

# Analytical Expression for the Bit Error Rate of a Filtered Multitone Modulation Scheme (FMT) through a Multipath Fading Channel

Mauricio Ramírez, Angélica Serna, and Susana Molano

**Abstract**—This article proposes a mathematical expression for the calculation of the bit error rate (BER) in a filtered multitone modulation scheme (FMT) when the transmission is carried out through a stationary multipath fading channel, assuming a perfect knowledge of that channel. The numerical results using Monte Carlo simulation are very similar to the results obtained from the proposed mathematical expression, especially when the number of tones is large enough to guarantee a flat behavior of the channel on each tone. The expression applies to any order  $M$  of the M-QAM modulation used on each tone.

**Index Terms**—Filtered Multitone, M-QAM, Bit Error Rate, Multipath Fading Channel, ISI.

## I. INTRODUCCIÓN

Cuando se transmite información digital a través de canales con ruido blanco aditivo Gaussiano (AWGN: Additive White Gaussian Noise), el desempeño mejora exponencialmente con el incremento de la relación señal a ruido (relación energía de bit a densidad espectral de potencia de ruido  $(E_b/N_0)$ ) [1], [2], [3], [4], [5], esto se debe a que la variable de decisión generada en el receptor depende exclusivamente del símbolo transmitido y del ruido. Por su parte, cuando la transmisión se lleva a cabo a través de un canal con desvanecimiento selectivo en frecuencia, la variable de decisión generada en el receptor depende, no solo del símbolo actual y del ruido, sino de otros símbolos transmitidos en otros instantes. Este fenómeno se conoce como interferencia intersímbolo (ISI: Intersymbol interference) [6], y se considera el fenómeno más degradante en los sistemas de comunicación digital. A diferencia de lo que sucede con el ruido, el efecto de la ISI no se corrige aumentando la relación  $E_b/N_0$ , pues los símbolos interferentes aumentan en la misma medida que lo hace el símbolo deseado (La ISI no puede tratarse como una fuente de ruido adicional). Cuando la señal que llega al receptor está afectada por ISI, la curva de tasa de error de bit (BER: Bit Error Rate) vs  $E_b/N_0$  se estanca alrededor de un valor conocido como BER irreducible, el cual, en muchos casos, es lo suficientemente alto como para considerar inoperante al sistema de comunicación. En ese sentido, el problema de minimizar el impacto de la ISI es un tema de investigación que concentra gran interés en la actualidad [7].

Existen varios enfoques para combatir los efectos de la ISI en los sistemas de comunicación actuales, uno de ellos es la

ecualización directa, la cual consiste en eliminar (o reducir) la ISI directamente a partir de operaciones algebraicas sobre la secuencia de observaciones disponibles en el receptor [6]. Otro de los enfoques es el uso de diversidad en uno o varios dominios de manera simultánea; con ello es posible combinar las diferentes versiones recibidas de la señal original y tomar la mejor decisión, basada en la redundancia [2], [8]. El otro enfoque es la modulación multiportadora, la cual consiste en dividir el espectro de la señal a transmitir en un conjunto de sub-espectros más angostos, de tal manera que cada uno de esos sub-espectros perciba un canal con desvanecimiento plano (distorsión despreciable) [1], [3], [8], [9], eliminando virtualmente la ISI. En ese sentido, la modulación multitone filtrado (FMT: Filtered Multitone) es un esquema de modulación digital multiportadora que consiste en generar espectros limitados en banda alrededor de cada sub-portadora, de tal forma que dichos espectros no se traslapen. La mayoría de los trabajos relacionados con FMT disponibles en la literatura se enfocan en hacer un análisis de desempeño sobre diferentes tipos de canales con desvanecimiento, y suelen hacer comparaciones con la multiplexación por división de frecuencia ortogonal (OFDM: Orthogonal Frequency Division Multiplexing), sin embargo, existen pocos trabajos enfocados en deducir analíticamente las expresiones para la probabilidad de error en función de la relación  $E_b/N_0$ . Dentro de los trabajos destacados, en [10] se deducen los límites de desempeño de la modulación multiportadora sobre canales con desvanecimiento selectivo en frecuencia y variables en el tiempo, mientras que en [11] se hace un cálculo exacto de la cota de desempeño con filtraje acoplado para modulación multitone sobre el mismo tipo de canal. En ambos casos se hacen las deducciones utilizando detección óptima de máxima verosimilitud. Por su parte, en [12] se hace un estudio del desempeño de la modulación FMT sobre canales con desvanecimiento selectivo, tanto en frecuencia como en tiempo, empleando diferentes formas de pulso tales como el pulso seno cardinal (sinc), el raíz de coseno alzado y el pulso Gaussiano. También se obtienen expresiones cuasi cerradas para la relación señal a interferencia (SIR: Signal to Interference Ratio). En [13] también se considera la modulación FMT sobre canales con desvanecimiento selectivo en frecuencia y variantes en el tiempo. En este trabajo se hacen medidas de la interferencia causada por el carácter dispersivo del canal bajo diferentes condiciones de desvanecimiento, y se hace un análisis de la relación portadora a interferencia promedio (CIR: Carrier to Interference Ratio) para demostrar el compromiso que existe

M. Ramírez, A. Serna y S. Molano están con el Departamento de Telecomunicaciones de la Facultad de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones, Universidad del Cauca, 190003 Popayán, Colombia. e-mail: [jesusramirez, angelicaserna, susanamolano]@unicauca.edu.co.

entre la eficiencia espectral y el desempeño del sistema. Los resultados se comparan con los obtenidos en OFDM bajo las mismas condiciones de canal. En [14] se hace un análisis comparativo de desempeño de varias técnicas de modulación multiportadora comunmente usadas en comunicaciones de radiofrecuencia. Se muestra que la BER obtenida con OFDM con prefijo cíclico (CP-OFDM: Cyclic Prefix - OFDM) es mejor a la obtenida con otros esquemas tales como OQAM multiportadora con banco de filtros (FBMC-OQAM: Filter Bank Multi Carrier - Offset QAM) y FMT, incluso cuando la señal CP-OFDM ha sido filtrada para lograr un mayor confinamiento espectral.

