

Bernoulli-Euler Finite-Element Modelling of Vibration Modes on Axisymmetric Containers for Level Measurement

J. Sanchez-Diaz, J. Ramirez-Cortes, *Senior Member, IEEE*, P. Gomez-Gil, *Senior Member, IEEE*, P. Rodriguez-Montero, V. Alarcon-Aquino, *Senior Member, IEEE*, and P. Escamilla-Ambrosio, *Senior Member, IEEE*

Abstract—Liquid level measurement inside closed containers is an essential process in control systems, quality control, and many real scenarios in the daily life. In this work, an analysis of vibration modes behavior of two axisymmetric containers and an immersed beam, aiming to liquid level measurement using acoustic resonance, is presented. In acoustic resonance, the vibration pattern produced in the container when it is excited by an external force is related to the liquid level and its physical characteristics. Vibration modes are analyzed using Bernoulli-Euler approach and finite-element modelling (FEM) in COMSOL. Results show a good correspondence of normalized frequency vibration modes shifting vs liquid level. Experimental results are consistent with theoretical and simulated FEM analysis, with an error lower than 1% in the first longitudinal vibration mode.

Keywords—Acoustic resonance, Bernoulli-Euler, COMSOL, FEM, Liquid level, Vibration modes.

I. INTRODUCCIÓN

LA medición de nivel de líquido en contenedores es un procedimiento necesario en diversos escenarios industriales tales como monitoreo, control y almacenamiento, procesos de calidad, mantenimiento o supervisión, entre muchos otros. Para tal efecto existen diversos métodos que utilizan una gran variedad de sensores disponibles en la actualidad. En [1] se presenta una revisión del estado del arte y evaluación de desempeño de algunos de estos métodos. Entre los principales enfoques reportados destacan los siguientes: sensores capacitivos [2]–[4], ultrasonido [5], [6], microondas [7], rejillas de Bragg y fibras ópticas [8], [9], ondas milimétricas moduladas en frecuencia [10], resonancia de Helmholtz [11] y acústica [12]–[16]. Cada uno de estos métodos presenta ventajas y desventajas en su evaluación, considerando características tales como precisión, exactitud, nivel de requerimientos técnicos, costo, invasión durante la medición, etc. Las principales ventajas del uso de resonancia radican principalmente en aspectos

tales como la no invasión, el hecho de ser un procedimiento no destructivo y que puede ser efectuado de manera rápida en procesos donde el tiempo es un factor crítico. El presente trabajo se ubica dentro del grupo de técnicas que hacen uso de resonancia acústica. La frecuencia de resonancia y modos de vibración asociados están directamente relacionados con el nivel del contenido, siendo afectados también por características del material, geometría del contenedor y tipo de líquido. El fundamento en resonancia acústica es la excitación de las paredes del contenedor por medio de un estímulo externo y la evaluación de las vibraciones que se producen en la superficie de éste [17]. El comportamiento de tales vibraciones entrega información del nivel de líquido en el contenedor, así como otros parámetros relacionados al líquido y material de construcción. Se pueden encontrar en la literatura trabajos recientes que describen algunos enfoques relacionados con el tema, así como su pertinencia en el desarrollo de nuevas metodologías. En [18] se presenta un análisis del comportamiento de las vibraciones en contenedores sellados cuando son estimulados por una fuerza impulsiva. Las vibraciones son medidas por medio de un acelerómetro y por un micrófono colocado en la tapa del contenedor. Aunque el interés del artículo está enfocado principalmente en la medición de presión, se presentan también estudios sobre los efectos del nivel y la densidad del contenido. En [19] se describe un estudio sobre el comportamiento de la frecuencia de mayor energía presente en contenedores de gas L.P. cuando son excitados por una fuerza impulsiva. En dicho artículo se presenta también un modelo mecánico equivalente del contenedor, así como el desplazamiento de frecuencia generado por la presencia del líquido para diversos tipos de contenedores. En [20] se presenta una patente en la cual es posible determinar el nivel de contenido dentro de cilindros de gas doméstico utilizando un teléfono inteligente. Este tipo de métodos de medición tiene dos características de interés para procesos industriales y de calidad: no es invasivo y la adquisición y procesamiento de información puede hacerse en forma expedita, sin embargo, los resultados muestran que se requiere de una adecuada calibración y es altamente dependiente de las características del contenedor. En [21] se propone un método para la estimación del nivel de mercurio dentro de un contenedor por medio de las vibraciones producidas en su superficie haciendo uso de un martillo y empleando acelerómetros como sensores. El resultado del procesamiento teórico muestra el comportamiento

J.C. Sanchez-Diaz is with the Electronics Department, National Institute of Astrophysics, Optics, and Electronics, Puebla, Mexico.

J.M. Ramirez-Cortes is with the Electronics Department, National Institute of Astrophysics, Optics, and Electronics, Puebla, Mexico.

P. Gomez-Gil is with the Computer Science Department, National Institute of Astrophysics, Optics, and Electronics, Puebla, Mexico.

P. Rodriguez-Montero is with the Optics Department, National Institute of Astrophysics, Optics, and Electronics, Puebla, Mexico.

V. Alarcon-Aquino is with the Department of Computer Systems and Electronic Engineering, Universidad de las Americas, Puebla, Mexico.

