

A Computational Analysis of Decomposition Strategies for Model Predictive Control of Resource-Constrained Dynamic Systems

Pedro Henrique V. B. da Silva, Laio O. Seman, Eduardo Camponogara

Abstract—This paper presents two decomposition approaches, Bilevel Optimization and Benders Decomposition, to a model predictive control of resource-constrained dynamic systems. The proposed methods yield a distributed solution that converges to the same optimum that would be obtained by a centralized controller. In this context, it is shown that the decompositions enable the use of multi-core or distributed architectures. A level regularization method is applied to accelerate the convergence of the Benders decomposition. Computational analyses from experiments with synthetic problems and a problem regarding the charging of vehicle batteries are reported and discussed, which showed that the decomposition approaches are effective at solving the distributed problems, achieving a global optimum.

Index Terms—Bilevel Decomposition, Benders Decomposition, Model Predictive Control, Level Regularization, Resource Constraints, Electric Vehicle Battery Recharge.

I. INTRODUÇÃO

Diversos sistemas encontrados na indústria e na sociedade emergem da interconexão de subsistemas dinâmicos que compartilham recursos limitados [1], [2]. Tais sistemas podem apresentar um alto grau de acoplamento entre as unidades interconectadas. Exemplos de sistemas incluem estações de carregamento de baterias de veículos elétricos, o gerenciamento de energia de edifícios e a distribuição de fluido de resfriamento em edifícios, entre outros.

Existem duas classes de estratégias de *Model Predictive Control* (MPC) que podem ser empregadas para controlar sistemas, o controle centralizado [3] e o controle descentralizado [4]. Embora o controle descentralizado seja rápido e escalável, a falta de coordenação entre as unidades distribuídas pode levar a um desempenho insatisfatório ou inviabilizar a operação. Por outro lado, o controle centralizado é capaz de otimizar o desempenho, porém oferece menos flexibilidade de reconfiguração e expansão, podendo ainda ter um custo computacional elevado.

Neste contexto, em [5] foram propostas decomposições hierárquicas para dividir os cálculos entre um problema *master* (componente centralizado) e um conjunto de subproblemas (componentes distribuídos) que, por serem totalmente ou altamente desacoplados, podem ser resolvidos com eficiência

utilizando hardware paralelo ou *multi-core*. Sua estrutura simples de coordenação também facilita a expansão e a reconfiguração do sistema de controle. Em [5] são desenvolvidas decomposições hierárquicas para MPC de sistemas desacoplados dinamicamente e que compartilham recursos. Aqui são considerados dois métodos gerais para controle e otimização hierárquica: otimização em dois níveis [6] e decomposição de Benders [7].

Segundo [6], a otimização de dois níveis é uma metodologia para reformular a estrutura centralizada em uma estrutura distribuída e de coordenação simples que abre um grande potencial para computação em paralelo, visando arquiteturas *multi-core* ou ainda de computação distribuída.

De acordo com [8], a decomposição de Benders (BD) tem como objetivo principal resolver problemas com variáveis inteiras que, quando temporariamente fixadas, produzem um problema significativamente mais fácil de se lidar. Assim, o método de BD é um algoritmo empregado em muitas aplicações [8], pois explora a estrutura do problema e descentraliza a carga computacional, como na otimização de dois níveis, podendo tratar o problema em uma estrutura distribuída e permitindo o potencial de cálculos em paralelo.

O benefício das decomposições hierárquicas é organizacional, pois permitem que o sistema de controle seja reconfigurado localmente e expandido com coordenação reduzida. Os sinais comunicados entre o *master* e os subsistemas são relativamente simples, consistindo em alocações de recursos (do *master* para os subsistemas), cortes e derivadas/sensibilidades (dos subsistemas para o *master*). Em tal estrutura o *master* não precisa ter informações detalhadas sobre os subproblemas.

Neste contexto, a principal contribuição deste artigo está em realizar análises dos tempos computacionais das decomposições de Benders e Bilevel quando os subproblemas são resolvidos em paralelo, observando a eficiência e *speedup*, métricas demonstradas em [9], expandindo as conclusões previamente apresentadas em [5]. Além disto, dada a baixa performance do algoritmo de Benders para MPCs apresentada em [5], também foram analisados os ganhos da metodologia quando submetida a um processo de regularização. Por fim, como forma de ilustrar possíveis aplicações, um problema exemplo de carregamento de baterias é apresentado e resolvido.

Este artigo está organizado da seguinte forma. A Seção II apresenta um problema de controle preditivo de sistemas dinâmicos com recursos compartilhados. A Seção III descreve as estratégias de decomposição de dois níveis e Benders para o problema de controle em questão, bem como a introdução de

Pedro da Silva, UFSC, Brazil, (email: pedro.valderrama@posgrad.ufsc.br)
 Laio Seman, UNIVALI, Brazil, (email: laioseman@gmail.com)
 Eduardo Camponogara, UFSC, Brazil, (email: eduardo.camponogara@ufsc.br)

uma estratégia de regularização para aceleração da solução da decomposição de Benders. Na sequência a Seção IV fornece uma análise dos resultados obtidos com experimentos numéricos. A Seção V apresenta resultados de uma aplicação a um problema de controle de carregamento de baterias de veículos elétricos. Finalmente a Seção VI fornece um resumo, discussões e sugere indicações para pesquisas futuras.

II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção, será introduzida a formulação para o MPC de uma classe de sistemas dinâmicos com restrição de recursos, tal qual apresentado em [5]. O MPC refere-se a uma ampla gama de métodos de controle que fazem uso explícito de um modelo do processo para obter o sinal de controle, minimizando uma função objetivo ao longo de um horizonte de predição [3].

Iniciamos declarando um problema¹ para o controle de subsistemas dinâmicos independentes que compartilham recursos limitados — o problema base. Reformulações do problema base, de forma compacta, são propostas para a solução com otimização em dois níveis e decomposição de Benders.

No instante atual k , a otimização produz uma sequência de controle ideal, mas apenas o primeiro sinal de controle é aplicado ao processo. No instante $k+1$ com a atualização das medições do sistema, o processo é repetido no horizonte de predição.

Seja $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$ o conjunto de subsistemas, $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$ o conjunto de recursos disponíveis, $\mathcal{N}_u = \{0, \dots, N_u\}$ o horizonte de controle, e N_1 e N_2 os índices que definem o horizonte de predição mínimo e máximo, respectivamente, para as saídas. O problema de MPC com restrição de recursos, de interesse neste trabalho, é definido como a seguir:

$$P : \min J = \sum_{m=1}^M \sum_{j=N_1}^{N_2} \|y_m(k+j|k) - w_m(k+j)\|_{Q_m}^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{N_u-1} \|\Delta u_m(k+j|k)\|_{W_m}^2 \quad (1a)$$

s.a.: Para $m \in \mathcal{M}$:

$$x_m(k+j+1|k) = A_m x_m(k+j|k) + B_m \Delta u_m(k+j|k), \quad j = 0, \dots, N_2 - 1 \quad (1b)$$

$$y_m(k+j|k) = \begin{cases} C_m x_m(k+j|k) + D_m \Delta u_m(k+j|k), & j = N_1, \dots, N_u - 1 \\ C_m x_m(k+j|k), & j = N_u, \dots, N_2 \end{cases} \quad (1c)$$

$$u_m(k+j|k) = \begin{cases} u_m(k+j-1|k) + \Delta u_m(k+j|k), & j = 0, \dots, N_u - 1 \\ u_m(k+j-1|k), & j = N_u, \dots, N_2 - 1 \end{cases} \quad (1d)$$

