

# Local Adaptive Bivariate Shrinkage Function for Seisogram Wavelet-Based Denoising

Y. Cesaire and R. Trujillo

**Abstract**—This paper presents an effective and wavelet-based seisogram denoising algorithm that considers the dependencies between the wavelet coefficients and their parents. For this purpose, a non-Gaussian bivariate distributions is used and corresponding nonlinear threshold function (shrinkage function) is derived using Bayesian estimation theory, in particular the “maximum a posteriori” estimator. To evaluate the performance of the proposed algorithm, the method is applied to seisograms that are corrupted with additive Gaussian noise over a wide range of noise variance. Experimental results are compared with different denoising schemes. The experimental results indicate that the proposed method not only outperforms the other denoising algorithms in terms of SNR but also helps retain other important information like the P-phase onsets.

**Index Terms**— Signal denoising, discrete wavelet transform, geophysical signal processing

## I. INTRODUCCIÓN

Los registros sísmicos o sismogramas constituyen el resultado final del proceso de adquisición, digitalización, análisis y registro de la señal detectada por un sismómetro u acelerómetro, y que corresponde a un evento sísmico. Estos registros permiten a los especialistas extraer información acerca del epicentro del evento y de su magnitud y, en consecuencia, determinar sus características energético-temporales y espaciales [1].

Como cualquier proceso en la naturaleza, los sismogramas están afectados por ruido, debido a fuentes naturales (viento, corrientes de agua, mareas, etc.) o a fuentes artificiales (tráfico, industria, etc.) [2]. A su vez el sensor (sismómetro u acelerómetro), introduce sus propias perturbaciones en la señal que registra, causados por el ruido browniano y por deficientes aislamientos electromagnéticos, electrostáticos o térmicos [3]. Todo esto provoca que los sismogramas resultantes puedan terminar siendo afectados por el ruido hasta un punto tal, que este puede enmascarar la señal útil, especialmente en redes sísmicas destinadas al monitoreo de la actividad sísmica de base, donde se pretende registrar terremotos de pequeña magnitud [2].

Por este motivo la reducción de ruido en los datos sísmicos constituye un tópico importante de investigación en la comunidad del procesamiento de datos sísmicos, siendo su objetivo fundamental la eliminación de las componentes del ruido conservando, tanto como sea posible, las principales características de la señal sísmica.

La reducción del ruido resulta relativamente simple si se conoce el espectro del mismo y éste no se solapa con el espectro de la señal útil del sismograma. En estos casos, tradicionalmente se han utilizados y se utilizan aún, filtros lineales invariantes en el tiempo, diseñados y sintonizados para frecuencias específicas [3], [4], [5]. El problema es más complejo si el espectro del ruido se solapa con la señal útil como ocurre con el ruido blanco ya que la aplicación de estos filtros, basados en la transformada de Fourier, provocaría que la energía en las bandas de frecuencia de rechazo (solapada con la señal útil) sea reducida.

Este inconveniente ha atraído la atención sobre métodos no lineales basados en la aplicación de la transformada wavelet discreta (DWT). De manera general, la DWT descompone una señal a través de un conjunto de funciones básicas  $\psi_{kj}$  (wavelets) obtenidas mediante versiones escaladas y desplazadas de una wavelet prototipo  $\psi$  llamada wavelet madre. La DWT es parsimoniosa, en el sentido de que, si la señal es suave y sin ruido, la energía de la transformada se concentra en unos pocos coeficientes [6].

Una vez realizada la descomposición wavelet de la señal, es posible disminuir el nivel de ruido que la contamina, asumiendo que los coeficientes wavelets que tienen magnitudes pequeñas, se deben en gran medida al ruido y pueden ser eliminados. En este proceso, que se conoce como umbralización, cada coeficiente wavelet  $y_{k,j}$  es comparado con un umbral  $T$ . Si la magnitud del coeficiente es menor que el umbral, el mismo se hace cero, en caso contrario el coeficiente se considera significativo y se modifica en dependencia de la regla de umbralización. Finalmente se reconstruye la señal, a partir de los coeficientes modificados  $\hat{w}_{k,j}$ , mediante la transformada wavelet inversa.

De las diversas estrategias de umbralización, el umbral suave es el más popular y ha sido teóricamente justificado por Donoho y Johnstone [7], [8] que proporcionaron, además, la expresión del umbral, conocido como "umbral universal", en función de la varianza de ruido  $\sigma_n^2$  y del número de muestras  $N$  en la señal:  $T_u = \sigma_n \sqrt{2 \log N}$ . Este método de reducción de ruido es conocido como VisuShrink [8]. Posterior a estos trabajos han aparecido muchos esquemas de umbralización que son adaptativos con respecto a las características espaciales de la señal [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15].