P.J. Escamilla-Ambrosio is with the Centro de Investigación en Computación (CIC), Instituto Politécnico Nacional, Mexico.

de los diversos modos de vibración como función del nivel de llenado del contenedor. También se muestra en ese artículo la presencia de las denominadas “regiones de meseta” que son zonas en la que los modos de vibración presentan un desplazamiento de frecuencia mínimo con respecto al cambio en el nivel de líquido. En [15] se presenta un estudio similar para el caso de un tubo capilar sujetado firmemente por sus extremos con un contenido de mercurio. El sensor empleado consta de un imán sujeto a la superficie del tubo y una bobina como excitador/sensor, siendo la medida de la impedancia el parámetro para determinar el nivel de llenado del tubo. En el mencionado trabajo los autores enfatizan el estudio del primer modo de vibración, e incorporan en el análisis los efectos de la densidad del líquido y el espesor de la pared del tubo en los desplazamientos de frecuencia. Este mismo estudio presenta resultados semejantes referentes al comportamiento de los modos de vibración relativo al nivel de líquido con respecto al experimento de [21], a pesar de que en este caso el tubo se encuentra firmemente sujeto por ambos extremos variando las condiciones de frontera. En [16] se presenta un estudio experimental sobre el comportamiento de la frecuencia de mayor energía utilizando un conjunto de contenedores con diversas características, incorporando técnicas de inteligencia computacional tales como lógica difusa y redes neuronales para la estimación del nivel. Con base en los trabajos referenciados se puede establecer que la información obtenida por medio del análisis del desplazamiento simultáneo de los diversos modos de vibración puede ser utilizada para mejorar la resolución en el proceso de medición de nivel, al reducir la incertidumbre originada por la presencia de las regiones de meseta. Para el caso de contenedores reales en tres dimensiones, los modelos de vibración son computacionalmente complejos y tardados, por lo que una aproximación por medio del modelo de viga delgada llevado a la estructura general de sus paredes permite una simplificación del proceso. En el presente artículo se presenta una comparación entre modelado por análisis de elemento finito y resultados experimentales del comportamiento de los modos de vibración generados en la superficie de una viga redonda, y su uso en el modelado un contenedor cilíndrico y uno cónico. El objetivo es determinar un patrón común que sirva de base para generar un modelo basado en modos de vibración para determinar el nivel de líquido en el interior de contenedores axisimétricos.

II. TEORÍA DE VIGAS DE BERNOULLI-EULER

La teoría de Bernoulli-Euler para vigas delgadas es un marco de referencia relevante para abordar el fenómeno de resonancia en contenedores que se encuentran parcialmente llenados con un líquido. El modelado de vibración en contenedores es desarrollado alrededor del principio de vibraciones en vigas transversales [22]. Una viga delgada sujeta a una fuerza transversal es mostrada en la Fig. 1. La Fig. 2 muestra un diagrama de cuerpo libre para la misma viga considerando un diferencial dx de longitud. En la Fig. 2, $M(x, t)$ representa un momento de torsión, $V(x, t)$ es la fuerza cortante y $f(x, t)$ denota a una fuerza transversal externa. La fuerza de inercia actuando en el elemento de la viga está dada por

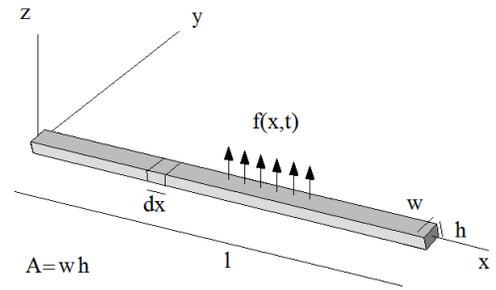


Fig. 1. Viga delgada sujeta a una fuerza transversal.

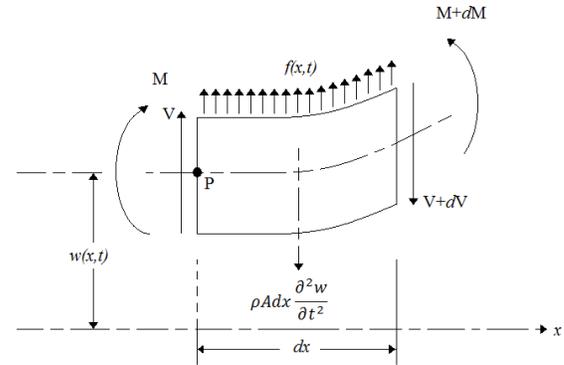


Fig. 2. Diagrama de cuerpo libre para una viga con un diferencial de longitud dx .

$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$, con lo cual la fuerza total en dirección de z queda expresada tal como se indica en (1):

$$(-V + dV) + f(x, t) + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad , \quad (1)$$

donde ρ es la densidad de masa y $A(x)$ el área transversal de la viga. La ecuación de equilibrio de momento en el eje 'y' pasando a través del punto P en la figura 2 implica:

$$(M + dM) - (V + dV) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad . \quad (2)$$

Escribiendo los términos diferenciales como $dV = \frac{dV}{dx} dx$ y $dM = \frac{dM}{dx} dx$ e ignorando los términos que involucran segundas potencias en dx debido a su pequeño valor, se tiene:

$$-\frac{dV}{dx}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad , \quad (3)$$

$$-\frac{dM}{dx} dx - V(x, t) = 0 \quad . \quad (4)$$

Usando la relación $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ se obtiene:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad . \quad (5)$$

De la teoría de Bernoulli-Euler o de las vigas delgadas, la relación entre el momento de flexión y la deflexión puede ser expresada de la forma:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad , \quad (6)$$

donde E es el Módulo de Young e $I(x)$ es el momento de inercia de la sección de la viga en el eje y . Combinando estas relaciones, la ecuación de movimiento de la vibración lateral forzada de una viga no uniforme se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad . \quad (7)$$

Para una viga uniforme (7) se reduce a:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad . \quad (8)$$