¹Na declaração do problema **min** será utilizado para representar “mínimo” e **s.a.** para representar “sujeito à”.

$$x_m(k|k) = x_m(k) \quad (1e)$$

$$u_m(k-1|k) = u_m(k-1) \quad (1f)$$

$$y_m^{\min} \leq y_m(k+j|k) \leq y_m^{\max}, \quad j = N_1, \dots, N_2 \quad (1g)$$

$$u_m^{\min} \leq u_m(k+j|k) \leq u_m^{\max}, \quad j = 0, \dots, N_u - 1 \quad (1h)$$

$$\Delta u_m^{\min} \leq \Delta u_m(k+j|k) \leq \Delta u_m^{\max}, \quad j = 0, \dots, N_u - 1 \quad (1i)$$

Para $r = 1, \dots, R, j = 0, \dots, N_2 - 1$:

$$\sum_{m=1}^M s_{r,m}^T u_m(k+j|k) \leq s_r^{\max}(k+j) \quad (1j)$$

onde,

- $x_m(k)$ é o estado do sistema no momento k e $x_m(k+j|k)$ é a previsão do estado para o tempo $k+j$ calculado com as informações disponíveis até o momento k ;
- $y_m(k+j|k)$ é a saída predita no momento $k+j$;
- $w_m(k+j)$ é a trajetória de saída desejada;
- $u_m(k+j|k)$ é a entrada de controle predita e $\Delta u_m(k+j|k)$ é a variação de controle predita;
- $Q_m = Q_m^T$ e $W_m = W_m^T$ são matrizes definidas positivas que penalizam os erros no seguimento da trajetória de referência e na variação de controle, respectivamente;
- $x_m(k)$ e $u_m(k-1)$ são valores conhecidos com as condições iniciais;
- A_m, B_m, C_m e D_m são as matrizes do sistema de dimensões adequadas;
- $\|x\|_Q = \sqrt{x^T Q x}$ é a norma vetorial induzida por uma matriz definida positiva Q ;
- $y_m^{\min}, y_m^{\max}, u_m^{\min}, u_m^{\max}, \Delta u_m^{\min}$ e Δu_m^{\max} são os limites impostos às saídas, sinais de controle e variação de controle, respectivamente;
- $s_r^{\max}(k)$ é a quantidade de recurso r disponível no tempo k , e $s_{r,m}$ define a taxa de consumo do subsistema m .

III. ESTRATÉGIAS DE DECOMPOSIÇÃO

Neste trabalho são utilizadas duas técnicas para realização de decomposições de maneira hierárquica para o problema de MPC com restrição de recursos limitados, sendo essas a otimização de dois níveis e decomposição de Benders, métodos esses são discutidos e comparados extensivamente na literatura [8], [10], [11], [12].

Como exemplos da utilização da decomposição de dois níveis pode-se citar: [13], onde um problema de planejamento da expansão da capacidade foi formulado em otimização de dois níveis, para modelar uma estrutura hierárquica de decisão, envolvendo produtores e consumidores industriais; [14], que propõe um algoritmo de otimização de dois níveis para analisar a vulnerabilidade, máxima e mínima, de sistemas de potência sob múltiplas contingências; [15], que trata um problema de *smart-grids*, onde um fornecedor de energia tem como objetivo definir simultaneamente os valores que maximizam a receita enquanto atende a uma restrição de pico de carga.

Os autores em [16] utilizaram a decomposição de Benders em um problema de planejamento de produção, em que várias fábricas individuais colaboram apesar de terem objetivos distintos; [17] apresenta um problema de roteamento da produção

(PRP) que trata da distribuição de um único produto de uma planta de produção para vários clientes, usando veículos de capacidade limitada, em um horizonte de tempo discreto e finito; já em [18] é projetado um algoritmo baseado em decomposição de Benders para resolver um problema de fluxo de energia ideal, com restrições de segurança.

No sentido de facilitar a aplicação de estratégias de decomposição, como em [5], o problema P é reformulado da seguinte forma:

$$\min_z f = \sum_{m=1}^M f_m(z_m) \quad (2a)$$

s.a.: Para $m = 1, \dots, M$:

$$h_m(z_m) = 0 \quad (2b)$$

$$g_m(z_m) \leq 0 \quad (2c)$$

$$g(z) \leq s \quad (2d)$$

onde $z_m = (x_m(k+j), y_m(k+j), u_m(k+j), \Delta u_m(k+j))$; $\forall j$ é um vetor com todas as variáveis do subsistema m ; $s = (s_r^{\max}(k+j) : \forall r, j)$ é um vetor com os recursos disponíveis em todos os instantes de tempo, e para todos os subsistemas, e $z = (z_m : m \in \mathcal{M})$ inclui todas as variáveis de todos os subsistemas. Então, as funções vetoriais h_m , g_m e g representam as igualdades (1b)-(1f), as desigualdades (1g)-(1i), e as restrições de recursos (1j), respectivamente.

A. Decomposição de Dois Níveis

Sendo $ss = (ss_{r,m}(k+j) : \forall r, j, m)$ o vetor de alocação de recursos, onde $ss_{r,m}(k+j)$ é a quantidade de recurso r alocada para cada subsistema m , no tempo $k+j$, o problema P pode ser reescrito como um problema de otimização de dois níveis, onde o problema *master* é dado por:

$$U : \min_{ss} f(ss) = \sum_{m=1}^M f_m(z_m(ss_m)) \quad (3a)$$

s.a.: Para $r = 1, \dots, R$, $j = 0, \dots, N_2 - 1$:

$$\sum_{m=1}^M ss_{r,m}(k+j) \leq s_r^{\max}(k+j) \quad (3b)$$

$$ss_{r,m}(k+j) \geq 0, \forall m \in \mathcal{M} \quad (3c)$$

onde $ss_m = (ss_{r,m}(k+j) : \forall r, j)$ define os recursos alocados para cada subsistema m . O subproblema L consiste em resolver um conjunto de subproblemas $\{L_m\}$, um para cada subsistema $m \in \mathcal{M}$, sendo definido por:

$$L_m(ss_m) : z_m(ss_m) = \arg \min_{z_m} f_m(z_m) \quad (4a)$$

$$\text{s.a.: } h_m(z_m) = 0 \quad (4b)$$

$$g_m(z_m) \leq 0 \quad (4c)$$

Para $\forall r \in \mathcal{R}$, $j = 0, \dots, N_2 - 1$:

$$s_{r,m}^T u_m(k+j|k) \leq ss_{r,m}(k+j). \quad (4d)$$

Este trabalho adota uma abordagem onde o problema *master* otimiza sobre o espaço de decisão da alocação de recursos ss , seguido pela otimização dos subproblemas e o cálculo

das sensibilidades $\partial f_m / \partial ss$, as quais definem direções de descenso para a solução do problema *master* [5].