Fecha de Envío: 23-10-2019

Y. Cesaire, Empresa de Aplicaciones Informáticas, Santiago de Cuba, Cuba, (email: yanet.cesaire@scu.desoft.cu).

R. A. Trujillo, Universidad de Oriente, Facultad de Ing. Eléctrica, Santiago de Cuba, Cuba, (email: rtrujillo@uo.edu.cu).

Los métodos adaptativos han resultado ser más efectivos en las experiencias realizadas sobre todo en imágenes y se ha demostrado, desde el punto de vista teórico, que estas técnicas de umbralización wavelet son casi óptimas cuando se tiene poca información acerca de las características de las señales a analizar. Sin embargo, en muchos problemas prácticos se tiene algún conocimiento “a priori” acerca de la clase de señales que son objeto de interés. La optimalidad de un algoritmo para la reducción de ruido en una clase específica de señales o imágenes, no conlleva necesariamente a que este algoritmo sea óptimo para otro tipo de señales [16] y menos aún para señales con características remarcadas como las sísmicas.

Uno de los primeros métodos que hace uso de la transformada wavelet para la reducción de ruido en sismogramas es el método de Estructuras Coherentes (EC) propuesto por Mallat [6]. En este método se ordenan, en orden descendente, los coeficientes wavelet de acuerdo a su magnitud y si la relación de la energía del coeficiente (su cuadrado) con respecto a la energía contenida en el resto de los coeficientes precedentes es mayor que un umbral dado, se declara que el vector asociado a dicho coeficiente es una estructura coherente y el coeficiente se preserva. En caso contrario el coeficiente es anulado.

A su vez en el trabajo de Pazos [3] se perfecciona el método de Mallat a través de un denominado método de Estructuras Coherentes por Nivel (ECN). En esta propuesta la extracción de las estructuras coherentes se hace independientemente en cada escala de descomposición wavelet.

En [5] se aplica la transformada Wavelet (TW) para eliminar el ruido en los sismogramas. En este trabajo, luego del análisis de más de 1200 eventos sísmicos, se comparan diferentes métodos de reducción de ruido sobre sismogramas y se establece la superioridad de los métodos basados en la transformada wavelet por sobre los filtros de paso de banda lineal. Además, se demuestra que el algoritmo “NeighShrink” [9] es el más eficiente entre los algoritmos comparados. El esquema “NeighShrink” es uno de los primeros algoritmos adaptativos. A diferencia de esquemas previos, en los que el umbral era constante en cada banda de descomposición wavelet, “NeighShrink” propone que el umbral se calcule de manera individual para cada coeficiente wavelet considerando la influencia de los coeficientes vecinos.

Asumiendo que  $y_{k,j}$  representa el coeficiente wavelet  $k$  en el nivel de descomposición  $j$  de la señal degradada, la estimación  $\hat{w}_{k,j}$  que realiza “NeighShrink” se calcula en dependencia del valor de la expresión:

$$S_{k,j}^2 = y_{k-1,j}^2 + y_{k,j}^2 + y_{k+1,j}^2 \quad (1)$$

Si  $S_{k,j}^2 \leq T_u^2$  se establece  $\hat{w}_{k,j} = 0$ . En caso contrario se tiene:

$$\hat{w}_{k,j} = y_{k,j} \left(1 - \frac{T_u^2}{S_{k,j}^2}\right) \quad (2)$$

Este método, aplicado a los sismogramas, mejora significativamente el algoritmo de Pazos [3].

En otros trabajos [17], [18] y [19] se utiliza la transformada wavelet continua en lugar de la DWT y aunque se obtienen mejores resultados que en esquemas precedentes es a costa de la complejidad computacional inherente a la CWT y sus

resultados no se comparan con algoritmos adaptativos más recientes.

En [20] y [21] se realiza un estudio de los diferentes esquemas de umbralización basados en la DWT para lograr reducir el ruido en trazas sísmicas y detectar el tiempo de arribo de la onda P con exactitud. Entre los esquemas que se emplean se destacan los propuestos por Donoho y Johnstone (por ejemplo, VisuShrink [8]).