En general, la mayoría de los trabajos en el área parten de un desconocimiento a priori del estado del canal, por lo que asumen que los factores multiplicativos que acompañan a los símbolos que introducen ISI son cantidades aleatorias (con distribución normal compleja). Así, se obtienen expresiones para la probabilidad de error que corresponden a un promedio de todas y cada una de las realizaciones de dicho canal. Si bien, estas expresiones muestran la tendencia general de la BER, no son muy precisas a la hora de describir el desempeño sobre realizaciones particulares del canal, pues existe una amplia y variada cantidad de casos. En ese sentido, la principal contribución de nuestro artículo es la deducción de una expresión de probabilidad de error en función de las condiciones particulares de propagación presentes en el canal multitrayecto, partiendo de la premisa de que se conoce perfectamente el estado del canal y de que éste es invariante en el tiempo. Lo anterior hace que la expresión de probabilidad de error obtenida en este artículo constituya una estimación muy acertada de la BER real del sistema de comunicación. Adicionalmente, el artículo busca brindar claridad conceptual acerca del funcionamiento de la modulación FMT mediante una explicación detallada y sencilla de cada uno de los procesos llevados a cabo, tanto en el transmisor, como en el receptor, haciendo que los resultados sean fáciles de replicar.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección II se plantea el modelo del sistema de comunicación, en la sección III se hace la deducción de la probabilidad de error en función de la relación  $E_b/N_0$ . En la sección IV se muestran los resultados de las simulaciones y su respectiva comparación con la expresión deducida en III y en la sección V se finaliza el artículo con algunas conclusiones y sugerencias de trabajos futuros.

## II. FUNDAMENTOS DE LA MODULACIÓN FMT

En Fig.1, Fig.2 y Fig.3 se presentan respectivamente los diagramas en bloques del transmisor, del canal y del receptor.

El mensaje a transmitir está representado por la secuencia de símbolos complejos  $\{s_k; k \in \mathbf{Z}\}$ , los cuales pertenecen a una misma constelación M-QAM. El tiempo transcurrido entre símbolos consecutivos se supone constante y se simboliza con  $T$ . La modulación multitono consiste en segmentar el mensaje en  $N$  bloques de símbolos, donde cada bloque se transmite sobre una porción diferente del espectro. En ese sentido, se requieren  $N$  portadoras sinusoidales, denotadas con  $\{f_i; i = 1, 2, \dots, N\}$  y  $N$  filtros conformadores de pulso con

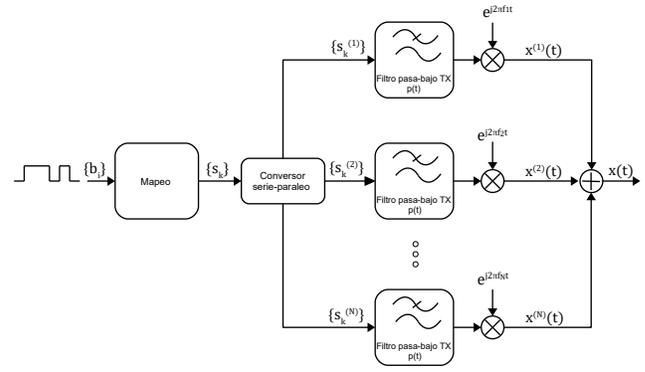


Fig. 1. Transmisor FMT.

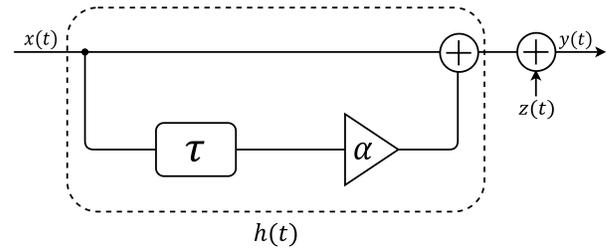


Fig. 2. Canal multitrayecto simple.

respuesta al impulso  $p(t)$ . La modulación multitono filtrada, FMT, se caracteriza porque los espectros alrededor de cada frecuencia portadora, denominados de ahora en adelante tonos, no se traslapan entre sí. El bloque de símbolos transmitido a través del tono  $i$ -ésimo se denota con  $\{s_k^{(i)}; k \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, \dots, N\}$ . Así, la señal transmitida por el tono  $i$ -ésimo tiene la forma:

$$x^{(i)}(t) = \text{Re} \left[ \sqrt{2} e^{j2\pi f_i t} \sum_k s_k^{(i)} p(t - kNT) \right], \quad (1)$$

donde  $\text{Re}[\cdot]$  es el operador de parte real [1], [4]. Luego, la señal FMT transmitida, está dada por:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x^{(i)}(t). \quad (2)$$

Los filtros conformadores deben asegurar tonos limitados en banda y las portadoras deben garantizar que los tonos no se traslapan. En ese sentido,  $p(t)$  puede ser un filtro raíz cuadrada de coseno alzado (SRRC: Square root raised cosine), con factor de roll-off  $\beta$  y ancho lobular  $NT$ , lo que obliga a que la diferencia entre portadoras consecutivas sea mayor o igual al ancho de banda de cada tono, esto es:

$$\Delta f = f_i - f_{i-1} \geq \frac{1 + \beta}{NT}, i = 2, 3, \dots, N. \quad (3)$$

Usando la separación mínima entre portadoras, la eficiencia espectral del sistema FMT no se ve comprometida en relación a un sistema de portadora única, pues el ancho de banda ocupado por la señal transmitida es  $B = N\Delta f = (1 + \beta)/T$ . Al transmitir la señal  $x(t)$  a través de un canal con desvanecimiento multitrayecto, caracterizado por una respuesta al

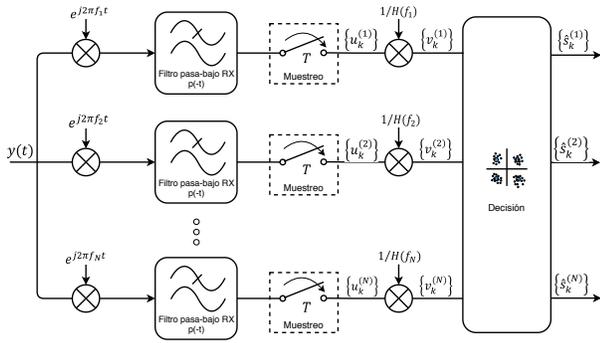


Fig. 3. Receptor FMT.