Como o objetivo do problema *master* consiste na soma dos objetivos dos subproblemas, as sensibilidades para o *master* podem ser facilmente calculadas a partir das sensibilidades dos subproblemas. Assim, as sensibilidades podem ser computadas em paralelo como parte da solução dos subproblemas.

O problema *master* da Eq. (3) pode ser resolvido por qualquer método baseado em gradiente, como o método do Ponto Interior (IP) ou Programação Quadrática Sequencial (SQP). Neste trabalho, o problema *master* é resolvido por um método do ponto interior.

Para o uso da abordagem de dois níveis, as sensibilidades são recuperadas da solução de uma reformulação do subproblema L_m dado na Eq. (4), como a seguir:

$$L_m(ss_m^*) : z_m(ss_m^*) = \arg \min_{z_m} f_m(z_m) \quad (5a)$$

$$\text{s.a.: } h_m(z_m) = 0 \quad (5b)$$

$$g_m(z_m) \leq 0 \quad (5c)$$

$$\forall r \in \mathcal{R}, j = 0, \dots, N_2 - 1 :$$

$$ss_{r,m}^T u_m(k+j|k) \leq ss_{r,m}(k+j) \quad (5d)$$

$$ss_{r,m}(k+j) - ss_{r,m}^*(k+j) = 0 \quad (5e)$$

de modo que as sensibilidades sejam calculadas como,

$$\left. \frac{\partial f(ss_m)}{\partial ss_{r,m}(k+j)} \right|_{ss=ss^*} = \lambda_{r,m}(k+j), \quad (6)$$

onde $\lambda_{r,m}(k+j)$ é o multiplicador de Lagrange associado com a restrição (5e) para as condições Karush-Kuhn-Tucker (KKT), [19], na solução $z_m(ss_m^*)$.

Os multiplicadores de Lagrange, ou neste caso, as sensibilidades, fornecem as direções pelas quais a solução atual do problema *master* pode ser aprimorada.

B. Decomposição de Benders

1) *Metodologia de Benders Padrão*: Partimos da definição dos subproblemas da decomposição de Benders. Para uma alocação de recursos factível ss , o subproblema é dado por:

$$BO(ss) : bo(ss) = \min_z \sum_{m=1}^M f_m(z_m) \quad (7a)$$

s.a.: Para $m = 1, \dots, M$

$$h_m(z_m) = 0 \quad (7b)$$

$$g_m(z_m) \leq 0 \quad (7c)$$

$$R_m z_m - S_m ss_m \leq 0 \quad (7d)$$

onde R_m e S_m são matrizes de dimensões adequadas que definem as restrições de recurso disponível em um dado instante. Neste problema, em particular, S_m é uma matriz identidade e $R_m z_m$ é efetivamente $\tilde{R}_m u_m$ já que somente os termos $s_{r,m}^T u_m(k+j|k)$ são necessários nas restrições.

Note que $bo(ss)$ induz um limite superior para ss factível, que resulta de um vetor ss que satisfaz as restrições (3b)-(3c), assim gerando um $BO(ss)$ factível. Claramente $bo(ss)$ pode ser calculado em paralelo como a seguir:

$$bo(ss) = \sum_{m=1}^M bo_m(ss_m) \quad (8)$$

onde,

$$BO_m(ss_m) : bo_m(ss_m) = \min_{z_m} f_m(z_m) \quad (9a)$$

$$\text{s.a.: } h_m(z_m) = 0 \quad (9b)$$

$$g_m(z_m) \leq 0 \quad (9c)$$

$$R_m z_m - S_m ss_m \leq 0. \quad (9d)$$

Considerando a iteração p do algoritmo de Benders, em que $ss^{(p)}$ é o vetor de alocação de recursos, e assumindo que $BO(ss^{(p)})$ é factível, obtemos uma desigualdade válida,

$$\alpha_{GB} \geq \sum_{m \in \mathcal{M}} f_m(z_m^{(p)}) + \sum_{m \in \mathcal{M}} \mu_m^{(p)T} [R_m z_m^{(p)} - S_m ss_m], \quad (10)$$

onde $\mu_m^{(p)}$ são os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições de recurso (9d), para a solução ótima $z_m^{(p)}$, e α_{GB} é o limite inferior do objetivo de P .

Então, (10) é o *corte de otimalidade* introduzido no problema *master* da decomposição de Benders. Devido às condições de complementaridade, as restrições locais (9b) e (9c) não fazem parte do plano de corte. O espaço de decisão do problema *master* de Benders consiste do vetor de alocação ss e do limite inferior α_B .

Para uma alocação de recursos infactível, o seguinte subproblema de factibilidade precisa ser resolvido,

$$BF(ss) : bf(ss) = \min_{\gamma \geq 0, z} \gamma \quad (11a)$$

$$\text{s.a.: for } m = 1, \dots, M$$

$$h_m(z_m) = 0 \quad (11b)$$

$$g_m(z_m) \leq \gamma \cdot e_m \quad (11c)$$

$$R_m z_m - S_m ss_m \leq \gamma \cdot e_m, \quad (11d)$$

onde $e_m = (1, 1, \dots, 1)$ é um vetor de dimensão adequada e γ é um escalar não negativo. O valor γ ótimo pode ser obtido resolvendo um subproblema auxiliar apenas para os BO_m infactíveis. Seja $\mathcal{M}_{\text{infeas}} = \{m \in \mathcal{M} : BO_m(ss_m) \text{ é infactível}\}$. Então $BF(ss)$ é resolvido como segue:

$$bf(ss) = \max \{bf_m(ss_m) : m \in \mathcal{M}_{\text{infeas}}\} \quad (12)$$

e, para todo $m \in \mathcal{M}_{\text{infeas}}$, é resolvido o seguinte problema:

$$BF_m(ss_m) : bf_m(ss_m) = \min_{\gamma_m \geq 0, z_m} \gamma_m \quad (13a)$$

$$\text{s.a.: } h_m(z_m) = 0 \quad (13b)$$

$$g_m(z_m) \leq \gamma_m \cdot e_m \quad (13c)$$

$$R_m z_m - S_m ss_m \leq \gamma_m \cdot e_m \quad (13d)$$

De fato, se ss_m é factível para BO_m , então o problema BF_m correspondente terá um valor ótimo $bf(ss_m) = 0$ e o problema de factibilidade não precisa ser resolvido. Assumindo que $ss^{(p)}$ é uma alocação infactível na iteração p e $\mathcal{M}^{(p)} \subset \mathcal{M}$ é o subconjunto de subproblemas com $\gamma_m = bf(ss^{(p)})$, então o *corte de factibilidade* é definido como a seguir:

$$\sum_{m \in \mathcal{M}^{(p)}} \left\{ \mu_{m,d}^{(p)T} g_m(z_m) + \mu_{m,e}^{(p)T} [R_m z_m^{(p)} - S_m ss_m] \right\} \leq 0 \quad (14)$$

em que $\mu_{m,d}^{(p)}$ e $\mu_{m,e}^{(p)}$ são os multiplicadores de Lagrange associados com as restrições (13c) e (13d), respectivamente.