A. Solución general de las ecuaciones de viga

Para obtener la solución general de la ecuación de viga de Bernoulli–Euler que describe a las vibraciones libres de la misma, se puede escribir (8) en la siguiente forma:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad , \quad (9)$$

en donde:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad . \quad (10)$$

Por medio del método de separación de variables, se propone una solución a esta ecuación diferencial de la forma:

$$w(x, t) = W(x)T(t) \quad . \quad (11)$$

Sustituyendo (11) en (9) y reordenando términos se tiene:

$$\frac{T}{\frac{d^2 T}{dt^2}} = \frac{-W}{c^2 \frac{d^4 W}{dx^4}} = \frac{-1}{\omega^2} \quad . \quad (12)$$

Esta igualdad conduce a la siguiente expresión:

$$c^2 \frac{d^4 W}{dx^4} - \omega^2 W = 0 \quad . \quad (13)$$

Suponiendo una solución de la forma $W = Be^{rx}$, se obtiene su correspondiente polinomio característico:

$$c^2 r^4 - \omega^2 = 0 \quad . \quad (14)$$

A partir de (14) las soluciones para r están dadas por:

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{c}}; r_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\omega}{c}} \quad . \quad (15)$$

La solución general de la ecuación (9) para $W(x)$ es una combinación lineal de la forma:

$$W(x) = \sum_{p=1}^4 B_p e^{r_p x} \quad . \quad (16)$$

Debido a que $W(x)$ es una solución real y ω es real, es posible escribir (16) como:

$$W(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) + C_3 \cosh(\beta x) + C_4 \sinh(\beta x) \quad (17)$$

en donde:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{c}} \quad . \quad (18)$$

Una notación conveniente empleada en el desarrollo de posteriores cálculos es elevar a la cuarta potencia a β obteniendo:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad . \quad (19)$$

Operando sobre (19) se obtiene:

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad . \quad (20)$$

Para calcular $T(t)$ se procede de manera similar al desarrollo anterior a partir de (12) para la igualdad restante, con lo que se puede encontrar:

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad , \quad (21)$$

donde las constantes C_1, C_2, C_3, C_4, A y B pueden calcularse de las condiciones de frontera. $W(x)$ representa al modo normal o ecuación característica.

B. Ecuación de viga con masa distribuida

Una forma de modelar una viga que se encuentra en inmersión dentro de un líquido es a través del modelo de masa distribuida. En este método se visualiza a la viga como si estuviera conformada por dos materiales de distinta densidad, siendo el más denso aquel que se encuentra sumergido dentro del líquido. Con propósitos de análisis se hace uso del modelo de referencia mostrado en la Fig. 3. A partir de este modelo de referencia se pueden determinar las siguientes condiciones de frontera:

$$w_1(-l_w) = w_1'(-l_w) = w_1''(-l_w) = w_1'''(-l_w) = 0 \quad . \quad (22)$$

Las condiciones de frontera en el origen quedan establecidas en las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} w_1(0) &= w_2(0), w_1'(0) = w_2'(0), \\ w_1''(0) &= w_2''(0), w_1'''(0) = w_2'''(0) \end{aligned} \quad . \quad (23)$$

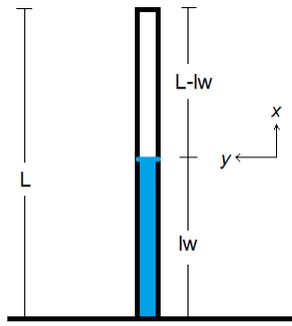


Fig. 3. Modelo de referencia para el método de masa distribuida.

La solución general dada por (17) toma la forma:

$$\begin{aligned} w_1 &= C_{11}\cos(\beta_1x) + C_{12}\sin(\beta_1x) + \\ &\quad + C_{13}\cosh(\beta_1x) + C_{14}\sinh(\beta_1x) \\ w_2 &= C_{21}\cos(\beta_2x) + C_{22}\sin(\beta_2x) + \\ &\quad + C_{23}\cosh(\beta_2x) + C_{24}\sinh(\beta_2x) \end{aligned} \quad (24)$$

en donde:

$$\begin{aligned} \beta_1^4 &= \frac{(m_t + m_w)\omega^2}{EI}, \\ \beta_2^4 &= \frac{(m_t)\omega^2}{EI} \end{aligned} \quad (25)$$

Los parámetros m_t y m_w corresponden con la masa equivalente para el material de viga y del líquido en que ésta se encuentra inmersa, respectivamente. Puede observarse que las ecuaciones expresadas en (25) son el equivalente de (19), en donde se ha substituido el valor de ρA por m_t (parte seca de la viga) y $m_t + m_w$ (parte sumergida), respectivamente. Detalles adicionales del método para el desarrollo de un modelo de masa distribuida, que en este trabajo ha sido aplicado a la estimación de nivel de líquido, pueden ser consultados en [15].

III. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y SIMULACIÓN

La Fig. 4 muestra la implementación práctica del experimento descrito en el presente trabajo. Los datos de vibración son obtenidos con un acelerómetro triaxial. Las muestras experimentales fueron adquiridas al permitir la vibración libre de la viga al liberarla desde una posición lateral inicial con diferentes niveles de líquido dentro del contenedor plástico. El acelerómetro fue configurado para adquirir 5000 muestras/s durante un intervalo de 8 s para fuerzas de -16 g a 16 g. Los resultados de este experimento son comparados con la simulación de viga en inmersión para determinar la consistencia de los valores encontrados y se presentan en la siguiente sección. Para realizar las simulaciones se hizo uso del software COMSOL Multiphysics 5.1 para Windows [23]. Esta herramienta proporciona un ambiente interactivo de trabajo que permite realizar simulaciones de procesos físicos tales como deformaciones plásticas, mediciones hidrodinámicas, análisis térmicos, etc. haciendo uso de diversos métodos numéricos, y es actualmente una poderosa herramienta de simulación y análisis por elemento finito [24]. El análisis empleado para el desarrollo del presente trabajo es el de eigenfrecuencias con método de elemento finito por medio del cual se estiman