impulso  $h(t)$  y un proceso de ruido  $z(t)$ , se obtiene la señal a la entrada del receptor, esto es:

$$y(t) = x(t) * h(t) + z(t), \quad (4)$$

donde  $*$  es el operador de convolución, y  $z(t)$  es ruido AWGN de media cero y varianza por dimensión  $\sigma^2 = N_0/2$  [1], [4]. Así mismo, el espectro de la señal de entrada al receptor, está dado por:

$$Y(f) = X(f)H(f) + Z(f), \quad (5)$$

donde  $X(f)$  es el espectro de la señal transmitida,  $H(f)$  es la respuesta en frecuencia del canal y  $Z(f)$  es el espectro del ruido. Considerando (2), el espectro de la señal transmitida puede expresarse como:

$$X(f) = \sum_{i=1}^N X^{(i)}(f), \quad (6)$$

donde  $X^{(i)}(f)$  es el espectro de la señal transmitida en el  $i$ -ésimo tono. Retomando (5) se tiene que:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \sum_{i=1}^N Y^{(i)}(f) \\ &= H(f) \sum_{i=1}^N X^{(i)}(f) + \sum_{i=1}^N Z^{(i)}(f) \\ &= \sum_{i=1}^N [X^{(i)}(f)H(f) + Z^{(i)}(f)], \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $Y^{(i)}(f)$  es el espectro de la señal recibida en el  $i$ -ésimo tono y  $Z^{(i)}(f)$  el espectro del ruido en dicho tono. En ese sentido, es posible afirmar que:

$$Y^{(i)}(f) = X^{(i)}(f)H(f) + Z^{(i)}(f). \quad (8)$$

En Fig. 4 se muestra el espectro de la señal FMT y el espectro de salida del canal cuando se transmite a través de un canal multitrayecto con un camino directo y un camino reflejado cuya ganancia es 0.5 veces la del rayo directo, y cuyo retardo es  $1.5T$  respecto al rayo directo. La señal ha sido generada empleando 32 tonos y filtros SRRC con roll-off de 0.5.

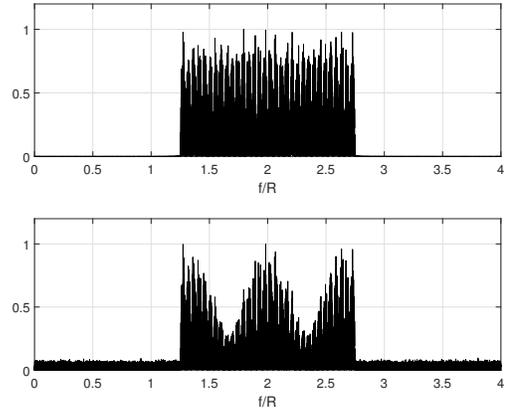


Fig. 4. Espectro FMT a la entrada y salida de un canal multitrayecto.

Si el número de tonos,  $N$ , es suficientemente grande para asegurar que las variaciones de  $H(f)$  alrededor de  $f_i$  sean despreciables<sup>1</sup>, se puede hacer la siguiente aproximación:

$$Y^{(i)}(f) \approx H(f_i)X^{(i)}(f) + Z^{(i)}(f). \quad (9)$$

Como  $H(f_i)$  es aproximadamente constante sobre la banda ocupada por  $X^{(i)}(f)$ , al aplicar transformada inversa de Fourier a ambos lados se tiene que:

$$y^{(i)}(t) \approx H(f_i)x^{(i)}(t) + z^{(i)}(t), \quad (10)$$

donde  $y^{(i)}(t)$  y  $z^{(i)}(t)$  son las transformadas inversas de Fourier de  $Y^{(i)}(f)$  y  $Z^{(i)}(f)$ , respectivamente. A partir de la señal recibida en el tono  $i$ -ésimo, es necesario crear una variable de decisión,  $u_k^{(i)}$ , para realizar una estimación acerca del símbolo transmitido en el instante  $k$ , sobre el tono  $i$ . Dicha variable se obtiene de la siguiente forma:

$$u_k^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}e^{-j2\pi f_i t} y(t) p(t - kNT) dt. \quad (11)$$

Esta operación es equivalente a multiplicar la señal recibida por una sinusoida de la misma fase y frecuencia que la usada en el tono  $i$  (demodulación coherente), para luego filtrar con  $p(-t)$  (filtro acoplado) y muestrear una vez cada  $T$  segundos en el instante óptimo [1], [4] (ver Fig. 3). De esa manera, la variable de decisión queda como:

$$u_k^{(i)} \approx H(f_i)s_k^{(i)} + w_k^{(i)}, \quad (12)$$

donde  $w_k^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}e^{-j2\pi f_i t} z(t) p(t - kNT) dt$  es el ruido filtrado sobre el  $i$ -ésimo tono, en el instante  $k$ . Dicho ruido corresponde a una variable aleatoria normal con media cero y varianza  $\sigma^2 = N_0/2$ . Como puede observarse en (12), además del ruido, la variable de decisión está afectada por la respuesta del canal en la frecuencia del tono, lo que quiere decir que el sistema está libre de ISI, a pesar del carácter

<sup>1</sup>La cantidad de tonos necesaria para considerar que la respuesta del canal es aproximadamente plana sobre cualquiera de los subcanales tiene que ver con la dispersión de retardo del canal (delay spread). Específicamente, si  $\tau_{rms}$  es la dispersión de retardo rms del canal, se debe cumplir que el periodo de símbolo de cada tono debe ser mucho mayor que  $\tau_{rms}$ , esto es:  $NT \gg \tau_{rms}$ . Para efectos prácticos, se puede considerar que la condición de planicidad se satisface si  $NT \geq 10\tau_{rms}$  [15].

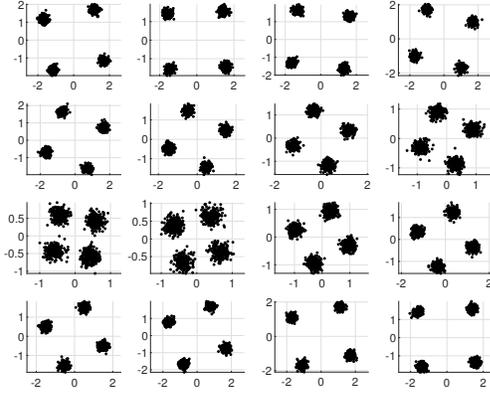


Fig. 5. Diagramas de constelación recibidos en cada tono.

dispersivo (selectivo en frecuencia) del canal. Sin embargo, si se intenta tomar la decisión a partir del valor de  $u_k^{(i)}$ , se corre un alto riesgo de equivocación, pues el factor multiplicativo del canal,  $H(f_i)$ , modifica los umbrales de decisión. En Fig. 5 se muestran los diagramas de constelación recibidos sobre 16 tonos ( $N = 32$ ), cuando se usa modulación 4-QAM, y el correspondiente efecto del canal, el cual se traduce en una rotación de la constelación respecto a su forma original.