Na iteração p um corte de otimalidade é obtido resolvendo $BO(ss^{(p)})$, quando $ss^{(p)}$ é factível, ou então um corte de factibilidade resolvendo $BF(ss^{(p)})$. Seja $\mathcal{O}^{(p)}$ e $\mathcal{F}^{(p)}$ os conjuntos com os índices para as iterações onde os cortes de otimalidade e de factibilidade são produzidos, respectivamente. Então, o problema *master* da decomposição de Benders na iteração p pode ser definido da seguinte forma:

$$BM(p) : \min_{ss \geq 0, \alpha_{GB}} \alpha_{GB} \quad (15a)$$

$$\text{s.a.: } Rss \leq s \quad (15b)$$

$$\alpha_{GB} \geq \sum_{m \in \mathcal{M}} f_m(z_m^{(i)}) + \sum_{m \in \mathcal{M}} \mu_m^{(i)T} [R_m z_m^{(i)} - S_m ss_m], \quad (15c)$$

$$i \in \mathcal{O}^{(p)}$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}^{(i)}} \left\{ \mu_{m,d}^{(i)T} g_m(z_m) + \mu_{m,e}^{(i)T} [R_m z_m^{(i)} - S_m ss_m] \right\} \leq 0, \quad (15d)$$

$$i \in \mathcal{F}^{(p)}$$

com R sendo uma matriz que expressa a restrição (3b). Note que $BM(p)$ é um problema de programação linear.

2) *Benders com Regularização de Nível*: Para um número elevado de subsistemas, foi observado que a decomposição de Benders, conforme apresentado em [5], apresenta baixa performance quanto à convergência para um ótimo global. Este comportamento motivou o emprego de uma estratégia de regularização. Conforme demonstrado em [20], uma estratégia de regularização pode auxiliar na velocidade de convergência da decomposição de Benders.

Uma variação do método de regularização é conhecido como Regularização de Nível (RN) [21], [22]. Operando no nível do *master*, o princípio que norteia o funcionamento da RN é relativamente simples: escolha uma solução candidata de um conjunto de níveis a fim de minimizar a distância entre a solução candidata e uma solução de referência, enquanto se impõe um valor máximo para o objetivo segundo o nível corrente.

Modifica-se o problema *master*, (15), com a introdução de um vetor de referência \hat{ss} para as variáveis de interesse e a alteração da função objetivo para a minimização da norma Euclidiana, a fim de se obter a distância mínima entre a solução candidata e a solução de referência, obtém-se:

$$BMR(p) : \min_{ss \geq 0, \alpha_{GB}} \|ss - \hat{ss}\|_2^2 \quad (16a)$$

$$\text{s.a.: } Rss \leq s \quad (16b)$$

$$(15c), (15d) \quad (16c)$$

$$\alpha_{GB} \leq F^{\text{nível}}, \quad (16d)$$

onde $F^{\text{nível}}$ estabelece uma restrição de nível (que define um conjunto de níveis), segundo a qual as soluções candidatas devem produzir um limite inferior α_{GB} com valor máximo $F^{\text{nível}}$. Note que BMR é um problema quadrático (QP).

Além disso, o modelo acima não fornece mais um limite inferior lb vinculado ao objetivo da solução ótima. Esta é talvez a principal diferença entre a decomposição de Benders com e sem regularização. Na primeira iteração, o limite superior ub e o limite inferior lb são arbitrariamente definidos.

Então, a regra para atualizar o parâmetro de nível $F^{\text{nível}}$ é definida como:

$$F^{\text{nível}} = lb + \mu \cdot (ub - lb), \quad (17)$$

onde $\mu \in [0, 1)$. Com esta regra de atualização, atualizar o ub significa diminuir o conjunto factível definido pela restrição de nível, enquanto aperta ainda mais o lb . O Algoritmo ?? formaliza o algoritmo de RN para decomposição de Benders, como em [22].

Algoritmo 1: Decomposição de Benders com RN.

```

1 Defina o limite inferior  $lb^{(0)} := -\infty$ , o limite superior
   $ub^{(0)} := \infty$  iniciais e tolerância  $\tau > 0$ .
2 Defina a referência inicial  $\widehat{ss}$  para a solução;
3 Defina o parâmetro  $\mu \in [0, 1)$  para atualizar o
  parâmetro de nível;
4  $\mathcal{O}^{(0)} := \emptyset$ ;  $\mathcal{F}^{(0)} := \emptyset$ ;  $p := 0$ ;
5 se  $\frac{ub^{(p)} - lb^{(p)}}{ub^{(p)}} \leq \tau$  então
6   | Pare;
7 senão
8   |  $p := p + 1$ ;
9   |  $F^{\text{nível}} = lb^{(p)} + \mu \cdot (ub^{(p)} - lb^{(p)})$ ;
10  | Resolva  $BMR(p)$  dado em (16) para obter uma
    | solução  $ss^{(p)}$  com objetivo  $\alpha_{\text{GB}}^{(p)}$ ;
11  | se  $BMR(p)$  é infactível então
12  |   |  $F^{\text{nível}} := \infty$ ;
13  |   | Resolva  $BM(p)$  dado em (15) e obtenha um  $lb$ 
    |   | válido;
14  |   | Defina o limite inferior  $lb^{(p+1)} := \alpha_{\text{GB}}^{(p)}$ ;
15  |   | Defina o limite superior  $ub^{(p+1)} := ub^{(p)}$ ;
16  |   | Vá para o Passo 5;
17  | senão
18  |   | Defina o limite inferior  $lb^{(p+1)} := \alpha_{\text{GB}}^{(p)}$ ;
19  | fim
20  | Obtenha a solução  $ss^{(p)}$  para  $BMR(p)$ ;
21  | Resolva  $\{BO_m(ss_m^{(p)})\}_{m \in \mathcal{M}}$  e obtenha a solução
    |  $z^{(p)}$  para  $BO(ss^{(p)})$ ;
22  | se  $z^{(p)}$  é factível para  $BO(ss^{(p)})$  então
23  |   | se  $ub^{(p)} > f(z^{(p)})$  então
24  |     |  $\widehat{ss} := ss^{(p)}$  e  $ub^{(p+1)} := f(z^{(p)})$ ;
25  |   | fim
26  |   | Adicione o corte de otimalidade (10) em  $\mathcal{O}^{(p)}$ 
    |   | e obtenha  $\mathcal{O}^{(p+1)}$ ;
27  |   | Defina  $\mathcal{F}^{(p+1)} := \mathcal{F}^{(p)}$  e vá para o Passo 5;
28  | senão
29  |   | Defina o limite superior  $ub^{(p+1)} := ub^{(p)}$ ;
30  |   | Resolva  $\{BF_m(ss_m^{(p)})\}_{m \in \mathcal{M}}$  e obtenha a
    |   | solução  $(ss^{(p)}, \gamma^{(p)})$  para  $BF(ss^{(p)})$ ;
31  |   | Adicione um corte de factibilidade (14) em
    |   |  $\mathcal{F}^{(p)}$  e obtenha  $\mathcal{F}^{(p+1)}$ ;
32  |   | Defina  $\mathcal{O}^{(p+1)} := \mathcal{O}^{(p)}$  e vá para o Passo 5;
33  | fim
34 fim
Saída:  $z^{(p)}$ ,  $lb^{(p)}$ ,  $ub^{(p)}$ 

```

IV. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para validar as abordagens de decomposição na solução de problemas com restrição de recursos e também fornecer uma visão do uso da computação paralela, avaliando os ganhos de tempo à medida que o número de processadores ou núcleos aumenta, alguns problemas sintéticos foram gerados aleatoriamente.