Posteriormente, aunque sin probarlos en sismogramas, han surgido otros métodos basados en wavelet para la reducción del ruido en señales. Esquemas ligeramente modificados del método “NeighShrink” se proponen en [10]. En [11] se realiza una modificación al método “NeighShrink”, que llamaremos “NeighSure”, que, en lugar de usar en (2) el umbral universal  $T_u$ , utiliza un umbral  $T$  diferente en cada sub-banda de descomposición. Este umbral y la cantidad de vecinos a considerar en (1) se determinan de forma que minimice el estimador insesgado del riesgo de Stein (SURE). Debido a la naturaleza del estimador de Stein el método ofrece mejoras cuando el número de coeficientes significativos es “grande” como ocurre, por ejemplo en imágenes sin embargo su eficiencia para señales unidimensionales es mucho menor.

En [12] y [13] se propone un esquema tipo “NeighShrink” (que llamaremos “NeighPreserve”), en el que la magnitud de los coeficientes, que contienen información de la señal, es preservada. Para la toma de la decisión de hacer cero o preservar el coeficiente se usan la magnitud del mismo y las de sus inmediatos vecinos.

Sendur y Selesnick [14] introducen un regla de umbralización bivariada que toma en cuenta las magnitudes del coeficiente y del coeficiente padre (o sea el coeficiente que está en la misma posición temporal pero en la siguiente banda de descomposición) que resulta muy eficiente en imágenes.

En el presente trabajo se presenta un esquema de umbralización wavelet adaptativo para la reducción del ruido en sismogramas. El método propuesto está inspirado en [14] y [15]. Los resultados experimentales demuestran que este método mejora a los métodos mencionados en la relación señal/ruido obtenida. Además se evalúa en qué medida los algoritmos de reducción de ruido permiten restaurar características esenciales del sismograma como el momento de arribo de la onda P y la amplitud. Como resultado de esta evaluación se detecta que el método propuesto disminuye en más de un 10% el error en la estimación del momento de arribo de la onda P con respecto a los métodos previos. Por último, el esquema propuesto, basado en distribuciones radiales, puede utilizarse para deducir fórmulas de umbralización en otros tipos de señales.

## II. MODELOS MULTIVARIADOS

Sea  $\{f_i, i = 1, \dots, N\}$ , la señal original y  $\{g_i, i = 1, \dots, N\}$ , el resultado de afectar la señal original con un ruido aditivo. Entonces:

$$g_i = f_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

donde  $\{\varepsilon_i\}$  son variables aleatorias independientes entre sí e independientes de  $\{f_i\}$  y además idénticamente distribuidas con una distribución normal  $N(0, \sigma_n^2)$ . El objetivo de los

métodos de reducción de ruido es obtener un estimado  $\{\hat{f}_i\}$  de  $\{f_i\}$  a partir de la observación de  $\{g_i\}$  de manera que minimice el error medio cuadrático (MSE):

$$MSE(\hat{f}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{f}_i - f_i)^2 \quad (4)$$

Al aplicar una transformada wavelet discreta a la ecuación (3) obtenemos:

$$y_{k,j} = w_{k,j} + \eta_{k,j} \quad (5)$$

donde  $y_{k,j}$ ,  $w_{k,j}$  y  $\eta_{k,j}$  representan el coeficiente wavelet  $k$  en el nivel de descomposición  $j$  de la señal degradada  $\mathbf{g} = \{g_i\}$ , de la señal original  $\mathbf{f} = \{f_i\}$  y del ruido  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}$  respectivamente y las variables aleatorias  $\{\eta_{k,j}\}$  son independientes entre sí y siguen una distribución normal  $N(0, \sigma_n^2)$  [7].

Para estimar  $w_{k,j}$  a partir de  $y_{k,j}$  se pueden utilizar, además de  $y_{k,j}$ , otros coeficientes wavelets que se correlacionan con él, como sus vecinos en la misma banda de descomposición o el coeficiente padre (o sea el coeficiente que está en la misma posición espacial pero en la siguiente banda de descomposición). Sea  $\mathbf{w}$  el vector  $d$ -dimensional  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)$  de coeficientes wavelet, donde  $w_1$  es el coeficiente a estimar y  $w_i$  ( $i = 2, \dots, d$ ) los demás coeficientes utilizados en la estimación donde, por simplicidad, se han omitido los subíndices dobles. De modo similar pueden ser definidos los vectores  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{n}$  conformados por los coeficientes correspondientes de la señal degradada y del ruido respectivamente asumiendo que  $y_i$ ,  $w_i$  y  $n_i$  están situados en la misma sub-banda y en la misma posición. Entonces:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} + \mathbf{n} \quad (6)$$