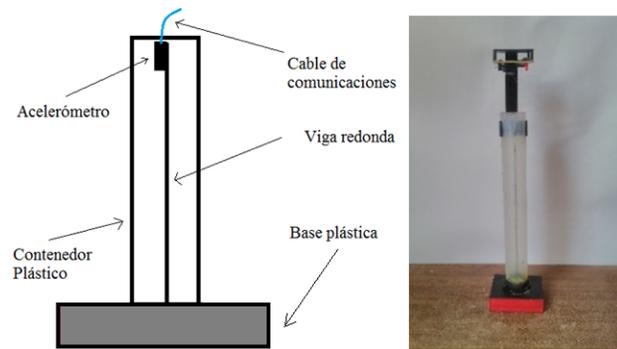


Fig. 4. Dispositivo de adquisición para el análisis de vibración en vigas inmersa.

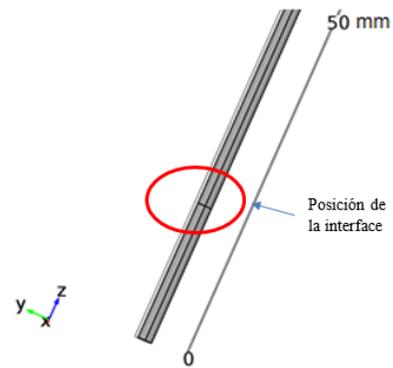


Fig. 5. Interface entre los materiales que conforman el modelo de simulación para la viga.

las vibraciones producidas en un cuerpo elástico cuando es expuesto a un estímulo externo. La etapa de simulación fue configurada para obtener las 10 primeras eigenfrecuencias del modelo analizado. Con el objetivo de simular la presencia de líquido en los confines de los diferentes cuerpos analizados, se hizo uso del modelo de masa distribuida [15], [21]. En este tipo de modelo, se simula el cuerpo bajo análisis como un tubo compuesto de dos materiales con diferentes densidades.

En la región libre de líquido el material empleado posee su densidad nominal, mientras que para la parte sumergida en el líquido se usa una densidad mayor denominada en COMSOL como densidad equivalente, de modo que la unidad bajo estudio es analizada como un solo objeto formado por dos regiones con distinta densidad. El nivel donde se produce el cambio de densidad es ajustado mediante un parámetro global, simulando el cambio de nivel de líquido en el que se encuentra sumergido. La Fig. 5 ilustra el ejemplo para el caso de la viga redonda.

En el experimento descrito se utilizaron tres modelos distintos: una viga redonda, un cilindro y un cono truncado invertido. La Fig. 6 muestra la proyección ortográfica de los modelos utilizados en las simulaciones. Las características físicas de los contenedores utilizados en la simulación se encuentran establecidas en los parámetros listados en la Tabla I y sus valores correspondientes. El parámetro modificado en la realización de las simulaciones es el nivel de líquido

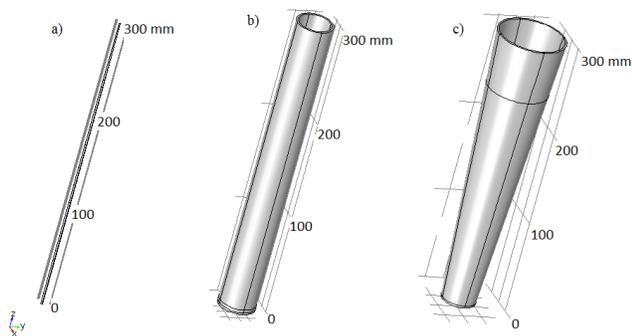


Fig. 6. Proyección ortográfica de los modelos empleados: a) Viga redonda b) Contenedor cilíndrico c) Contenedor cónico.

TABLA I
PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

Parámetro	Valor
Altura libre total del modelo	0.3 m
Espesor de pared del modelo	0.002 m
Radio inferior (Contenedores)	0.018 m
Densidad del material de modelo	7717 kg/m ³
Densidad del material equivalente; modelo con líquido	8717 kg/m ³
Radio superior del cono truncado invertido	0.036 m
Módulo de Young para las paredes de modelo	205 x 10 ⁹ Pa
Módulo de Poisson para las paredes del modelo	0.28

equivalente, es decir, el punto de interface entre los materiales de distinta densidad. Este parámetro fue variado en el rango ubicado entre 0.0 y 0.99, con lo cual se tiene un total de 100 puntos en un conjunto correspondiente de 10 eigenfrecuencias.

Durante este proceso se utilizó la interface de COMSOL 5.1 para MATLAB con el propósito de automatizar las tareas descritas. El servidor de COMSOL para MATLAB permite establecer un puente de comunicación entre ambos programas mediante un modelo de operación cliente-servidor.

El programa principal de MATLAB, operando en modo de cliente, realiza peticiones a COMSOL, con base en una serie de configuraciones previas, a través de comandos enviados por este enlace. La Fig. 8 ilustra un diagrama de flujo de la serie de pasos que son ejecutados para obtener cada conjunto de 10 eigenfrecuencias a través de la interface descrita. En el diagrama puede observarse que en cada iteración se configuran los parámetros globales de la simulación incluyendo el nivel de líquido, y se obtiene como resultado un vector correspondiente a los eigenvalores representativos de cada uno de los modos de vibración. El valor de las eigenfrecuencias correspondientes se obtiene al calcular la magnitud de cada uno de los eigenvalores.