Instâncias do problema de MPC foram obtidas de maneira aleatória amostrando os parâmetros a partir de distribuições uniformes. Especificamente, as matrizes dinâmicas foram amostradas com base em uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, com todos os subsistemas tendo as seguintes dimensões: $x_m \in \mathbf{R}^2$, $y_m \in \mathbf{R}$, e $u_m, \Delta u_m \in \mathbf{R}^2$. Foi definida a matriz de penalização do erro Q_m como uma identidade I , enquanto a matriz de penalização das variações de controle W_m como $0.1I$.

O número de subsistemas foi escolhido do conjunto $M = \{20, 40, 80\}$. Os horizontes de controle e predição possuem o mesmo tamanho, sendo escolhidos do conjunto $T = \{4, 6, 8\}$. Os limites para as variáveis foram definidos da seguinte forma: $y_{\min} = -4$, $y_{\max} = 4$, $u_{\min} = 0$, $u_{\max} = 3$, $\Delta u_{\min} = -3$ e $\Delta u_{\max} = 3$. Somente um recurso é compartilhado por todos os subsistemas, $s_{\max} = 2$, para todos os tempos de amostragem.

A linguagem de programação Julia foi escolhida por ser uma nova abordagem para a computação numérica. Os resultados mostram que é possível alcançar o desempenho de linguagem de máquina sem sacrificar a conveniência de escrita de uma linguagem de alto nível [23].

A implementação foi realizada em um computador com processador Intel® Xeon™ CPU E5-2665 (2.40GHz e 20MB de cache), com 8 *cores*, e 40 GB de memória RAM, em um ambiente Linux. Portanto, de acordo com a necessidade de iterações paralelas, as instâncias do subproblema foram alocadas para serem resolvidas para cada núcleo pelo algoritmo.

Para a decomposição de dois níveis como mostrado nas Eq. (3) e (4), os subproblemas são problemas quadráticos (QP) e o problema *master* é um problema não-linear (NLP). Para resolver os subproblemas foi usado o *solver* Gurobi, na versão 9.0.1, e para resolver o problema *master* foi escolhido o *solver* Ipopt, na versão 3.12.10, onde a tolerância do Gurobi foi definida em 10^{-6} e no Ipopt em 10^{-4} .

Para a abordagem de decomposição de Benders, o problema *master* e os subproblemas foram configurados para serem resolvidos pelo *solver* Gurobi, e o intervalo relativo associado entre LB e UB foi definido como 10^{-1} (%).

Resultados para os experimentos numéricos são mostrados na Tabela I. A coluna denominada f^* mostra o objetivo ótimo global. Para cada instância dos problemas, o número de *cores*, ou *workers*, são escolhidos do conjunto $\{1, 2, 4, 8\}$. O tempo de CPU é mostrado a fim de comparar a *performance* das abordagens propostas e também o quanto o uso de computação paralela oferece redução no tempo para encontrar a solução ótima f^* . O limite de tempo para solução em cada uma das abordagens foi definido em 600 *s*.

A Fig. 1 fornece a distância percentual da solução, em relação ao valor ótimo, do algoritmo de otimização de dois níveis em função do tempo computacional. Já a Fig. 2 apresenta a

TABELA I
ANÁLISE COMPUTACIONAL DAS DECOMPOSIÇÕES DE
BENDERS E DOIS NÍVEIS

M	T	Cores	f^*	Dois Níveis		Benders	
				f	CPU(s)	f	CPU(s)
40	4	1	0.3504	0.3504	3.46	0.3504	251.57
		2			4.49		211.06
		4			5.20		205.64
		8			4.56		195.03
	6	1	0.7199	0.7199	13.32	0.7211	600
		2			12.33		
		4			10.38		
		8			7.70		
	8	1	4.4881	4.4881	81.60	4.5069	600
		2			59.46		
		4			41.04		
		8			34.25		
4	1	1.4774	1.4774	10.86	1.4798	600	
	2			9.93			
	4			5.57			
	8			6.57			
40	6	1	3.8698	3.8698	133.76	3.9290	600
		2			103.80		
		4			56.20		
		8			47.75		
	8	1	22.4669	22.4669	23.73	22.6710	600
		2			17.10		
		4			8.90		
		8			6.57		
	4	1	3.9184	3.9184	254.15	3.9667	600
		2			185.87		
		4			143.43		
		8			123.96		
80	6	1	6.3187	6.3187	35.80	6.5900	600
		2			21.51		
		4			19.22		
		8			14.73		
	8	1	16.2753	16.2753	82.15	16.9513	600
		2			45.88		
		4			35.48		
		8			26.96		

trajetória dos limites superior e inferior da BD, mostrando a convergência em função tempo computacional.

Na Tabela I são apresentados alguns resultados referentes à capacidade das duas abordagens de decomposição na solução de instâncias com um número elevado de subsistemas. Como pode ser observado, a utilização da otimização de dois níveis se mostra mais eficiente, tanto em tempo computacional quanto na capacidade de convergir para a solução global.

Além da convergência mais lenta, a BD teve dificuldade em convergir para a solução, dentro da tolerância definida e tempo limite estipulado, mesmo aumentando o número de CPU workers. Na instância $M = 20$ e $T = 4$, a única instância que a BD atingiu a solução ótima, é possível ver uma melhora no tempo de solução conforme o número de CPU workers foi incrementado, como esperado.

Por outro lado, é possível observar que, em todas as instâncias resolvidas, a decomposição de dois níveis encontrou a solução global e a redução do tempo computacional foi significativa, com o aumento no número de CPU workers.

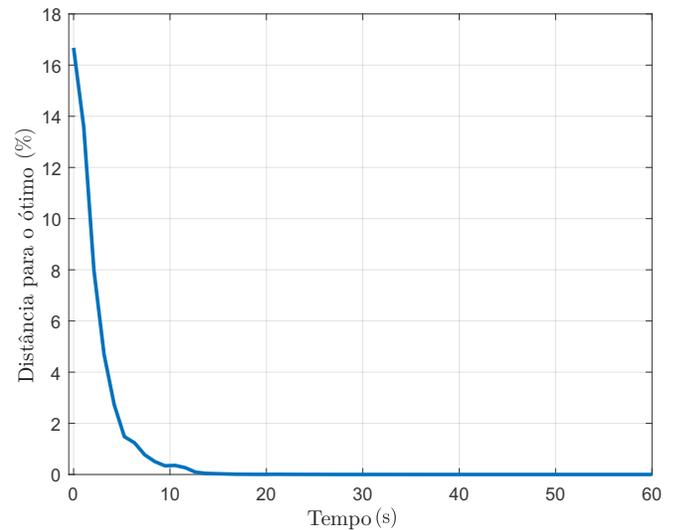


Fig. 1. Distância percentual da solução da otimização de dois níveis, aplicado ao problema $M = 40$ e $T = 6$.