El estimador MAP ("Maximum a posteriori") estándar para  $w$  dada la observación corrupta  $y$  es:

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} p_{\mathbf{w}|\mathbf{y}}(\mathbf{w}|\mathbf{y}) \quad (7)$$

de donde puede obtenerse:

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} p_n(\mathbf{y} - \mathbf{w}) \cdot p_w(\mathbf{w}) \quad (8)$$

donde  $p_n$  y  $p_w$  son las funciones de densidad de probabilidad de las distribuciones multivariadas de  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{w}$  respectivamente. Esta última expresión equivale a:

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} [\log(p_n(\mathbf{y} - \mathbf{w})) + \log(p_w(\mathbf{w}))] \quad (9)$$

La distribución de  $\mathbf{n}$  puede inferirse por las restricciones impuestas al ruido:

$$p_n(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sigma_n (2\pi)^{d/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (10)$$

Para estimar la varianza del ruido  $\sigma_n^2$  a partir de los coeficientes wavelets  $y_{k,j}$ , puede usarse el estimador (ver, por ejemplo, [22]):

$$\hat{\sigma}_n = \frac{\text{Median}(|y_{k,1}|)}{0.6745} \quad (11)$$

Sin embargo, la definición de la distribución de  $\mathbf{w}$  resulta compleja. Una variante es tratar de aproximar  $p_w$  con alguna distribución conocida que, por un lado, debe ajustar suficientemente bien, en la clase de señales a analizar, la distribución observada de  $\mathbf{w}$  y por otro debe permitir una solución cerrada (o al menos sencilla de implementar) del problema de optimización (8).

En varios problemas de reducción de ruido en imágenes (ver [14], [15]) se ha utilizado la distribución dada por:

$$p_w(\mathbf{w}; \alpha) = \frac{\alpha^d}{|S^{d-1}| \sigma_w^d \Gamma(d)} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma_w} \|\mathbf{w}\|\right) \quad (12)$$

donde  $|S^{d-1}|$  es el área de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^d$ ,  $\sigma_w^2$  la varianza marginal del coeficiente  $w_1$ ,  $\Gamma(\cdot)$  la función Gamma y  $\alpha$  un parámetro que influye en la gráfica de la función de densidad. Esta distribución puede verse como una generalización de la distribución de Laplace. Para esta distribución es posible deducir una fórmula de umbralización relativamente simple. En efecto, usando (9), (10) y (12) se obtiene que:

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} \left[ \frac{-\|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|^2}{2\sigma_n^2} - \frac{\alpha \|\mathbf{w}\|}{\sigma_w} \right] \quad (13)$$

El vector solución  $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y})$  del problema (13) tiene que ser colineal a  $\mathbf{y}$ . Tomando  $\mathbf{w} = t\mathbf{y}$  donde  $t \geq 0$ ;  $t \in \mathbb{R}$ , (13) se transforma en:

$$\hat{t}(\mathbf{y}) = \arg \min_t \left[ \frac{\|\mathbf{y}\|^2(1-t)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{\alpha t \|\mathbf{y}\|}{\sigma_w} \right]; \quad (14)$$

luego:

$$\frac{2\|\mathbf{y}\|^2(1-\hat{t})}{2\sigma_n^2} = \frac{\alpha \|\mathbf{y}\|}{\sigma_w}; \quad (15)$$

de donde se obtiene:

$$\hat{t} = \left( 1 - \frac{\alpha \sigma_n^2}{\sigma_w \|\mathbf{y}\|} \right)_+ \quad (16)$$

Aquí como es usual  $(\cdot)_+ = \max(0, \cdot)$ . Finalmente de (16) se obtiene la fórmula de umbralización:

$$\hat{w}_i = \hat{t} y_i = y_i \left( 1 - \frac{\alpha \sigma_n^2}{\sigma_w \|\mathbf{y}\|} \right)_+; \quad i = 1, \dots, d \quad (17)$$

