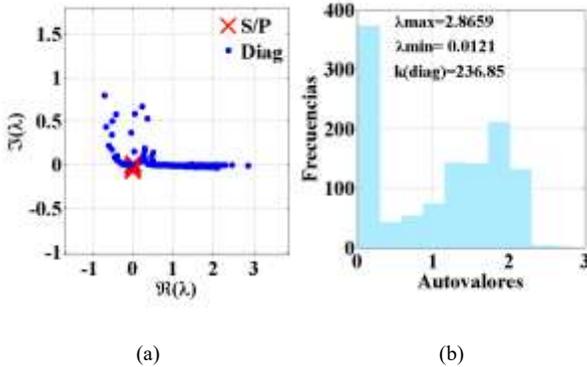


Fig. 4. (a) Distribución de autovalores en el plano complejo (b)Histograma de frecuencias de los autovalores de la matriz Z^{MoM} preconditionada mediante un preconditionador Diagonal.

Es de notar además el efecto simetrizador del preconditionador al ubicar la mayoría de los autovalores del sistema en el eje real, es decir, propende a hacer Hermitiana a la matriz del sistema.

La Fig. 4(b) muestra que persiste un grado de dispersión grande, $\lambda_{max} = 2.8659$ y $\lambda_{min} = 0.0121$, siendo esto suficiente como para que el nuevo número de condición tenga solo una moderada disminución, $K(diag) = 236.85$, respecto del caso sin preconditionar. Además se observa un número importante de autovalores alrededor del origen, que aunque un poco menor que el caso sin preconditionar, es todavía muy importante.

La Fig. 5, muestra el efecto que tiene utilizar un preconditionador $iLU(0)$ en la matriz Z^{MoM}

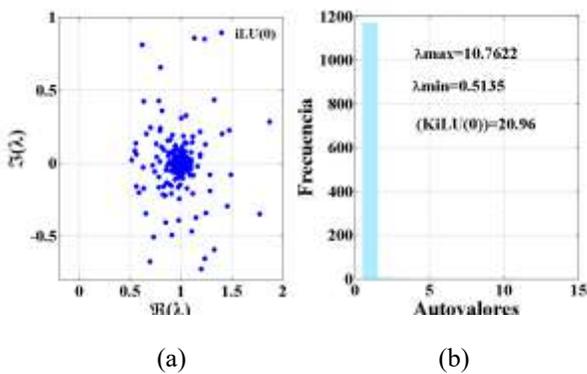


Fig. 5. (a) Distribución de autovalores en el plano complejo (b) Histograma de frecuencias de los autovalores de la matriz Z^{MoM} , utilizando un preconditionador $iLU(0)$.

La Fig. 5(a), muestra claramente como en este caso los autovalores se separan totalmente del origen (círculos azules) y se agrupan alrededor del autovalor (1,0) eliminando la singularidad que se tenía sin preconditionar.

En la Fig. 5(b), de nuevo se confirma lo antes señalado, ningún autovalor en el origen y la gran mayoría de estos

alrededor de (1,0), además se observa como la dispersión de los autovalores es drásticamente menor, $\lambda_{max} = 10.7622$ y $\lambda_{min} = 0.5135$, dejando una matriz mucho mejor condicionada con $K(iLU(0))=20.96$, como número de condición.

Como ha sido descrito, es posible obtener un mejor desempeño de este tipo de preconditionador si se utilizan preconditionadores del tipo $iLU(p,\tau)$, en este caso se utilizó $p=300$ y $\tau=10^{-3}$ mostrándose los resultados en la Fig. 6.

En la Fig. 6(a), resulta evidente como el agrupamiento de los autovalores alrededor de (1,0) en el plano complejo es más acentuado que en el caso anterior, sin ningún autovalor en el origen.

Puede comprobarse de la Fig. 6(b), como el histograma de frecuencias señala la inexistencia de autovalores en el origen, y el fuerte agrupamiento de estos alrededor del valor señalado. Además la dispersión es todavía mucho menor, $\lambda_{max} = 2.7875$ y $\lambda_{min} = 0.5335$, dando lugar a un número de condición de 5.22.