IV. RESULTADOS

En la Fig. 7 se muestran los resultados obtenidos a través del desarrollo experimental descrito, comparados con los resultados de la simulación en COMSOL en los dos primeros modos de vibración para el caso de la viga en inmersión. La tabla II muestra el error RMS normalizado y porcentual entre ambos resultados los cuales permiten hacer una valoración sobre la consistencia de los mismos. El modelo de viga inmersa se utilizó para llevar a cabo los diseños de geometría y malla

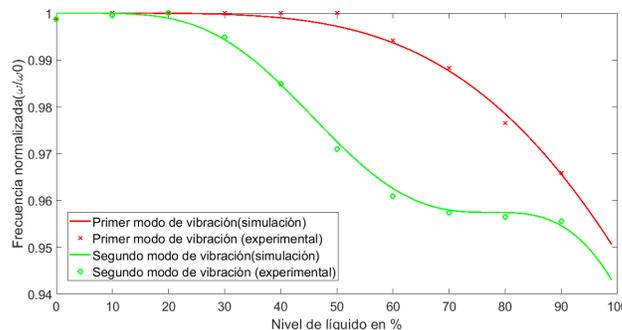


Fig. 7. Valores experimentales y de simulación para primero y segundo modo de vibración; modelo de viga inmersa

TABLA II
ERROR RMS ENTRE RESULTADOS DE SIMULACIÓN Y EXPERIMENTALES PARA LA VIGA DELGADA EN INMERSIÓN

Modo de vibración	error RMS	error RMS(%)
primero	0.0012	3.60
segundo	0.0010	2.33

propios de la simulación por elemento finito en COMSOL. En la Tabla III se muestran las diez eigenfrecuencias correspondientes a las vibraciones generadas con el recipiente en nivel cero de llenado en cada uno de los tres modelos bajo estudio. La información contenida en la tabla corresponde con la vibración de cada uno de ellos en el denominado primer modo longitudinal. La Fig. 9 muestra la deformación longitudinal asociada al primer modo de vibración para los tres modelos. La Fig. 10 muestra las eigenfrecuencias no longitudinales (axiales y de compresión), así como el efecto combinado de la vibración longitudinal con la axial correspondientes al modelo del contenedor cónico. La Fig. 10 muestra deformaciones longitudinales correspondientes al segundo modo de vibración para los tres modelos.

Con el propósito de observar el comportamiento de los cuatro primeros modos de vibración longitudinales con respecto al nivel de líquido, se obtuvieron las gráficas de desplazamiento de frecuencia normalizada contra nivel, correspondientes a las eigenfrecuencias de deformación longitudinal equivalentes. Los resultados obtenidos para los tres diferentes objetos evaluados en la simulación se muestran en las Figs. 12-15. En la

TABLA III
FRECUENCIAS DE LOS 10 PRIMEROS MODOS DE VIBRACIÓN EN NIVEL CERO DE LLENADO

Modo	Viga (Hz)	Cilindro (Hz)	Cono (Hz)
1	16.743	373.82	335.16
2	16.787	373.84	335.17
3	104.92	2101.0	1302.2
4	105.20	2101.1	1303.8
5	293.72	2671.5	1634.5
6	294.55	4273.5	2245.2
7	575.43	4622.0	2248.7
8	577.14	4624.5	2414.1
9	950.92	4750.6	2414.1
10	953.92	4752.8	3406.3

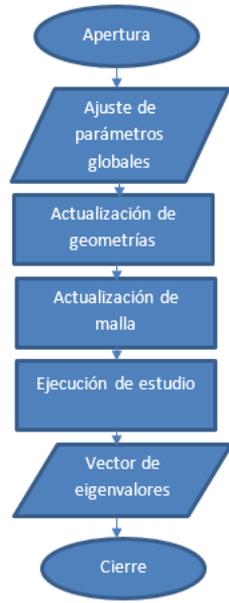


Fig. 8. Diagrama de bloques de funciones ejecutadas a través del servidor de COMSOL para MATLAB.

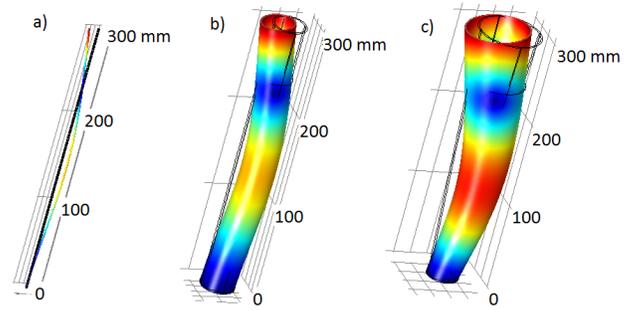


Fig. 11. Deformación longitudinal correspondiente al segundo modo de vibración. a) Viga redonda b) Contenedor cilíndrico c) Contenedor cónico.

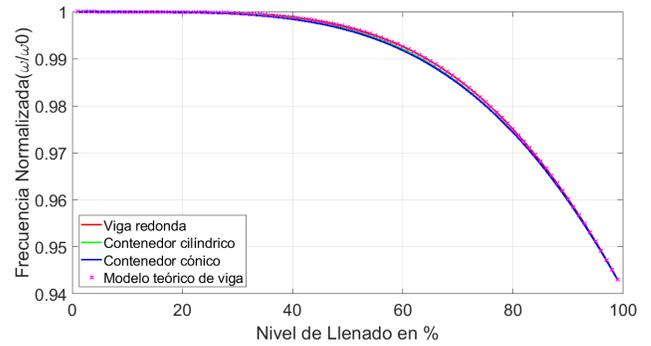


Fig. 12. Desplazamiento de frecuencia vs nivel de líquido en el primer modo de vibración longitudinal.