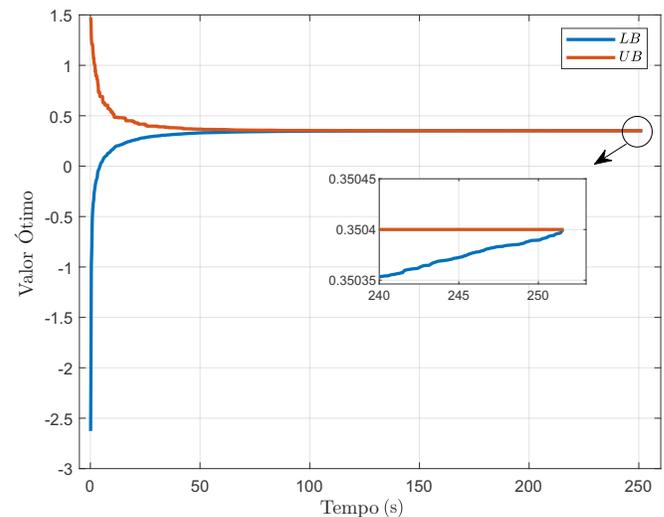


Fig. 2. Trajetória dos limites gerados pela decomposição de Benders, para o problema $M = 20$ e $T = 4$.

Entretanto à medida que o número de CPU workers aumenta, o tempo para obter as soluções ótimas diminui, mas não linearmente. Na Fig. 3 é apresentado o *Speedup ratio*, definido por $su_{ratio} = T(1)/T(N)$, onde T é o tempo computacional e N o número de CPU workers. Ainda na Fig. 3, à medida que o número de núcleos aumenta, a eficiência paralela definida como $pe = T(1)/T(N)/N$ diminui. Isso se deve ao fato de que, com o aumento do tempo necessário para alocar as tarefas nos workers, o ganho em paralelizar o problema diminui.

Portanto, com tempos computacionais reduzidos, os ganhos de desempenho – com o aumento de núcleos em um determinado ponto – não serão tão eficientes. No entanto, o ganho obtido já é relevante para os estudos de problemas de decomposição, mesmo que na BD não tenha sido obtido um ganho significativo na solução de problemas maiores, para a única instância do problema que foi obtida a solução ($M = 20$ e $T = 4$), pode-se ver que há um ganho em utilizar computação paralela.

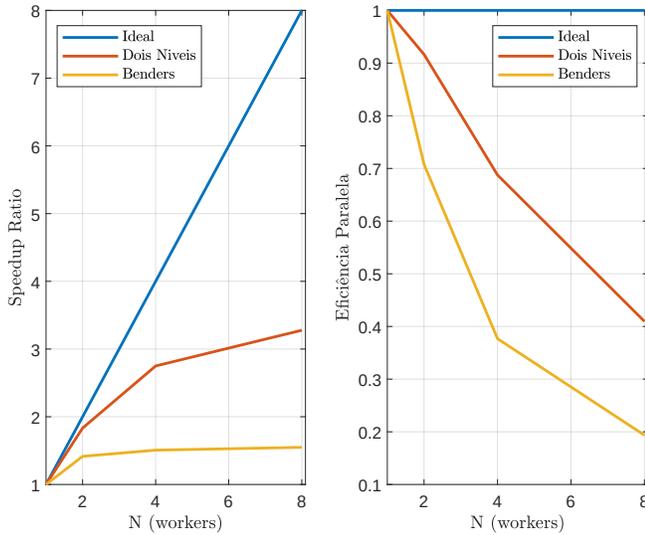


Fig. 3. Comparação entre as técnicas de decomposição de acordo com as métricas de *Speedup* e eficiência paralela.

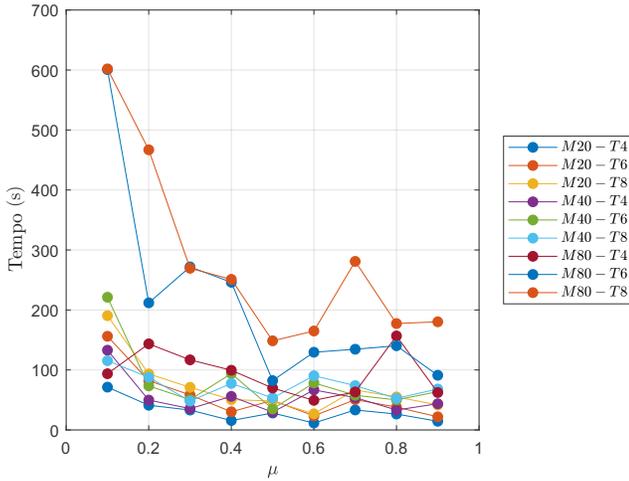


Fig. 4. Comparação dos tempos computacionais da BD com regularização de nível aplicada às instâncias de interesse, para diferentes valores de μ .

A. Análise de Benders com Regularização de Nível

Dados os resultados apresentados anteriormente em relação aos tempos computacionais da decomposição de Benders, uma técnica de regularização de nível foi utilizada como forma de buscar um aprimoramento dos tempos computacionais. Para tanto, as instâncias previamente utilizadas foram submetidas a um processo iterativo, onde buscou-se o melhor multiplicador μ para atualizar o parâmetro de nível, F^{nivel} .

Conforme resultados apresentados na Fig. 4, a escolha do parâmetro μ tem forte influência no tempo de convergência da decomposição de Benders com regularização de nível.

De posse do melhor parâmetro μ para cada instância, foi realizado um experimento de paralelismo para as instâncias de interesse, de forma a comparar os resultados com o Benders tradicional. Os resultados são apresentados na Tabela II.

Pode-se perceber que foi possível diminuir as grandezas

TABELA II
ANÁLISE COMPUTACIONAL DA DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM REGULARIZAÇÃO

M	T	Cores	f^*	Benders com RN			
				f	CPU(s)	GAP(%)	μ
4	4	1	0.3504	0.3513	14.49	0.03	0.9
		2			11.36		
		8			9.21		
	6	1	0.7199	0.7207	21.91	0.03	0.9
		2			17.00		
		8			14.12		
8	4	1	4.4881	4.4898	41.65	0.01	0.9
		2			33.93		
		8			26.44		
	8	1	1.4774	1.4777	29.58	0.09	0.5
		2			24.29		
		8			18.07		
40	6	1	3.8698	3.8710	34.97	0.07	0.5
		2			31.42		
		8			22.93		
	8	1	22.4669	22.4690	52.68	0.02	0.8
		2			27.79		
		8			19.45		
80	6	1	6.3184	3.9190	49.30	0.05	0.6
		2			45.09		
		8			30.31		
	8	1	16.2753	16.2790	91.13	0.04	0.9
		2			83.77		
		8			58.50		
8	1	16.2753	16.2790	148.54	0.05	0.5	
	2			117.59			
	8			87.43			
					72.61		

envolvidas nos tempos computacionais das instâncias de interesse desse trabalho. Apesar dos resultados alcançados para as instâncias não zerarem o GAP dual, o ganho computacional derivado da aplicação da regularização de nível se torna bastante atrativo, principalmente em problemas muito grandes (envolvendo muitas variáveis) [22], onde a convergência para um valor sub-ótimo já é considerada de interesse.