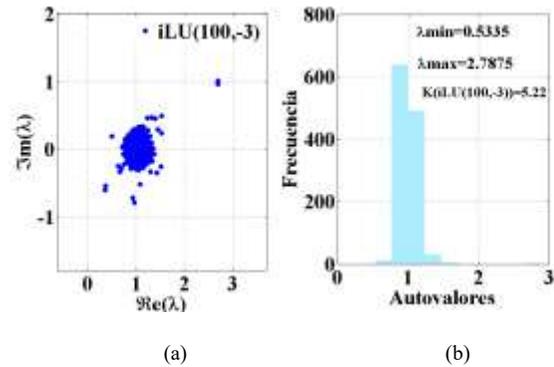


Fig. 6. (a) Distribución de autovalores en el plano complejo (b) Histograma de frecuencias de los autovalores de la matriz Z^{MoM} , utilizando un preconditionador $iLU(100,10^{-3})$.

Para estudiar el impacto producido por los preconditionadores SPAI, se seleccionó como patrón de dispersión uno de banda diagonal con 360 elementos distintos de cero en la banda diagonal el cual se ha denotado como SPAI(B360).

La Fig. 7, muestra el efecto que tiene este preconditionador sobre la matriz Z^{MoM} .

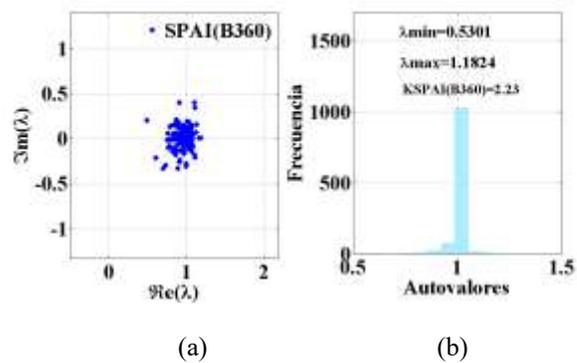


Fig. 7. (a) Distribución de autovalores en el plano complejo (b)Histograma de frecuencias de los autovalores de la matriz Z^{MoM} , utilizando un preconditionador SPAI(B360).

La Fig. 7(a) y la Fig. 7(b) muestran como este preconditionador convierte la matriz Z^{MoM} , en una matriz no singular sin autovalores centrados en (0,0), y prácticamente todos en (1,0). Además se indica muy baja dispersión de sus autovalores, $\lambda_{max} = 1.1824$ y $\lambda_{min} = 0.5301$, dejando el mejor número de condición, de todos los preconditionadores estudiados, $K(SPAI(B360)) = 2.23$,

De igual manera, para continuar comparando el desempeño de cada preconditionador contra el sistema sin preconditionar (S/P) y entre ellos mismos, la Fig. 8, muestra la convergencia de cada uno los preconditionadores utilizados, graficando, en el eje vertical, el logaritmo natural del residuo relativo de la solución obtenida en cada iteración, hasta alcanzar un residuo relativo de 10^{-8} , y en el eje horizontal, el número de iteraciones necesitadas para alcanzar ese residuo relativo.

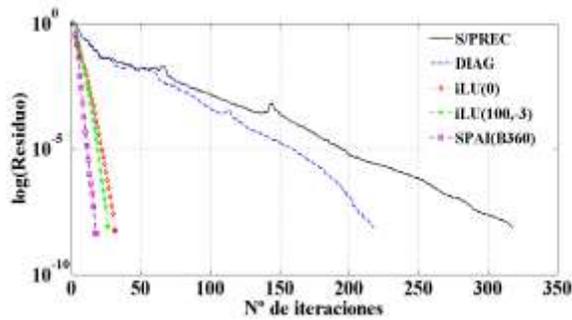


Fig. 8. Gráfica de la convergencia de los preconditionadores estudiados en la determinación de las corrientes inducidas en la superficie conductora eléctrica perfecta con forma de ojiva.

Puede verse en la Fig. 8, como cada preconditionador, en el orden en que han sido estudiados, es mejor que el que lo precede, ya que cada uno alcanza el objetivo exigido en un número de iteraciones menor que el anterior, y drásticamente menor que en el caso sin preconditionar. Es decir la convergencia se acelera con el tipo de preconditionador destacando el preconditionador SPAI(B360) como el que muestra mejor desempeño de este parámetro.

Para continuar documentando los parámetros de desempeño de los preconditionadores estudiados, la Tabla I, muestra los tiempos de construcción del preconditionador (T_c) en segundos, el tiempo para obtener la solución del sistema (T_{sol}) en segundos, el tiempo total obtenido como $T_{total}(s) = T_c(s) + T_{sol}(s)$, el número de iteraciones requeridas para tal fin, como fue mostrado gráficamente en la Fig. 8, y el error relativo de la solución en cada caso contra la solución obtenida de manera convencional.