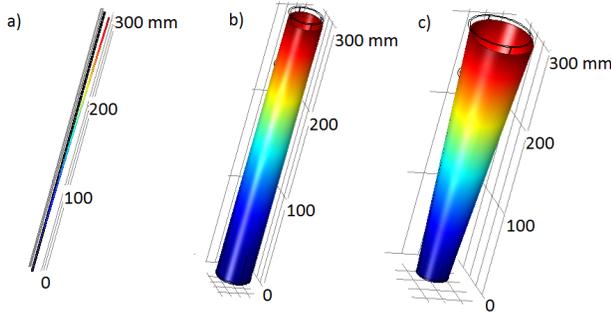


Fig. 9. Deformación longitudinal correspondiente al primer modo de vibración: a) Viga redonda b) Contenedor cilíndrico c) Contenedor cónico.

Fig. 12 se puede notar que el desplazamiento de frecuencia del primer modo de vibración longitudinal en relación al nivel de líquido para los tres tipos de contenedores no muestra un cambio significativo. Las Figs. 12, 13 y 14 muestran los resultados obtenidos a través de una evaluación similar con los modos 2, 3 y 4, en donde se observa un desplazamiento mayor para el caso del contenedor cónico, sin embargo, la forma de las curvas presenta un comportamiento similar haciendo evidente las denominadas "zonas de meseta", semejantes a las obtenidas a través del modelo de viga con masa distribuida.

La Tabla IV contiene una comparación entre los errores RMS y su equivalente porcentual para el caso de los cuatro

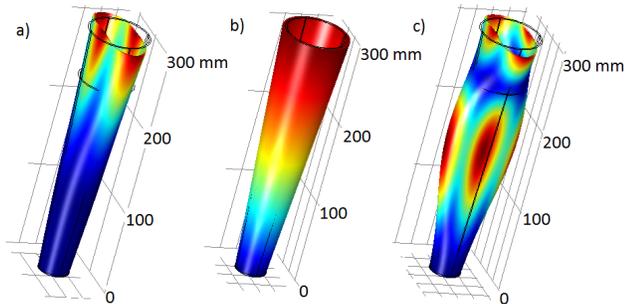


Fig. 10. Eigenfrecuencias correspondientes a deformaciones no longitudinales. a) deformación axial b) deformación de compresión c) deformación longitudinal y axial.

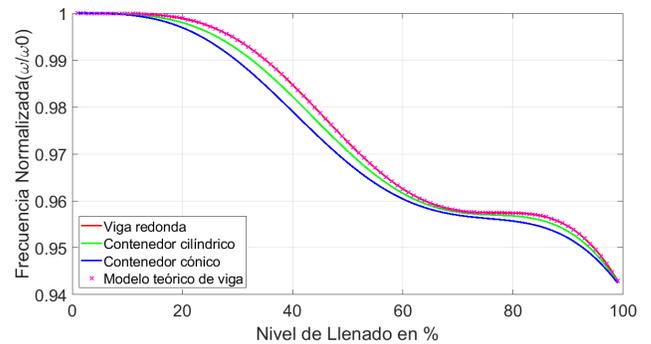


Fig. 13. Desplazamiento de frecuencia vs nivel de líquido en el segundo modo de vibración longitudinal.

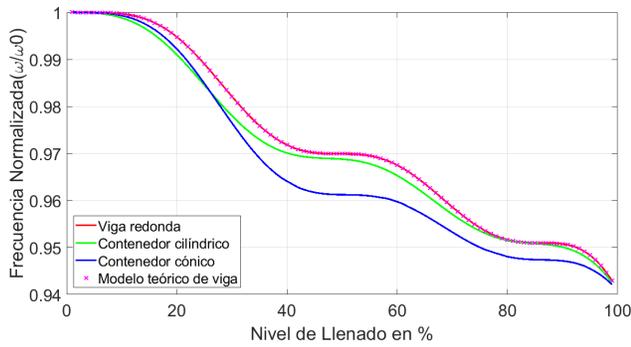


Fig. 14. Desplazamiento de frecuencia vs nivel de líquido en el tercer modo de vibración longitudinal.

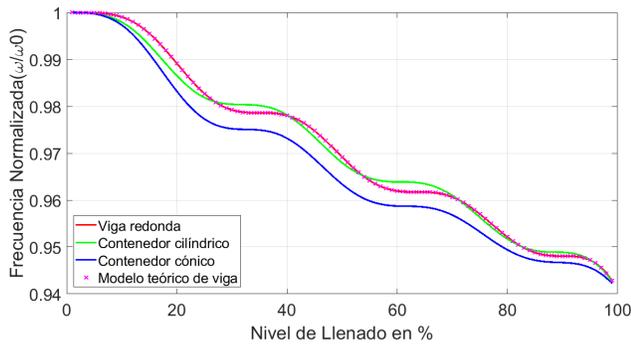


Fig. 15. Desplazamiento de frecuencia vs nivel de líquido en el cuarto modo de vibración longitudinal.