En ese sentido, es necesario redefinir la variable de decisión con el propósito de no alterar los umbrales de decisión originales (y, por ende, no aumentar la complejidad del receptor). De esa forma, se establece la nueva variable de decisión,  $v_k^{(i)}$ , como:

$$v_k^{(i)} = \frac{u_k^{(i)}}{H(f_i)} \approx s_k^{(i)} + \frac{w_k^{(i)}}{H(f_i)}. \quad (13)$$

Así, se consigue un efecto de des-rotación de las constelaciones sobre cada uno de los tonos. Una consecuencia de tomar la decisión con base en  $v_k^{(i)}$  es la modificación de la intensidad del ruido [16], es decir, si  $|H(f_i)| > 1$ , el ruido resultante tendrá menor varianza, lo que favorecerá las decisiones correctas. Por el contrario, si  $|H(f_i)| < 1$ , el ruido se hará más intenso y el sistema estará más propenso a errores. Geométricamente, cuando  $|H(f_i)| > 1$ , los puntos de la constelación lucen menos dispersos, contrario a lo que ocurre cuando  $|H(f_i)| < 1$ . En Fig. 6 se observan los diagramas de constelación obtenidos después de compensar el factor multiplicativo del canal sobre cada uno de los tonos. Como se puede ver, los diagramas de constelación resultantes se asemejan a las constelaciones típicas 4-QAM, con diferentes varianzas de ruido sobre cada tono, tal como se indica en (13).

### III. PROBABILIDAD DE ERROR DE LA MODULACIÓN FMT

La probabilidad de error de símbolo,  $\Pr\{\varepsilon_s\}$ , se define como la probabilidad de que el símbolo detectado por el receptor en el instante  $k$ ,  $\hat{s}_k$ , no coincida con el símbolo transmitido en ese mismo instante, [1], [2], [3], [4], [8] esto es:

$$\Pr\{\varepsilon_s\} = \Pr\{\hat{s}_k \neq s_k\} = 1 - \Pr\{\hat{s}_k = s_k\}. \quad (14)$$

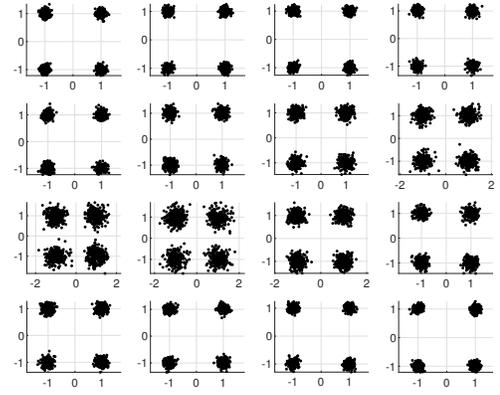


Fig. 6. Diagramas de constelación recibidos en cada tono después de compensar el factor multiplicativo del canal.

El esquema FMT divide por igual la información en  $N$  tonos excluyentes. Por tanto, el evento  $\varepsilon_s$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s \cap \Omega = \varepsilon_s \cap \left( \bigcup_{i=1}^N D_i \right), \quad (15)$$

donde  $\Omega$  es el espacio muestral (universo) y  $D_i$  es el evento de transmitir por el tono  $i$ -ésimo. Aplicando la ley distributiva de la intersección sobre la unión [17], se tiene:

$$\varepsilon_s = \bigcup_{i=1}^N (\varepsilon_s \cap D_i). \quad (16)$$

Dado que los  $N$  tonos son excluyentes, al aplicar el operador de probabilidad a ambos lados y posteriormente la regla de la cadena [17], se tiene que:

$$\begin{aligned} \Pr\{\varepsilon_s\} &= \Pr\left\{ \bigcup_{i=1}^N (\varepsilon_s \cap D_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \Pr\{\varepsilon_s \cap D_i\} \\ &= \sum_{i=1}^N \Pr\{D_i\} \Pr\{\varepsilon_s | D_i\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Como la información se divide equitativamente en los  $N$  tonos,  $\Pr\{D_i\} = 1/N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , por tanto:

$$\Pr\{\varepsilon_s\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Pr\{\varepsilon_s | D_i\}, \quad (18)$$

donde  $\Pr\{\varepsilon_s | D_i\}$  es la probabilidad condicional de cometer un error al transmitir por el tono  $i$ -ésimo. Dicha probabilidad condicional es equivalente a:

$$\Pr\{\varepsilon_s | D_i\} = \Pr\{\hat{s}_k^{(i)} \neq s_k^{(i)}\} = 1 - \Pr\{\hat{s}_k^{(i)} = s_k^{(i)}\}, \quad (19)$$

donde  $\hat{s}_k^{(i)}$  es el símbolo detectado por el receptor en el instante  $k$ , sobre el tono  $i$ -ésimo. El valor de  $\Pr\{\varepsilon_s | D_i\}$  depende de varios factores, entre ellos la forma de la constelación usada en el  $i$ -ésimo tono, la varianza de ruido y la respuesta del canal

sobre ese tono. Por tanto, para calcular  $\Pr\{\varepsilon_s|D_i\}$  se puede usar la siguiente aproximación:

$$\Pr\{\varepsilon_s|D_i\} \approx \gamma_i Q\left(\frac{d_i}{2\sigma_i}\right), \quad (20)$$

donde  $d_i$  es la distancia mínima de la constelación,  $\sigma_i$  es la desviación estándar de ruido y  $\gamma_i$  es el número promedio de vecinos de cada símbolo de la constelación usada para transmitir sobre el tono  $i$ -ésimo [1], [3], [4], [5]. Además,  $Q(\cdot)$  representa la función complementaria de distribución acumulativa normal estándar, la cual está dada por [17]:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz. \quad (21)$$

Si  $\mathcal{A}_i = \{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{M_i}^{(i)}\}$  es la constelación de  $M_i$  símbolos usada para transmitir sobre el tono  $i$ -ésimo, la distancia mínima se obtiene como:

$$d_i = \min_{m \neq n} |a_m^{(i)} - a_n^{(i)}|. \quad (22)$$

Por su parte, la varianza de ruido sobre el tono  $i$ -ésimo se obtiene como [16]:

$$\sigma_i^2 = \text{Var}\left[\frac{w_k^{(i)}}{H(f_i)}\right] = \frac{N_0}{2|H(f_i)|^2}. \quad (23)$$