TABLA I.

Comparación del desempeño de los preconditionadores en términos de tiempo de construcción, tiempo de solución número de iteraciones y error relativo.

Prec	$T_c(s)$	$T_{sol}(s)$	$T_{total}(s)$	Iter	Error(ppm)
S/P		2619,50	2619,50	324	
Diag	0.26	1782.04	1782,30	218	0.2920
iLU(0)	32.75	121.95	154.70	32	0.0473
iLU(100, 10^{-3})	58.12	93.88	152,00	27	0.0129
SPAI(B360)	238.53	59.17	297.70	18	0.0061

La Tabla I, permite ver que los tiempos de construcción de los preconditionadores son mayores en la medida que estos sean más complejos de implementar. Sin embargo, el tiempo de solución y el número de iteraciones necesitadas para obtener una solución del sistema con el residuo relativo exigido es menor en los preconditionadores más complejos, compensando así la inversión de tiempo realizada en su construcción.

Debe tenerse en cuenta, además, que el preconditionador se construye una sola vez y se utiliza para calcular la solución del sistema para un número muy grande de campos incidentes, o bien de vectores de excitación V .

De igual manera, se observa que el error en la solución, es menor en la medida que el preconditionador es más elaborado, Estos resultados resaltan que el mejor desempeño se alcanzó con el preconditionador SPAI(B360).

Con el objetivo de validar los resultados obtenidos en la determinación de la corriente inducida con cada preconditionador estudiado, se procedió a calcular la sección transversal de Radar copolar de la ojiva para una onda plana incidente con polarización vertical (RCSVV).

La RCSVV es una figura de mérito sumamente importante en la ingeniería de Radares y constituye una de las principales razones por la que el estudio de la dispersión electromagnética de la doble ojiva se justifica.

La Fig. 9, muestra esta figura de mérito cuando el objeto dispersor es observado horizontalmente en el rango $0 < \phi < \pi$ con una milésima de grado de resolución, siempre para el mismo campo eléctrico con polarización vertical, incidente en $\theta = \pi/2$.

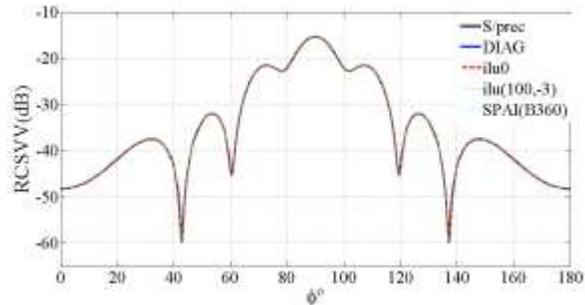


Fig. 9. RCSVV de la Ojiva, para un campo eléctrico incidente en $\theta = \pi/2$ y $0 < \phi < \pi/2$.

Debe destacar, que la RCSVV ha sido calculada para mil puntos del eje horizontal, es decir ha sido necesario calcular 1000 veces la corriente inducida en el dispersor, una vez por cada posición horizontal del campo incidente, mientras que la construcción de cada preconditionador se realizó una sola vez, por lo que se pone de manifiesto lo anteriormente señalado, respecto del tiempo de construcción de cada preconditionador, con el tiempo de solución del sistema de ecuaciones.

Puede observarse en la Fig 9, que las gráficas de RCSVV para cada preconditionador se confunden, lo cual quiere decir que se ha calculado la corriente inducida con cada preconditionador de manera satisfactoria y con mínimo error.

VII. CONCLUSIONES

Ha sido calculada la corriente inducida en una superficie conductora eléctrica perfecta con forma de ojiva, utilizando

los preconditionadores S/P, Diag, $iLU(0)$, $iLU(100,10^{-3})$ y SPAI(B360). Se observa como en el caso de la matriz sin preconditionar S/P, la mayoría de los autovalores se concentra en el origen del plano complejo y además como estos autovalores están dispersos por lo que la matriz está mal condicionada lo que se ha traducido en una convergencia lenta y con mayor error al ser resuelta mediante un método iterativo de proyección en este caso GMRES.

El uso del preconditionador Diag, el de más simple elaboración, disminuye moderadamente tanto la cantidad de autovalores agrupados en el origen como la dispersión de estos, produciendo una aceleración tímida de la convergencia y arrojando además el mayor error de solución respecto de los otros preconditionadores estudiados.