modos de vibración para los tres tipos de contenedor estudiados. El error RMS es calculado de acuerdo con (26):

$$e_{RMS} = \frac{\sqrt{\sum_i^N (xs_i - xt_i)^2}}{N} \quad (26)$$

donde xs_i representa el valor de desplazamiento de frecuencia obtenido en la simulación, xt_i representa el valor de la curva teórica estimada a través del modelo de viga para el desplazamiento de frecuencia en dicho punto, $i = 1, 2, \dots, 99$ representa el nivel de líquido. La estimación porcentual del error se obtiene de acuerdo con (27):

$$e_{RMS}\% = \frac{e_{RMS}}{\max(xt) - \min(xt)} \quad (27)$$

TABLA IV

ERROR RMS; DESPLAZAMIENTO DE FRECUENCIA CONTRA NIVEL DE LÍQUIDO

Modo	Viga delgada		Contenedor cilíndrico		Contenedor cónico	
	e_{RMS}	$e_{RMS}\%$	e_{RMS}	$e_{RMS}\%$	e_{RMS}	$e_{RMS}\%$
Primero	2.27E-6	0.004	4.0E-4	0.70	5.2E-4	0.92
Segundo	3.66E-6	0.006	1.3E-3	2.36	3.1E-3	5.36
Tercero	4.53E-6	0.008	2.1E-3	3.70	5.4E-3	9.5
Cuarto	5.02E-6	0.008	1.3E-3	2.20	3.9E-3	6.74

V. CONCLUSIONES

Se observan tres tipos de vibraciones en los objetos analizados: longitudinal, axial y de compresión, así como combinaciones de las vibraciones longitudinal y simétrica. La viga solo posee modos de vibración longitudinales perpendiculares entre sí, mientras que el contenedor cilíndrico y el cónico presentan modos de vibración axial, de compresión y combinado. Al realizar una comparación de los modos de vibración longitudinales se encuentra una correlación de datos, independientemente de la forma del contenedor, resaltando el hecho de que los primeros modos de vibración presentan mayor similitud entre sí que los modos posteriores. Los resultados encontrados permiten concluir de manera global que la información de los modos de vibración de una viga se encuentra presente en contenedores tridimensionales con simetría axial, pudiendo usar la teoría de vigas para la modelación de contenedores tridimensionales orientado a la medición de nivel de líquidos. Se observa que los modos de vibración proporcionan información para la estimación de nivel, con errores mínimos ubicados en el primer modo de vibración longitudinal. Si bien el error porcentual incrementa en los modos posteriores, estos podrían contener información adicional de valor al ser analizados en conjunto. Los resultados muestran también que el patrón de desplazamiento de frecuencia vs nivel de líquido para los modos de vibración analizados se mantiene solo con pequeños cambios con independencia del tipo de contenedor, siendo más notorias las diferencias con respecto al contenedor cónico. Este comportamiento es un indicador de la posibilidad de emplear el modelo de viga delgada de Bernoulli-Euler como una aproximación de los contenedores cilíndricos. La comparación de los resultados obtenidos a partir de los modelos matemático y computacional, y el patrón común del comportamiento espectral de los modos de vibración en viga inmersa, permiten concluir sobre la pertinencia de su uso orientado a la medición de nivel en contenedores, como base para el desarrollo de un prototipo experimental. Se plantea como trabajo posterior el análisis simultáneo de datos a través de diversos esquemas, incluyendo la posibilidad de utilizar técnicas de inteligencia computacional.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece a CONACYT, México, por la beca número 423926, otorgada para la realización de estudios de posgrado.

REFERENCIAS

- [1] K. Loizou and E. Koutroulis, "Water level sensing: State of the art review and performance evaluation of a low-cost measurement system," *Measurement*, vol. 89, pp. 204–214, 2016.
- [2] K. Chetpattananondh, T. Tapoanoi, P. Phukpattaranont, and N. Jindapetch, "A self-calibration water level measurement using an interdigital capacitive sensor," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 209, pp. 175–182, 2014.
- [3] C.-S. A. Gong, H. K. Chiu, L. R. Huang, C. H. Lin, Z. D. Hsu, and P.-H. Tu, "Low-cost comb-electrode capacitive sensing device for liquid-level measurement," *IEEE Sensors Journal*, vol. 16, no. 9, pp. 2896–2897, 2016.