Por tanto, la expresión para la probabilidad de error de símbolo de la modulación FMT queda como:

$$\Pr\{\varepsilon_s\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i Q\left(\frac{d_i |H(f_i)|}{\sqrt{2N_0}}\right). \quad (24)$$

Expresando la distancia mínima en términos de la energía promedio de bit, se tiene que:

$$d_i^2 = \rho_i E_b^{(i)}, \quad (25)$$

donde  $E_b^{(i)}$  es la energía promedio de bit de la constelación usada en el tono  $i$ -ésimo y  $\rho_i$  es una constante de proporcionalidad que relaciona a la distancia mínima con la energía promedio de bit de dicho tono. La energía promedio de bit en el tono  $i$ -ésimo está dada por:

$$\begin{aligned} E_b^{(i)} &= \frac{E_s^{(i)}}{\log_2 M_i} \\ &= \frac{E[|s_k^{(i)}|^2]}{\log_2 M_i} \\ &= \frac{1}{\log_2 M_i} \sum_{m=1}^{M_i} |a_m^{(i)}|^2 \Pr\{s_k^{(i)} = a_m^{(i)}\}, \end{aligned} \quad (26)$$

donde  $E_s^{(i)} = E[|s_k^{(i)}|^2]$  es la energía promedio de símbolo de la constelación usada en el tono  $i$ -ésimo y  $E[\cdot]$  es el operador de valor esperado. Así, la probabilidad de error de símbolo, en términos de la relación  $E_b/N_0$  de cada tono, queda como:

$$\Pr\{\varepsilon_s\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i Q\left(\sqrt{|H(f_i)|^2 \frac{\rho_i E_b^{(i)}}{2N_0}}\right). \quad (27)$$

En la Tabla I se presentan los valores del parámetro  $\rho_i$  para algunos tipos de constelación comunes (Asumiendo símbolos

TABLA I  
VALORES DEL PARÁMETRO  $\rho_i$  PARA ALGUNAS CONSTELACIONES COMUNES.

Constelación	$\rho_i = d_i^2/E_b^{(i)}$
BPSK	4
4-QAM	4
8-PSK	$3(2 - \sqrt{2})$
16-QAM	8/5
64-QAM	4/7

equiprobables) [5]. Finalmente, aplicando un mapeo Gray sobre cada constelación, la probabilidad de error de bit,  $\Pr\{\varepsilon_b\}$ , queda expresada como:

$$\Pr\{\varepsilon_b\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{\log_2 M_i} Q\left(\sqrt{|H(f_i)|^2 \frac{\rho_i E_b^{(i)}}{2N_0}}\right). \quad (28)$$

En general, para una potencia de transmisión fija  $P$ , las energías promedio de símbolo y de bit satisfacen la siguiente relación:

$$P = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N E_s^{(i)} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N E_b^{(i)} \log_2 M_i. \quad (29)$$

Particularmente, cuando se utiliza el mismo esquema de modulación y la misma relación  $E_b/N_0$  en cada tono, la expresión de la probabilidad de error de bit toma la forma:

$$\begin{aligned} \Pr\{\varepsilon_b\} &\approx \frac{1}{N} \frac{\gamma}{\log_2 M} \sum_{i=1}^N Q\left(\sqrt{|H(f_i)|^2 \frac{\rho E_b}{2N_0}}\right) \\ &\approx \frac{\gamma}{N \log_2 M} \sum_{i=1}^N Q\left(\sqrt{\frac{\rho T |H(f_i)|^2 P}{2 \log_2 M N_0}}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Es importante aclarar que (30) es una expresión aproximada para la probabilidad de error, con una precisión que se incrementa conforme  $N$  tiende a infinito. No obstante, cuando el número de tonos es suficientemente grande, se espera que la expresión se ajuste bastante bien a la BER obtenida por simulación, especialmente cuando la relación  $E_b/N_0$  toma valores relativamente grandes. Por otro lado, la expresión cobra validez una vez que se conoce la realización del canal, es decir, el conjunto particular de coeficientes complejos  $\{H(f_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ . En ese sentido, (30) corresponde a una probabilidad condicional de error, dada una realización particular del canal<sup>2</sup>. Si en lugar de tener información exacta del estado del canal (CSI: Channel State Information) se tiene un conjunto de coeficientes estimados  $\{\hat{H}(f_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ , aún es posible utilizar la (30) para describir el desempeño del sistema. Sin embargo, en este caso, la expresión ya no funciona como el valor asintótico al que tiende la BER, sino como su cota inferior. Así mismo, al utilizar los coeficientes estimados en lugar de los verdaderos en el proceso de equalización de (13), se llegaría a unos diagramas de constelación similares a los de la Fig. 6, pero

<sup>2</sup>En este artículo, los coeficientes  $\{H(f_i)\}$  no se tratan como variables aleatorias sino como parámetros del canal, por lo que no se consideran distribuciones de probabilidad tales como Rice, Rayleigh o Nakagami para describir su magnitud.

con una ligera rotación, consecuencia del error de estimación cometido.

#### A. Ejemplo

Supóngase que se emplea el mismo esquema de modulación M-QAM y la misma relación  $E_b/N_0$  en cada tono, y que la transmisión se lleva a cabo a través de un canal multirrayecto con un rayo directo (de ganancia relativa 1) y un rayo reflejado (de ganancia relativa  $\alpha$  y retardo relativo  $\tau$ ). Así, la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia del canal están dadas respectivamente por:

$$h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - \tau). \quad (31)$$

$$H(f) = 1 + \alpha e^{-j2\pi\tau f}. \quad (32)$$

Además, los valores de  $\rho$  y  $\gamma$  correspondientes a una constelación M-QAM son [1], [4], [5]:

$$\rho = \frac{6 \log_2 M}{M - 1}. \quad (33)$$

$$\gamma = 4 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right). \quad (34)$$

Teniendo en cuenta que para este tipo de canal  $|H(f)| = \sqrt{1 + 2\alpha \cos(2\pi\tau f) + \alpha^2}$ , la expresión para la probabilidad de error de bit de la modulación FMT se convierte en:

$$\Pr\{\varepsilon_b\} \approx \frac{4}{N \log_2 M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \times \sum_{i=1}^N Q \left( [1 + 2\alpha \cos(2\pi\tau f_i) + \alpha^2] \frac{6 \log_2 M}{M - 1} \frac{E_b}{N_0} \right). \quad (35)$$

#### IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan los resultados de desempeño obtenidos por simulación sobre cuatro canales multirrayecto. Los esquemas FMT evaluados utilizan la misma constelación M-QAM y la misma relación  $E_b/N_0$  en todos los tonos. En cada una de las gráficas presentadas se muestra la curva de desempeño (obtenida por simulación) junto con las correspondientes curvas teóricas de probabilidad de error deducidas en la sección III. Para efectos de comparación, también se muestran las curvas de desempeño (obtenidas por simulación) de los esquemas de modulación M-QAM cuando se hace la transmisión con portadora única. En la Tabla II se resumen las especificaciones de cada escenario de simulación.

En Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9 y Fig. 10, se muestran respectivamente las gráficas de desempeño de los esquemas FMT 4-QAM y FMT 16-QAM cuando la transmisión se lleva a cabo a través de los canales multirrayecto indicados en la Tabla II. Los resultados muestran una evidente mejora en la tasa de error de bit (BER) cuando se usa FMT sobre canales dispersivos (con multirrayecto), sin embargo, en ningún caso se alcanza la probabilidad de error teórica correspondiente a un canal AWGN, esto se debe al efecto de realce de ruido en el que se incurre al usar la nueva variable de decisión  $v_k^{(i)}$  en (13) para estimar el mensaje. Por ejemplo, en el canal multirrayecto

TABLA II  
CONFIGURACIÓN DE LAS SIMULACIONES.

Número de tonos	32
Filtro conformador	SRRC con roll-off 0.5
Constelaciones usadas	4-QAM y 16-QAM
Número de rayos del canal multirrayecto	2 (Directo y reflejado)
Combinaciones $(\alpha, \tau)$ simuladas	$(0.5, 0.75T)$ , $(0.5, 1.5T)$ , $(0.8, 0.75T)$ , $(0.8, 1.5T)$
Número de símbolos transmitidos	32000 por cada valor de $E_b/N_0$
Frecuencia portadora	$f_c = 2/T$

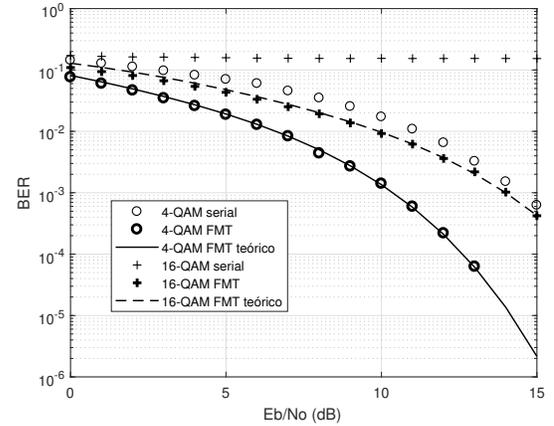


Fig. 7. Desempeño de FMT sobre un canal multirrayecto con  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = 0.75T$ .

$\alpha = 0.5$ ,  $\tau = 1.5T$ , la ganancia de procesamiento lograda con FMT 4-QAM respecto a 4-QAM es aproximadamente 3dB (para una BER =  $10^{-3}$ ), mientras que la diferencia de desempeño respecto al canal AWGN es de 1.7dB. Así mismo, la ganancia de procesamiento de FMT 16-QAM respecto a 16-QAM es infinita, mientras que la diferencia de desempeño respecto al canal AWGN es de 3.6dB (para una BER =  $10^{-3}$ ).

Por otro lado, se observa la gran similitud que existe entre la probabilidad de error de bit deducida analíticamente en la sección III y la BER obtenida por simulación en los 4

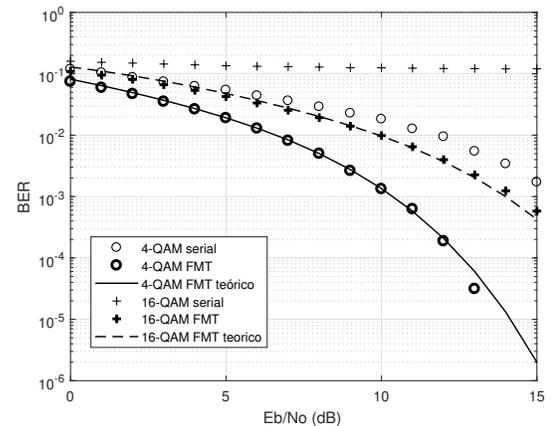


Fig. 8. Desempeño de FMT sobre un canal multirrayecto con  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = 1.5T$ .

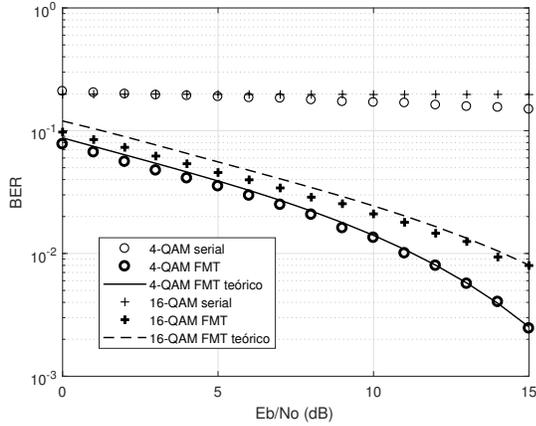


Fig. 9. Desempeño de FMT sobre un canal multitrayecto con  $\alpha = 0.8$  y  $\tau = 0.75T$ .

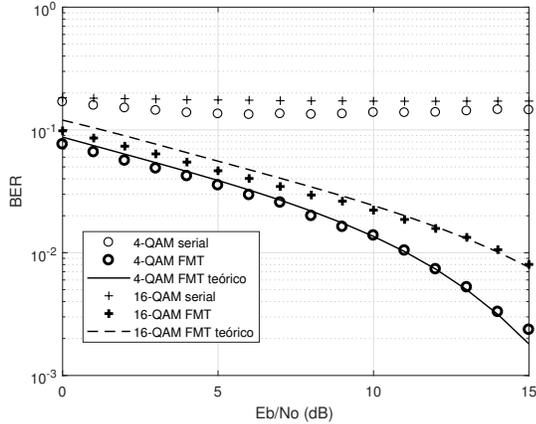


Fig. 10. Desempeño de FMT sobre un canal multitrayecto con  $\alpha = 0.8$  y  $\tau = 1.5T$ .