En virtud del carácter radial de la distribución (12) puede establecerse un algoritmo sencillo para estimar el parámetro  $\alpha$  de forma que aproxime la distribución empírica. En efecto, pasando a coordenadas esféricas, puede observarse que si  $\mathbf{w}$  sigue la distribución (12) se tiene:

$$\begin{aligned} P_w(r; \alpha) &= P(\|\mathbf{w}\| < r) = \\ &= \frac{\alpha^d}{\sigma_w^d \Gamma(d)} \int_0^r t^{d-1} \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma_w} t\right) dt \end{aligned} \quad (18)$$

luego

$$P_w(r; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(d)} \int_0^{\frac{\alpha}{\sigma_w} r} u^{d-1} \exp(-u) du \quad (19)$$

y por tanto:

$$P_w(r; \alpha) = \frac{\gamma(d, \frac{\alpha}{\sigma_w} r)}{\Gamma(d)} \quad (20)$$

donde  $\gamma$  es la función gamma incompleta:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt \quad (21)$$

La función radial de distribución acumulativa  $P_w(r; \alpha)$  puede compararse entonces con la distribución acumulativa empírica  $Q_w(r)$ . Esta distribución empírica es obtenida seleccionando un corpus de señales  $\mathcal{F}$ , suficientemente amplio y representativo de las señales a las que se aplicará la reducción de ruido. Se calcula entonces, para cada señal  $\{f_i, i = 1, \dots, N\} \in \mathcal{F}$ , la transformada wavelet y se evalúa en cada punto  $w_1$ , de cada banda, la norma  $\|\mathbf{w}\|$ . La proporción de valores de  $\|\mathbf{w}\|$  que quedan por debajo de  $r$  permite definir  $Q_w(r)$  y el parámetro  $\alpha$  se toma de manera que minimice la distancia entre  $P_w(r; \alpha)$  y  $Q_w(r)$ .

#### A. Modelo Propuesto

El modelo multivariado que se propone en el presente trabajo es un modelo bivariado similar al utilizado en [14] para la reducción de ruido en imágenes. En este modelo, el vector  $\mathbf{w}$  de la distribución multivariada (12) está formado por el coeficiente wavelet bajo consideración  $w_1 = w_{k,j}$ , y su coeficiente padre  $w_2 = w_{k,j+1}$ .

El corpus de señales sísmicas utilizado, para estimar el parámetro  $\alpha$  en el presente artículo, está formado por 318 sismogramas del año 2010, seleccionados de la base de datos que se encuentra en el Centro Nacional de Investigaciones Sismológicas de Cuba (CENAI). La frecuencia de muestreo, en todos los casos, es de 100 Hz y cada señal consta de 3 componentes ortogonales, una para el registro del movimiento en la dirección vertical y dos componentes horizontales mutuamente perpendiculares, en las direcciones Norte-Sur y Este-Oeste. Cada componente contiene 8192 mediciones. Para el histograma empírico se utilizan las 4 primeras bandas de descomposición wavelet usando la función madre “Db4”. En total el histograma empírico agrupa 2.442.240 mediciones, lo cual garantiza una distribución acumulativa empírica  $Q_w(r)$  suficientemente suave.

En la Fig. 1 se muestra la distribución empírica resultante. Aunque las curvas de nivel de la distribución no son exactamente circulares, la distribución empírica puede aproximarse bastante bien con la distribución (12). En la Fig. 2 se muestran las curvas de distribución radial para diferentes valores de  $\alpha$ . El valor de  $\alpha$  que proporciona el mejor ajuste de  $P_w(r; \alpha)$  a  $Q_w(r)$  es  $\alpha = 3,9$ . Puede apreciarse la diferencia entre este valor y el obtenido por Sendur [14], para imágenes de  $\alpha = \sqrt{3}$ , que muestra las diferencias entre las distribuciones empíricas de los coeficientes wavelets de los corpus correspondientes. Por otra parte se aprecia, en la Fig. 2, que la cola de la distribución empírica es más pesada que la obtenida del modelo (12).

La distancia utilizada, entre las distribuciones, para la estimación de  $\alpha$  es la distancia del espacio  $L_1$ . En la Fig.3 se

muestran las distribuciones  $P_w(r; \alpha)$  obtenidas para los valores óptimos de  $\alpha$  de acuerdo a diferentes métricas.