- [4] B. Jin, Z. Zhang, and H. Zhang, "Structure design and performance analysis of a coaxial cylindrical capacitive sensor for liquid-level measurement," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 223, pp. 84–90, 2015.
- [5] B. Zhang, Y.-J. Wei, W.-Y. Liu, Y.-J. Zhang, Z. Yao, L.-H. Zhao, and J.-J. Xiong, "A liquid level measurement technique outside a sealed metal container based on ultrasonic impedance and echo energy," *Sensors*, vol. 17, no. 1, p. 185, 2017.
- [6] I. Matsuya, Y. Honma, M. Mori, and I. Ihara, "Measuring liquid-level utilizing wedge wave," *Sensors*, vol. 18, no. 1, p. 2, 2018.
- [7] M. Pieraccini, D. Mecatti, D. Dei, F. Parrini, G. Macaluso, A. Spinetti, and F. Puccioni, "Microwave sensor for molten glass level measurement," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 212, pp. 52–57, 2014.
- [8] D. Xiaowei and Z. Ruifeng, "Detection of liquid-level variation using a side-polished fiber bragg grating," *Optics & laser technology*, vol. 42, no. 1, pp. 214–218, 2010.
- [9] B. Gu, W. Qi, Y. Zhou, Z. Wu, P. P. Shum, and F. Luan, "Reflective liquid level sensor based on modes conversion in thin-core fiber incorporating tilted fiber bragg grating," *Optics express*, vol. 22, no. 10, pp. 11 834–11 839, 2014.
- [10] T. Nakagawa, A. Hyodo, K. Kogo, H. Kurata, K. Osada, and S. Oho, "Contactless liquid-level measurement with frequency-modulated millimeter wave through opaque container," *IEEE Sensors Journal*, vol. 13, no. 3, pp. 926–933, 2013.
- [11] E. S. Webster and C. E. Davies, "The use of helmholtz resonance for measuring the volume of liquids and solids," *Sensors*, vol. 10, no. 12, pp. 10 663–10 672, 2010.
- [12] S. S. Jung, S. I. Cho, Y. T. Kim, and C.-W. Kim, "Level gauge by using the acoustic resonance frequency," *Journal of Korean Physical Society*, vol. 43, pp. 727–731, 2003.
- [13] D. onlagić, M. Završnik, and D. onlagić, "Low-frequency acoustic resonance level detector with neural-network classification," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 55, no. 2-3, pp. 99–106, 1996.
- [14] D. Donlagic, V. Kumperščak, and M. Završnik, "Low-frequency acoustic resonance level gauge," *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 57, no. 3, pp. 209–215, 1996.
- [15] M. Jacobs, R. Breeuwer, M. Kemmere, and J. Keurentjes, "Contactless liquid detection in a partly filled tube by resonance," *Journal of sound and vibration*, vol. 285, no. 4-5, pp. 1039–1048, 2005.
- [16] J. C. Sanchez-Diaz, M. Ramirez-Cortes, P. Gomez-Gil, J. Rangel-Magdaleno, I. Cruz-Vega, and H. Peregrina-Barreto, "Spectral characterization of content level based on acoustic resonance: Neural network and feedforward fuzzy net approaches," in *Nature-Inspired Design of Hybrid Intelligent Systems*. Springer, 2017, pp. 207–224.
- [17] D. Robinson, J. Wright, S. Gupta, T. Mottram, P. Armitage, M. Gower, M. Lodeiro, P. Gelat, and C. Schwarz, "A novel non-linear elastic wave acoustic spectroscopy (news) non-destructive inspection (ndi) method for aeronautic and spacecraft materials and components," *CEAS Space Journal*, vol. 8, no. 1, pp. 35–45, 2016.
- [18] R. D. Costley, M. E. Henderson, H. Patel, E. W. Jones, G. M. Boudreaux, and M. J. Plodinec, "The measurement of pressure and level of fill in sealed storage drums," *NDT & E International*, vol. 40, no. 4, pp. 300–308, 2007.
- [19] H.-H. P. Wu and Z.-H. Yang, "Liquid level detector for a sealed gas tank based on spectral analysis," in *2014 19th International Conference on Digital Signal Processing*. IEEE, 2014, pp. 68–72.
- [20] P. J. Sides, "Apparatus and method for determining the liquid level in an un-modified tank," Oct. 10 2013, uS Patent App. 13/859,087.
- [21] K. Chan, T. Leung, and W. Wong, "Free vibration of simply supported beam partially loaded with distributed mass," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 4, no. 191, pp. 590–597, 1996.
- [22] A. W. Leissa and M. S. Qatu, *Vibrations of Continuous Systems*. McGraw-Hill, 2011.
- [23] "Comsol version 5.1 release highlights," <https://www.comsol.com/release/5.1>, accessed: 2019-02-27.
- [24] M. F. Kuhn, G. P. Breier, and T. G. Clarke, "Passive wireless sensor for displacement monitoring in metal structures," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 5, pp. 1353–1357, 2018.



Juan Carlos Sánchez-Díaz (M'17) received the BSc degree from the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), Mexico, and the MSc degree from the National Institute of Astrophysics, Optics, and Electronics (INAOE), Mexico. He is currently a Ph.D. student at the Electronics Department, INAOE, in Mexico. His research interests include signal processing, fuzzy logic, data acquisition, neural networks, and digital systems.



include signal processing, biometry, neural networks, and digital systems.

Juan Manuel Ramirez-Cortes (M'92-SM'04) received the BSc degree from the National Polytechnic Institute, Mexico, the MSc degree from the National Institute of Astrophysics, Optics, and Electronics (INAOE), Mexico, and the PhD degree from Texas Tech University, all in electrical engineering. He is currently a titular researcher at the Electronics Department, INAOE, in Mexico. He is member of the National Research System, Mexico, SNI level 2, and AdCom member of the IEEE Instrumentation and Measurement Society. His research interests



Pilar Gomez-Gil (S'84-M'92-SM'04) received the B.Sc. degree from the Universidad de las Américas A.C, Mexico, the M.Sc. and Ph.D. degrees from Texas Tech University, USA, all in computer science. She is currently a Titular Researcher in computer science at INAOE, Mexico. She is member of the National Research System, Mexico, SNI level 2, and IEEE senior member. Her research interests include neural networks, image processing, pattern recognition, and software engineering.



Ponciano Rodriguez-Montero received the B.Sc. degree in Physics from Universidad Autónoma Metropolitana, the M.Sc. and Ph.D. degrees in Optics from Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Mexico. He is currently a titular researcher at the Optics Department, INAOE, in Mexico. He is member of the National Research System, Mexico, SNI level 2. His research interests include photonics, non-linear optics and vibration analysis.



security, time-series prediction, digital signal processing, and multiresolution techniques.

Vicente Alarcon-Aquino (M'94-SM'14) received the B.Sc. degree from the Instituto Tecnológico de Veracruz, the M.Sc. degree from the Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, and the Ph.D. and D.I.C. degrees from Imperial College, University of London, U.K, all in electrical engineering. He is now a full Professor in the Department of Computer Systems and Electronic Engineering at Universidad de las Américas, Puebla, Mexico. He is member of the National Research System, Mexico, SNI level 1. His research interests include network



trol.

Ponciano Jorge Escamilla-Ambrosio received the B.Sc. degree in Mechanical Electrical Engineering and the M.Sc. degree, in Electronics and Control Systems Engineering, both from the National Autonomous University of Mexico, and the Ph.D. degree from the University of Sheffield, UK. He is currently a titular researcher at the Centro de Investigación en Computación, Instituto Politécnico Nacional, Mexico. His research interests include multi-sensor data fusion, pattern recognition, wireless sensor networks, neuro-fuzzy systems, and control.