escenarios. Dicha similitud demuestra, no solo la validez de las expresiones deducidas en la sección III, sino el hecho de que el número de tonos usados ( $N=32$ ) es adecuado para la transmisión a través de los canales multitrayecto señalados. Para constatar numéricamente el parecido entre la expresión de probabilidad de error de (30) y la BER, se calcula el error medio absoluto porcentual (MAPE: Mean Absolute Percentage Error), el cual está dado por [17]:

$$\text{MAPE}(\%) = 100 \times \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left| \frac{\text{BER}_l - \text{Pr}\{\varepsilon_b\}_l}{\text{BER}_l} \right|, \quad (36)$$

donde  $\text{BER}_l$  es la BER obtenida en el  $l$ -ésimo valor de  $E_b/N_0$  simulado y  $\text{Pr}\{\varepsilon_b\}_l$  es la expresión de probabilidad de error evaluada en dicho valor de  $E_b/N_0$ . El cálculo se hace considerando  $L$  valores equiespaciados de  $E_b/N_0$ . En la tabla III se muestran los resultados correspondientes al MAPE obtenidos en cada una de las simulaciones consideradas. En algunos casos, los valores del MAPE son relativamente elevados (cerca del 20%), sin embargo, es importante aclarar que la expresión de probabilidad de error deducida en este artículo corresponde a la tendencia asintótica que experimenta la

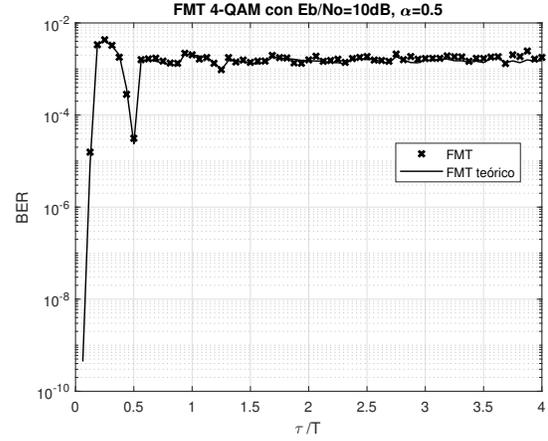


Fig. 11. Desempeño de FMT 4-QAM en función de  $\tau$  con  $\alpha = 0.5$  y  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ .

curva de BER cuando la  $E_b/N_0$  toma valores arbitrariamente grandes. Por esa razón, la precisión aumenta en la medida que crece  $E_b/N_0$ .

TABLA III  
VALORES DEL ERROR MEDIO ABSOLUTO PORCENTUAL (MAPE).

Escenario	FMT 4-QAM	FMT 16-QAM
$\alpha = 0.5, \tau = 0.75T$	7.23 %	15.34 %
$\alpha = 0.5, \tau = 1.5T$	6.42 %	15.12 %
$\alpha = 0.8, \tau = 0.75T$	12.14 %	21.56 %
$\alpha = 0.8, \tau = 1.5T$	11.47 %	19.77 %

En Fig. 11 y Fig. 12 se muestra el desempeño de FMT 4-QAM ( $N = 32$ ) al variar los valores de  $\tau$  y  $\alpha$ . Las figuras revelan la gran similitud que existe entre la expresión matemática de (30) y la BER obtenida por simulación. Por otro lado, se sabe que a medida que aumentan los valores de  $\tau$  y/o  $\alpha$ , el desvanecimiento se hace más selectivo en frecuencia [4], [8], sin embargo, la Fig. 11 muestra un desempeño prácticamente constante en términos de  $\tau$ . Esto se debe al hecho de que cada tono percibe un canal con desvanecimiento plano siempre y cuando  $N$  sea suficientemente grande. En este ejemplo en particular, la máxima dispersión de retardo considerada es  $\tau_{rms} = \frac{\alpha\tau}{1+\alpha^2} = 1.6T$ , por lo que el número mínimo de tonos necesarios para garantizar una respuesta plana del canal es  $N = 16$ .

La Fig. 13 muestra el desempeño de FMT 4-QAM ( $N = 32$ ) comparado con OFDM 4-QAM en un canal multitrayecto caracterizado por  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = 1.5T$ . El sistema OFDM utiliza una transformada rápida de Fourier (FFT: Fast Fourier Transform) de  $N = 32$  puntos y tiene la misma frecuencia portadora  $f_c = 2/T$ . Se consideran dos configuraciones para OFDM, a saber: OFDM sin ningún tipo de equalización y OFDM con prefijo cíclico de  $1/8$  (4 muestras por símbolo OFDM). Los resultados muestran que, en este escenario en particular, el desempeño de FMT es similar al de OFDM con prefijo cíclico cuando  $E_b/N_0$  se hace arbitrariamente grande. Este resultado no es muy sorprendente, pues FMT y OFDM se basan en el mismo principio. Es importante mencionar que, a diferencia de lo que ocurre con FMT, el uso del prefijo

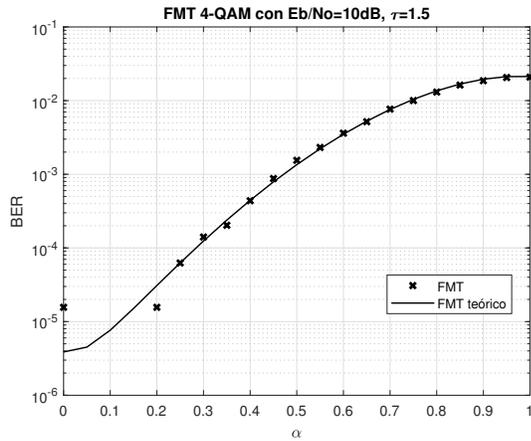


Fig. 12. Desempeño de FMT 4-QAM en función de  $\alpha$  con  $\tau = 1.5T$  y  $E_b/N_0 = 10\text{dB}$ .

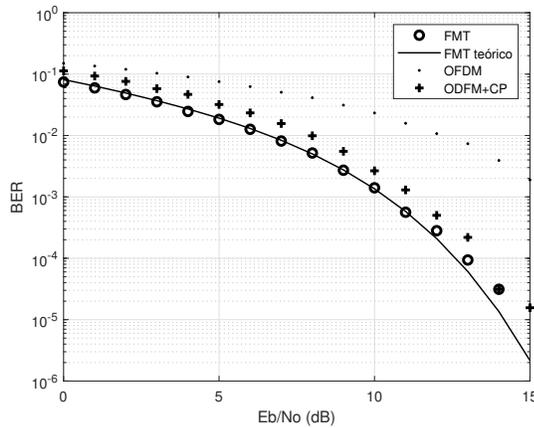


Fig. 13. Desempeño de FMT comparado con OFDM sobre un canal con  $\alpha = 0.5$  y  $\tau = 1.5T$ .

cíclico en OFDM permite lograr una ecualización perfecta del canal (en FMT la ecualización es aproximada), sin embargo, el precio a pagar es una menor eficiencia tanto en potencia como en ancho de banda, lo que hace que el receptor perciba una mayor cantidad de ruido por cada unidad de energía del mensaje. No obstante, es necesario decir que la complejidad computacional de OFDM es mucho menor que la de FMT [10], [15], [18].