Respecto de los preconditionadores $iLU(0)$, se evidencia como ambos desplazan todos los autovalores del origen, agrupándolos ahora alrededor del punto (1,0), siendo $iLU(100,10^{-3})$ quien muestra la mejor distribución de autovalores y menor número de condición que $iLU(0)$. Además como la dispersión ha disminuido sensiblemente, la matriz está mejor condicionada y por lo tanto, en ambos casos, la convergencia experimenta una aceleración importante respecto del preconditionador Diagonal y con una disminución importante del error en la solución.

Es importante destacar que los resultados en el desempeño del preconditionador $iLU(100,10^{-3})$, son solo levemente mejores que en el caso de $iLU(0)$, teniendo ambos tiempos de solución muy similares, básicamente esto se debe a que en el primero el patrón de llenado se hace de manera más selectiva, al tomar en cuenta el tamaño de los elementos a extraer y de la cantidad por fila que son extraídos.

Finalmente, el preconditionador SPAI tiene un impacto en la distribución de autovalores, y en la dispersión de estos, ligeramente mejor que el preconditionador $iLU(100,10^{-3})$, siendo su desempeño ligeramente mejor en lo que respecta a la velocidad de convergencia y significativamente mejor en error de la solución.

Debe observarse que el tiempo de construcción, y en consecuencia el tiempo de solución, aumentan de manera importante. Lo anterior es debido a que la construcción del preconditionador SPAI, es más complejo que el caso del preconditionador $iLU(100,10^{-3})$, sin embargo, al calcular la figura de mérito RCSVV quedaría justificada su elección, para el caso de estudio tratado, frente a los otros preconditionadores estudiados.

Es muy importante destacar que, el desempeño del preconditionador depende grandemente del tipo de problema, o de la física de este, ya que a partir de estos aspectos se construye el Kernel de los elementos de la matriz de coeficientes del sistema.

A. Futuros Trabajos

Se sugiere extender este estudio utilizando otros preconditionadores otros patrones de dispersión, estrategias de llenado y otras geometrías dispersoras.

REFERENCIAS

- [1] R. F. Harrington. "Time Harmonic Electromagnetics Fields". McGraw Hill, 1961.
- [2] C.A. Balanis. "Advanced Engineering Electromagnetics." John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [3] J. Markkanen, P. Ylä-Oijala, A. Sihvola, "Discretization of volume integral equation formulations for extremely anisotropic materials," IEEE Transactions on. Antennas and Propagation..vol. 60, no. 11, pp. 5195-5202, Nov. 2012.
- [4] H. Feshbach and P. Morse. "Methods of Theoretical Physics. Part I". 1953.
- [5] R. F. Harrington. "Field Computation by Moment Methods". IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, 1993.
- [6] E. Arvas and L. Sevgi. "A Tutorial on the Method of Moments" IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 54, No. 3, June 2012.
- [7] W. C: Gibbson. "The Method of Moments in Electromagnetics". Chapman & Hall/CRC, 2008.
- [8] A. W. Glisson S. M. Rao, D. R. Wilton. "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-30: pp. 409-418, 1982.
- [9] B. A. Cipra. "The best of the 20th century: Editors name top 10 algorithms". SIAM News, 33, Number 4.
- [10] E. Michielssen J.M. Song W.C. Chew, J.M. Jin. "Fast and efficient algorithms in computational electromagnetic". Norwood, MA, 2001.
- [11] A. T. Ihler. "An overview of fast multipole methods". April 23, 2004.
- [12] V. Rokhlin y S.Wandzura R. Coifman. "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription". IEEE Antennas and Propagation Magazine, 35 no. 3, June 1993.
- [13] V. Rokhlin L. Greengard. "A fast algorithm for particle simulation". Journal of Computational Physics, 43: pp. 325-348, 1987.
- [14] W. C. Chew J. M. Song. "Error analysis for the truncation of multipole expansion of vector green's functions". IEEE Microwave Wireless Components Letters, 11 no. 7: pp. 311-313, 2001.
- [15] A. Zozaya and Paulino Del Pino. "A simple numerical experiment of Green's function expansion in the Fast Multipole Method". Advanced Electromagnetics, vol 6, no. 4, November 2017.
- [16] Y. Saad. "Iterative Methods for Sparse Linear Systems". Pws Publishing Company, Boston, 1996.
- [17] M. Versaci & et al. "Krylov's subspaces iterative methods to evaluate electrostatic parameters" American Journal of Applied Sciences, 11 (3): 396-405, 2014. doi:10.3844/ajassp.2014.396.
- [18] R. Barret & et al. "Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods". SIAM, <http://www.siam.org/books>. Philadelphia, 1994.
- [19] Henk A. van der Vorst. "Iterative Methods for Large Linear Systems". Mathematical Institute Utrecht University Utrecht, The Netherlands, 2002.
- [20] Jan Brandts. "Projection methods for oversized linear algebra problems". Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht, NAW 5/1:264-276, 2000.
- [21] KE CHEN. "Matrix Preconditioning Techniques and Applications". Cambridge University Press, volume 19. 2005.
- [22] Michele Benzi. "Preconditioning techniques for large linear systems: A survey". Journal of Computational Physics, 182:418-477, 2002.
- [23] X.-Min Pan and X.-Qing Sheng. "Improved Algebraic Preconditioning for MoM Solutions of Large-Scale Electromagnetic Problems". IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, vol. 13, 2014. doi: 10.1109/LAWP.2013.2295239.
- [24] O. Wiedenmann and T. F. Eibert. "The effect of near-zone preconditioning on electromagnetic integral equations of first and second kind". Adv. Radio Sci., 11, 61-65, 2013. doi 10.5194/ars-11-61-2013.
- [25] H. Anzt, E. Chow, J. Saak and J. Dongarra. "Updating incomplete factorization preconditioners for model order reduction". Numerical Algorithms. 73 (3), pp. 611-630. Springer Science+Business Media New York . 2016 doi 10.1007/s11075-016-0110-2.
- [26] T. Malas, T. and L. Gurel. "Incomplete LU preconditioning with Multilevel Fast Multipole Algorithm for electromagnetic scattering". SIAM J. Scientific Computing, vol. 29, no. 4, pp. 1476 -1494, 2007.
- [27] Y. Saad. Ilut: "A dual threshold incomplete LU factorizations". SIAM Numerical Linear Algebra with Applications, 1994.
- [28] Y. Saad E. Chow."Approximate inverse preconditioners via sparse iterations". SIAM Journal on Scientific Computing, 19-3: pp. 995-1023, 1994.