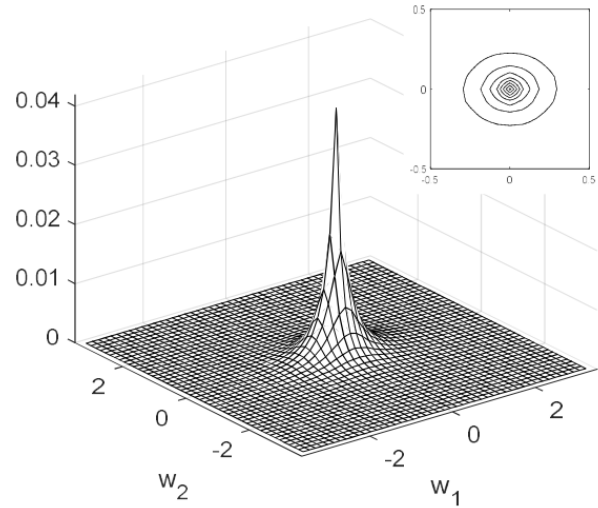


Fig. 1. Histograma empírico bivariado y sus curvas de nivel.

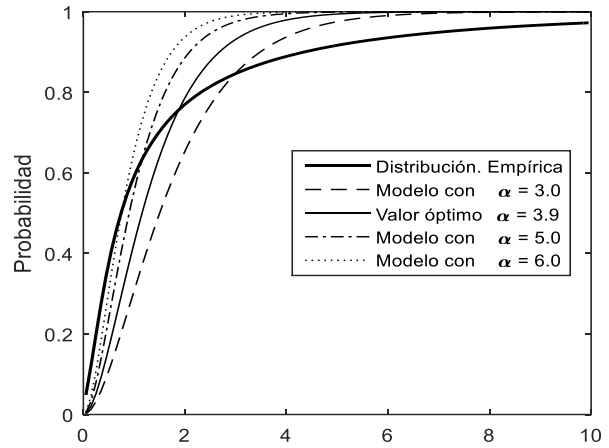


Fig. 2. Función de Distribución empírica radial  $Q_w(r)$  del Modelo Propuesto y funciones de distribución acumulativas radiales  $P_w(r; \alpha)$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

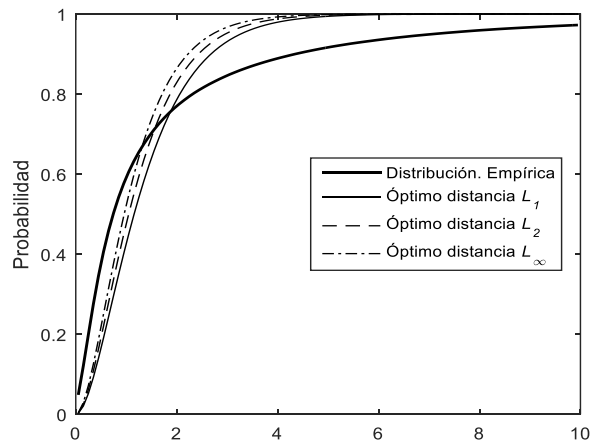


Fig. 3. Función de Distribución empírica radial  $Q_w(r)$  y funciones de distribución acumulativas  $P_w(r; \alpha)$  para valores de  $\alpha$  óptimos de acuerdo a diferentes métricas.

Se puede apreciar que tanto la métrica de  $L_2$  como la métrica de  $L_\infty$  generan soluciones que aproximan peor la cola de la distribución empírica aunque las umbralizaciones resultantes ofrecen igualmente buenos resultados en la relación señal/ruido de la señal restaurada.

El valor óptimo de  $\alpha$  es sensible a la función madre. La Tabla I muestra los valores óptimos  $\alpha$  para algunas familias wavelets (Haar, Daubechies, Symlets, Coiflet y Biorotogonal). Se aprecia que los valores obtenidos son consistentes con el valor de “Db4”, marcado en negritas.

TABLA I  
VALORES ÓPTIMOS A PARA DIFERENTES FUNCIONES MADRES

Haar	3.2	Sym3	3.9	Coif2	3.9	Bior2.8	3.7
Db2	3.7	Sym4	3.9	Coif3	4.0	Bior3.5	3.9
Db3	3.9	Sym5	3.9	Coif4	4.0	Bior3.7	3.8
Db4	<b>3.9</b>	Sym6	4.0	Coif5	4.0	Bior3.9	3.8
Db5	3.9	Sym7	3.9	Bior2.2	3.6	Bior4.4	3.9
Db6	3.9	Sym8	4.0	Bior2.4	3.7	Bior5.5	4.3
Sym2	3.7	Coif1	3.8	Bior2.6	3.7	Bior6.8	3.9

La fórmula de umbralización derivada de (17), para Db4, es:

$$\hat{w}_{k,j} = \left( 1 - \frac{3,9 \cdot \sigma_n^2}{\sigma_w \sqrt{y_{k,j}^2 + y_{k,j+1}^2}} \right)_+ y_{k,j} \quad (22)$$