## V. CONCLUSIONES

Este artículo presenta un análisis matemático simple de la modulación FMT, en los dominios temporal y espectral, y con ello trata de justificar la conveniencia de usar dicho esquema para la transmisión de información digital a través de canales con desvanecimiento multitrayecto. El aspecto clave de FMT es el hecho de que permite transformar un canal dispersivo de ancho de banda  $B$  en un conjunto de  $N$  subcanales paralelos equivalentes, de ancho de banda  $B/N$ , donde cada subcanal solo introduce ruido y una ganancia compleja que provoca la rotación y el escalonamiento de la constelación de

símbolos. En otras palabras, la división del canal conduce a una eliminación virtual de la ISI.

Sin embargo, el propósito principal del artículo es la deducción de una fórmula para la probabilidad de error de FMT bajo condiciones conocidas de un canal multitrayecto estacionario, considerando, en primera instancia, la posibilidad de usar diferentes constelaciones en cada tono, pero particularizando en el caso de una misma constelación y una misma relación  $E_b/N_0$  sobre cada tono. Los resultados gráficos presentados en la sección IV confirman la validez de la expresión deducida en la sección III y además avalan la conveniencia de usar FMT en lugar de los esquemas tradicionales M-QAM en la transmisión a través de canales con desvanecimiento multitrayecto. Finalmente, es importante mencionar que si se usa FMT M-QAM sobre un canal AWGN, la probabilidad de error será exactamente igual a la alcanzada por el esquema M-QAM tradicional (hacer  $\alpha = 0$  en (36)).

Como trabajo futuro se sugiere hacer un análisis de desempeño de la modulación FMT usando diferentes constelaciones y distintas potencias sobre cada tono, y comparar la tasa de error de bit con la expresión obtenida en este artículo. Por otro lado, se sugiere obtener una expresión para la probabilidad de error de FMT bajo condiciones de conocimiento parcial del estado del canal.

## REFERENCIAS

- [1] D. G. Forney and G. Ungerboeck, "Modulation and Coding for Linear Gaussian Channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2384–2415, 1998.
- [2] J. G. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2008.
- [3] N. Benvenuto and G. Cherubini, *Algorithms for Communications Systems and their Applications*. J. Wiley, 2002.
- [4] R. G. Gallager, *Principles of Digital Communication*. Cambridge University Press, jan 2008, vol. 9780521879.
- [5] D. Forney, "Chapter 04: The Gap Between Uncoded Performance and the Shannon Limit," *Lecture Notes on Communications*, vol. 2, pp. 35–41, 2005.
- [6] G. E. Bottomley, *Channel Equalization for Wireless Communications: From Concepts to Detailed Mathematics*, 2011.
- [7] E. Biglieri, J. Proakis, and S. Shamai, "Fading Channels: Information-Theoretic and Communications Aspects," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2619–2692, 1998.
- [8] S. S. Haykin, *Communication Systems*. J. Wiley, 1983.
- [9] I. Berenguer, "Filtered Multitone (FMT) Modulation for Broadband Fixed Wireless Systems," *October*, no. August, 2002.
- [10] A. M. Tonello, "Performance Limits of Multicarrier Based Systems in Fading Channels with Optimal Detection," *International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications, WPMC*, vol. 3, no. 3, pp. 1005–1009, 2002.
- [11] —, "Exact Matched Filter Performance Bound for Multitone Modulation in Fading Channels," no. 1, pp. 361–365, 2003.
- [12] A. M. Tonello and F. Pecile, "Analytical Results about the Robustness of FMT Modulation with Several Prototype Pulses in Time-Frequency Selective Fading Channels," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 5, pp. 1634–1645, 2008.
- [13] T. Wang, J. G. Proakis, and J. R. Zeidler, "Interference Analysis of Filtered Multitone Modulation over Time-Varying Fading Channels," in *GLOBECOM - IEEE Global Telecommunications Conference*, vol. 6, 2005, pp. 3586–3591.
- [14] J. Yli-Kaakinen, J. Alhava, M. Renfors, and H. Tuomivaara, "Multicarrier Waveform Processing for HF Communications," *2018 International Conference on Military Communications and Information Systems, ICMCIS 2018*, no. May, pp. 1–8, 2018.
- [15] D. Tse and P. Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.
- [16] W. Lopes and M. Alencar, "QPSK Detection Schemes for Rayleigh Fading Channels," 01 2002.

- [17] S. Ross, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 4th ed. Elsevier Science.
- [18] R. Prasad, *OFDM for Wireless Communications Systems*, 2004.



**Mauricio Ramírez** Recibió su título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones en 2009 y su grado de Master en Electrónica y Telecomunicaciones en 2015, ambos en la Universidad del Cauca, en Popayán-Colombia. Actualmente se desempeña como investigador en el grupo de Nuevas Tecnologías en Telecomunicaciones (GNTT) y como docente del Departamento de Telecomunicaciones de la Universidad del Cauca. Sus áreas de interés incluyen el procesamiento de señales para comunicaciones inalámbricas, la teoría de la información,

la inferencia estadística y los procesos estocásticos. Sus pasatiempos son la lectura, la observación astronómica y el fútbol.



**Angélica Serna** Recibió su título de Ingeniera en Electrónica y Telecomunicaciones en la Universidad del Cauca, Popayán-Colombia en el año 2019. Sus áreas de interés incluyen el procesamiento de señales y las comunicaciones móviles. Sus pasatiempos son el cine y la lectura.



**Susana Molano** Recibió su título de Ingeniera Electrónica y Telecomunicaciones en la Universidad del Cauca, Popayán – Colombia en diciembre de 2019. Actualmente se desempeña como Analista Bilingüe en Smurfit Kappa Colombia. Sus áreas de interés son el procesamiento de señales y las comunicaciones inalámbricas. Sus pasatiempos son el cine y el deporte.