V. APLICAÇÃO AO CARREGAMENTO DE BATERIAS

De forma a ilustrar a utilização das decomposições apresentadas e torná-las menos abstratas, nesta sessão é apresentado um problema exemplo de carregamento de baterias. Considere uma estação de carregamento de carros elétricos, onde cada carro é representado por um sistema independente (subproblema) que se reporta ao recurso total disponível na estação (*master*). Para cada carro há um estado de carga (*SoC*) associado a sua bateria, que pode ser definido como em [24]:

$$SoC(k+1) = \left(SoC(k) \pm \frac{i(k)\eta}{\Theta} \right) \times 100, \quad \forall k, \quad (18)$$

onde $i(k)$ denomina a corrente $[A]$ aplicada no instante k que, dependendo do seu sinal, determina se a bateria está carregando ou descarregando, o que influencia também no valor de η que define a eficiência de carga da bateria; Θ define a capacidade de carga da bateria em $[Ah]$; e SoC varia dentro do conjunto $[0, 100]$ (%).

O problema de MPC (1) com restrição de recursos limitados pode assim ser empregado na gestão do carregamento de baterias, conforme dado pela Eq. (18). O problema P , a fim de demonstrar uma aplicação prática, segue abaixo:

$$\min J = \sum_{m=1}^M \sum_{j=N_1}^{N_2} \|y_m(k+j|k) - w_m(k+j)\|_{Q_m}^2 + \sum_{m=1}^M \sum_{j=0}^{N_u-1} \|\Delta u_m(k+j|k)\|_{W_m}^2 \quad (19a)$$

s.a.: Para $m \in \mathcal{M}$:

$$SoC_m(k+j+1|k) = SoC_m(k+j|k) + \frac{\eta}{\Theta_m} u_m(k+j|k) \quad j = 0, \dots, N_2 - 1 \quad (19b)$$

$$y_m(k+j|k) = SoC_m(k+j|k), \quad j = N_1, \dots, N_2 \quad (19c)$$

$$u_m(k+j|k) = \begin{cases} u_m(k+j-1|k) + \Delta u_m(k+j|k), & j = 0, \dots, N_u - 1 \\ u_m(k+j-1|k), & j = N_u, \dots, N_2 - 1 \end{cases} \quad (19d)$$

$$SoC_m(k|k) = SoC_m(k) \quad (19e)$$

$$u_m(k-1|k) = u_m(k-1) \quad (19f)$$

$$y_m^{\min} \leq y_m(k+j|k) \leq y_m^{\max}, \quad j = N_1, \dots, N_2 \quad (19g)$$

$$u_m^{\min} \leq u_m(k+j|k) \leq u_m^{\max}, \quad j = 0, \dots, N_u - 1 \quad (19h)$$

$$\Delta u_m^{\min} \leq \Delta u_m(k+j|k) \leq \Delta u_m^{\max}, \quad j = 0, \dots, N_u - 1 \quad (19i)$$

Para $r = 1, \dots, R, j = 0, \dots, N_2 - 1$:

$$\sum_{m=1}^M s_{r,m}^T u_m(k+j|k) \leq s_r^{\max}(k+j), \quad (19j)$$

onde: SoC_m é o estado de carga para cada bateria em um veículo m ; u_m é a corrente aplicada à bateria para carregamento; e Θ_m é a capacidade de carga da bateria de cada veículo m dado em $[Ah]$. Neste exemplo consideramos somente carga de baterias, portanto o sinal de corrente é não-negativo e por consequência o valor da eficiência de carga (η) é constante para todas os veículos.

Como pode ser visto na Eq. (19c), a saída do sistema y_m é o valor do estado SoC_m , logo, consideramos que o estado é observável, caso contrário seria necessário a aplicação de um observador de estados ou filtro de Kalman [25], por exemplo.

Logo, o objetivo do problema definido em (19) é o carregamento de baterias. Então, definindo uma referência para que todas as baterias tenham SoC de 100%, minimiza-se o erro

de seguimento de referência e também o esforço de controle aplicado aos subsistemas.

A. Aplicação em uma Instância Exemplo

Considere um problema de carregamento de baterias com as seguintes características, $M = 4$, ou seja, quatro veículos, que possuem baterias idênticas com capacidade de carga $\Theta_m = 100 [Ah]$, uma eficiência de carga $\eta = 0,98$. O tempo de amostragem escolhido foi $T_s = 5$ [min], no horizonte de predição e controle foram consideradas $T = 12$ amostras, o recurso máximo foi $s^{\max} = 100 [A]$ para todos os instantes e carros, e o limite de injeção de corrente assim como sua variação foram definidos como $u^{\max} = \Delta u^{\max} = 50 [A]$ e $\Delta u^{\min} = -50 [A]$. O resultado da aplicação da decomposição de dois níveis à instância de carregamento de baterias é apresentado na Fig. 5.

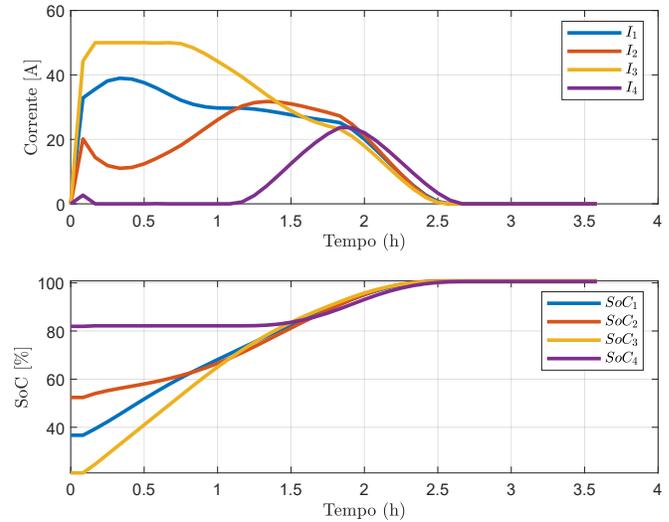


Fig. 5. Aplicação de otimização de dois níveis ao problema de carregamento de baterias.

Como se pode perceber, todos os subsistemas (baterias dos veículos) foram carregados de forma independente, utilizando-se a formulação distribuída, respeitando o recurso máximo disponível e os limites das variáveis definidos.

O paralelismo no problema ilustrativo pode se mostrar útil, por exemplo, ao se considerar que cada um dos veículos possui sua própria dinâmica de carregamento (subsistema), que é transparente à estação (*master*). Dessa forma, considera-se que o principal ganho obtido pela decomposição no exemplo em questão é organizacional.²

VI. CONCLUSÃO

Neste trabalho, uma estrutura distribuída do problema de controle permitiu a síntese de abordagens hierárquicas que dividem os cálculos entre um problema *master*, responsável pela coordenação, e um conjunto de subproblemas que podem ser resolvidos simultaneamente ou em paralelo. Para esse fim,

²Para o caso ilustrativo o tempo de cálculo é de respectivamente 112.69s, 108.88s e 108.12s para 1, 2 e 4 cores.

uma abordagem hierárquica foi derivada da otimização em dois níveis e outra da decomposição de Benders.