Para obtener la varianza  $\sigma_w^2$  del coeficiente  $w_{k,j}$ , debe observarse que  $\sigma_y^2 = \sigma_n^2 + \sigma_w^2$  donde  $\sigma_y^2$  es la varianza marginal de la observación con ruido  $y_{k,j}$ . Además, al igual que en [14], la varianza  $\sigma_y^2$  puede estimarse empíricamente si se utiliza una vecindad espacial  $N(y_{k,j})$  del coeficiente  $y_{k,j}$ , y se toma:

$$\sigma_y^2 \approx \frac{1}{L} \sum_{y \in N(y_{k,j})} y^2 \quad (23)$$

donde  $L$  es la cantidad de coeficientes contenidos en la vecindad  $N(y_{k,j})$ . Entonces  $\sigma_w$  puede estimarse como:

$$\sigma_w = \sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_n^2)_+} \quad (24)$$

Las pruebas experimentales indican que, la variación de  $L$  en el rango entre 7 y 27 influye poco en los resultados que se obtienen. Valores grandes de  $L$  son ligeramente favorables cuando el nivel de ruido es alto ya que, en estos casos, la presencia de más valores en la fórmula (23) permite disminuir la influencia del ruido. Por el contrario si el nivel de ruido es bajo ofrecen mejores resultados valores más pequeños de  $L$ . El valor utilizado en este trabajo es  $L = 21$ .

### III. RESULTADOS Y DISCUSIONES

Para la validación del método que se propone se compara el mismo con otros métodos de reducción de ruido sobre un conjunto de sismogramas a los que se le ha añadido artificialmente ruido blanco. Luego se compara la señal estimada por cada método con el sismograma original.

En el caso específico de este trabajo, los eventos sísmicos seleccionados para las comparaciones fueron tomados de la base de datos del Centro de Investigaciones Sismológicas de Cuba (CENAI). Se seleccionaron un total de 252 señales sísmicas donde 83 corresponden al 2011, 84 al 2012 y 85 corresponden al 2013. Las señales provienen de 13 estaciones sismológicas diferentes para garantizar su heterogeneidad. Puede apreciarse que en la validación de los modelos no se utilizan los sismogramas utilizados para estimación del parámetro  $\alpha$ .

Los sismogramas, con una longitud de 8192 mediciones, se modificaron para obtener registros con diferentes relaciones señal/ruido (SNR), mediante la adición de ruido blanco gaussiano con media cero y con diferentes varianzas. El rendimiento de cada algoritmo fue evaluado en 50 repeticiones para cada relación señal/ruido, con diferentes juegos de ruido gaussiano y para cada una de las 252 trazas sísmicas utilizadas. Los algoritmos: EC [6], ECN [3], NeighPreserve [12], NeighSure [11], NeighShrink [9] y VisuShrink [8] se utilizaron para comparar con los enfoques propuestos. La función madre “Db4” fue la función base empleada para descomponer la señal y se utilizaron 5 niveles de descomposición en todos los casos. Los algoritmos utilizados en el experimento se implementaron en MATLAB 2018a (Mathworks Inc., Natick, MA, USA).

En la Tabla II se muestran los valores SNR promedio obtenidos en los sismogramas por cada método y en la Tabla III los rangos promedios. Los valores SNR son reportados en dB. En ambas tablas se enfatizan en negritas los mejores valores.

TABLA II

VALORES SNR PROMEDIO DE LOS SISMOGRAMAS RESTAURADOS POR LOS MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE RUIDO PARA DIFERENTES NIVELES DE RUIDO

SNR Señal	5	10	20	30	40
Métodos	SNR Promedio (dB)				
EC	19.60	24.44	33.95	42.79	49.89
ECN	19.70	24.54	34.03	42.84	49.87
NeighShrink	19.83	24.69	34.26	43.19	50.45
NeighSure	14.01	18.96	28.82	38.44	47.49
NeighPreserve	19.58	24.44	34.02	42.98	50.29
VisuShrink	18.41	23.29	32.90	42.02	49.77
Modelo Propuesto	<b>19.88</b>	<b>24.75</b>	<b>34.35</b>	<b>43.31</b>	<b>50.67</b>

Nota: El SNR de cada método, en cada nivel de ruido, ha sido promediado sobre 50 realizaciones diferentes de ruido gaussiano.