- [29] C. K. Papadopoulos*and Gavvanis “Generic Approximate Sparse Inverse Matrix Techniques”. *International Journal of Computational Methods*. Vol. 11, No. 6 (2014). DOI: 10.1142/S0219876213500849.
- [30] D. Bertaccini and S. Filippone. “Sparse approximate inverse preconditioners on high performance GPU platforms”. *Computers and Mathematics with Applications* 71 (2016) 693–711. DOI: 10.1016/j.camwa.2015.12.008.
- [31] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. “A three dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79(11), pp. 1309-1331, 2009. <https://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html>



Paulino Del Pino received the BSc. degree in Electrical Engineer, in 1988, and MSEE. in Electrical Engineering on Telecommunications research area, in 2004, from the University of Carabobo, Valencia, Venezuela. Since 1988 he has worked in different projects in the area of electrical-electronics engineering and telecommunications engineering, both in

the private sector and at the University of Carabobo, Venezuela. He is a full professor at the School of Telecommunications Engineering at the University of Carabobo and his areas of interest in the research are: estimation of SAR and RCS of arbitrary geometry and constitution bodies using MoM and FDTD for applications in microwave imaging and determination of the thermal response of human biological tissue to microwave radiation for medical applications. Optimal estimation of RCS using MoM and MLFMM. Design, construction and characterization of RF and microwave circuits. Design, construction and characterization of antennas. Estimation of coverage and propagation studies in AM / FM broadcasting, and broadcasting in the UHF band. ORCID: 0000-0003-1451-6086.



Alfonso Zozaya, received the B.Sc. degree in Electronic Engineering, with a major in Telecommunication, from the Instituto Universitario Politécnico de las Fuerzas Armadas Nacionales (IUPFAN), Maracay, Venezuela, in 1991, and his PhD degree from the Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), Barcelona,

Spain, in the area of Signal Theory and Communication in 2002. He worked as a Professor at the Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela from 1994 to 2014. He worked as a senior researcher at the Ecuadorian Space Institute, Quito, Ecuador, in the area of synthetic aperture radars in the periods from September 2014 to September 2015, and from August 2016 to August 2017. Currently, he is with the Universidad Tecnológica Metropolitana del Estado de Chile (UTEM), Santiago de Chile, where he works as a Full Professor at the Department of Electricity. His research interests include applied electromagnetic, computational electromagnetic, digital signal processing, RF circuits design, synthetic aperture radars, and UWB radars.