O desempenho das decomposições foi avaliado em experimentos numéricos, que consistiram na solução de um problema de MPC para uma série de sistemas dinâmicos com recursos limitados, considerando os ganhos de tempo com o uso de processadores com vários núcleos, para as duas abordagens escolhidas.

Uma redução significativa no tempo foi induzida na otimização de dois níveis com o emprego de computação paralela, mas não linearmente à medida que o número de núcleos aumenta. Infelizmente, a decomposição de Benders não obteve sucesso uniforme em todas as suas aplicações. Nota-se que o algoritmo frequentemente converge de maneira lenta quando aplicado aos problemas testados.

Assim, foi introduzido uma técnica de regularização de nível, para a decomposição de Benders, com a finalidade de obter uma melhor *performance* neste método, e novas análises computacionais foram realizadas.

Foram também realizados experimentos – em um problema ilustrativo de carregamento de baterias de veículos – para validação da coordenação do controle entre o problema *master* e os subproblemas, utilizando a otimização de dois níveis.

Para trabalhos futuros sugere-se o uso da formulação de Benders para otimização e controle de subsistemas que possam ser ativados, e desativados, dinamicamente (introdução de variáveis binárias) e uma extensão para comparação com o método de *Outer Approximation*.

REFERÊNCIAS

- [1] H. Scherer, M. Pasamontes, J. L. Guzmán, J. D. Álvarez, E. Camponogara, and J. E. Normey-Rico, "Process control efficient building energy management using distributed model predictive control," *Journal of Process Control*, vol. 24, pp. 740–749, 2013.
- [2] H. Scherer, E. Camponogara, J. E. Normey-Rico, J. D. Álvarez, and J. L. Guzmán, "Distributed MPC for resource-constrained control systems," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 36, no. 3, pp. 272–291, may 2015. [Online]. Available: <http://doi.wiley.com/10.1002/oca.2151>
- [3] E. F. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*, 2nd ed. Springer Science & Business Media, 2007.
- [4] J. Sandell, N. P. Varaiya, M. Athans, and M. Safonov, "Survey of decentralized control methods for large scale systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 2, pp. 108–128, 1978.
- [5] E. Camponogara, H. Scherer, L. Biegler, and I. Grossmann, "Hierarchical decompositions for MPC of resource constrained control systems: applications to building energy management," *Optimization and Engineering*, pp. 1–26, may 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s11081-020-09506-x>
- [6] B. Colson, P. Marcotte, and G. Savard, "An overview of bilevel optimization," *Annals of Operations Research*, vol. 153, no. 1, pp. 235–256, 2007.
- [7] J. F. Benders, "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems," *Numerische Mathematik*, vol. 4, no. 1, pp. 238–252, dec 1962.
- [8] R. Rahmani, T. G. Crainic, M. Gendreau, and W. Rei, "The Benders decomposition algorithm: A literature review," *European Journal of Operational Research*, vol. 259, no. 3, pp. 801–817, 2017. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2016.12.005>
- [9] D. L. Eager, J. Zahorjan, and E. D. Lazowska, "Speedup versus efficiency in parallel systems," *IEEE Transactions on Computers*, vol. 38, no. 3, pp. 408–423, 1989.
- [10] A. Sinha, P. Malo, and K. Deb, "A review on bilevel optimization: From classical to evolutionary approaches and applications," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 22, no. 2, pp. 276–295, 2018.
- [11] S. Dempe, V. Kalashnikov, G. A. Pérez-Valdés, and N. Kalashnykova, *Bilevel Programming Problems*, ser. Energy Systems. Springer, 2015.
- [12] I. E. Grossmann, "Review of nonlinear mixed-integer and disjunctive programming techniques," *Optimization and Engineering*, vol. 3, no. 3, pp. 227–252, 2002.
- [13] P. Garcia-Herreros, L. Zhang, P. Misra, E. Arslan, S. Mehta, and I. E. Grossmann, "Mixed-integer bilevel optimization for capacity planning with rational markets," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 86, pp. 33–47, 2016.
- [14] J. M. Arroyo, "Bilevel programming applied to power system vulnerability analysis under multiple contingencies," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 4, no. 2, pp. 178–190, 2010.
- [15] S. Afşar, L. Brotcorne, P. Marcotte, and G. Savard, "Achieving an optimal trade-off between revenue and energy peak within a smart grid environment," *Renewable Energy*, vol. 91, pp. 293–301, 2016.
- [16] J. Behnamian, "Decomposition based hybrid VNS-TS algorithm for distributed parallel factories scheduling with virtual corporation," *Computers & Operations Research*, vol. 52, pp. 181–191, 2014.
- [17] Y. Adulyasak, J.-F. Cordeau, and R. Jans, "Benders decomposition for production routing under demand uncertainty," *Operations Research*, vol. 63, no. 4, pp. 851–867, 2015.
- [18] Q. Wang, J. D. McCalley, T. Zheng, and E. Litvinov, "Solving corrective risk-based security-constrained optimal power flow with Lagrangian relaxation and Benders decomposition," *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 75, pp. 255–264, 2016.
- [19] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, 10th ed. Cambridge University Press, 2012.
- [20] A. Ruszczyński and A. Świątanowski, "Accelerating the regularized decomposition method for two stage stochastic linear problems," *European Journal of Operational Research*, vol. 101, no. 2, pp. 328–342, 1997.
- [21] W. Van Ackooij, W. de Oliveira, and Y. Song, "On level regularization with normal solutions in decomposition methods for multistage stochastic programming problems," *Computational Optimization and Applications*, vol. 74, no. 1, pp. 1–42, 2019.
- [22] B. Colonetti and E. Finardi, "Combining Lagrangian relaxation, Benders decomposition, and the level bundle method in the stochastic hydrothermal unit-commitment problem," *International Transactions on Electrical Energy Systems*, vol. 1, pp. 1–10, 2020.
- [23] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, and V. B. Shah, "Julia: A fresh approach to numerical computing," *SIAM Review*, vol. 59, no. 1, pp. 65–98, jan 2017.
- [24] R.-E. Tudoroiu, M. Zaheeruddin, S.-M. Radu, and N. Tudoroiu, "Estimation techniques for state of charge in battery management systems on board of hybrid electric vehicles implemented in a real-time MATLAB/SIMULINK environment," in *New Trends in Electrical Vehicle Powertrains*. IntechOpen, 2019, ch. 4, p. 28.
- [25] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, p. 35, 1960. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1115/1.3662552>



Pedro Henrique V. Bento da Silva is a M.Sc. student at Federal University of Santa Catarina. He received his B.Sc. degree in control and automation engineering at the Maringá University Center in 2017. His research interests include systems optimization, distributed decision making and dynamic systems control.



Laio Oriel Seman received the Ph.D. degree in electrical engineering from the Federal University of Santa Catarina in 2017. His research interests include multivariate data analysis, reconfigurable systems and mathematical programming.



Eduardo Camponogara received the Ph.D. degree in electrical and computer engineering from Carnegie Mellon University, in 2000. He joined the faculty of the Department of Automation and Systems Engineering at the Federal University of Santa Catarina, Brazil, in 2002. His research interests include systems optimization, distributed control and optimization, and applications in oil, energy, and transportation.