TABLA III

RANGOS PROMEDIO DE LOS MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE RUIDO PARA DIFERENTES NIVELES DE RUIDO

SNR Señal	5	10	20	30	40
Métodos	Rango Promedio				
EC	4.07	4.04	3.99	3.84	3.46
ECN	5.39	5.32	5.21	4.92	4.09
NeighShrink	4.80	4.79	4.79	4.90	5.23
NeighSure	1.04	1.09	1.28	1.42	1.99
NeighPreserve	4.14	4.15	4.17	4.15	4.01
VisuShrink	2.06	2.13	2.09	2.31	2.83
Modelo Propuesto	<b>6.48</b>	<b>6.48</b>	<b>6.45</b>	<b>6.46</b>	<b>6.38</b>

Nota: El rango de cada método, en cada nivel de ruido, ha sido promediado sobre 50 realizaciones diferentes de ruido gaussiano.

Puede apreciarse que, en todos los niveles de ruido, las umbralizaciones resultantes del modelo propuesto ofrecen ligeramente mejores resultados que los restantes métodos. Las diferencias más significativas se observan en los rangos promedios de cada método (Tabla III). Los rangos promedios se reportan en el intervalo [1,7] ya que se prueban 7 métodos diferentes asignando, en cada una de las 50 repeticiones, el valor de 1 al peor (el que ofrece el menor valor SNR) y el valor de 7 al mejor (con el mayor SNR) y valores entre 2, 3, 4 y 5 al resto de los métodos en dependencia del lugar que ocupen en la prueba. Taswell [16] mostró que el uso de los rangos en lugar de los valores SNR puede establecer mejor las diferencias entre diferentes métodos de reducción de ruido.

#### A. Otros Criterios de Calidad

Para discernir las ventajas de un método de reducción de ruido sobre otro, se verificó en qué medida la reducción del ruido conserva las características esenciales de la señal sísmica, en particular: el momento de arribo de la onda primaria y su magnitud. Para evaluar estos dos aspectos se tomaron los 252 sismogramas utilizados para las comparaciones del SNR y se calcularon ambos parámetros en cada uno de ellos. El momento de arribo de la onda P se determinó por el método de Kalkan [23], disponible para MATLAB 2018a (Mathworks Inc., Natick, MA, USA), y como criterio de magnitud se utilizó la diferencia entre el máximo y la mediana de la señal sísmica. Luego, cada una de las señales se contaminó con ruido blanco gaussiano, se aplicó cada uno de los métodos y con la señal restaurada se evaluaron nuevamente el momento de arribo de la onda P y el criterio de magnitud escogido. El proceso fue repetido 50 veces para cada relación señal/ruido, con diferentes juegos de ruido gaussiano y se promediaron las diferencias absolutas encontradas entre los parámetros de la señal original y de la señal restaurada (ver Tablas IV y V).

TABLA IV  
ERROR PROMEDIO (S) EN LA ESTIMACIÓN DEL INSTANTE DE ARRIBO DE LA ONDA P A PARTIR DEL SISMOGRAMA RESTAURADO PARA DIFERENTES NIVELES DE RUIDO

SNR Señal	5	10	20	30	40
Métodos	Error Promedio (s)				
EC	0.912	0.508	0.276	0.232	0.216
ECN	1.069	0.611	0.349	0.291	0.279
NeighShrink	0.738	0.407	0.138	0.059	0.029
VisuShrink	1.155	0.724	0.371	0.331	0.314
Modelo Propuesto	<b>0.664</b>	<b>0.345</b>	<b>0.120</b>	<b>0.053</b>	<b>0.026</b>
Mejora (%)	<b>+10,1</b>	<b>+15,2</b>	<b>+13,0</b>	<b>+10,2</b>	<b>+10,3</b>

TABLA V  
ERROR RELATIVO PROMEDIO (%) EN LA ESTIMACIÓN DEL CRITERIO DE MAGNITUD A PARTIR DEL SISMOGRAMA RESTAURADO PARA DIFERENTES NIVELES DE RUIDO

SNR Señal	5	10	20	30	40
Métodos	Error Relativo Promedio (%)				
EC	6.49	4.08	1.71	0.96	0.91
ECN	6.86	4.30	2.05	1.26	1.22
NeighShrink	7.79	4.04	1.09	<b>0.15</b>	<b>0.09</b>
VisuShrink	9.84	7.51	3.97	1.49	1.44
Modelo Propuesto	<b>5.89</b>	<b>3.02</b>	<b>0.88</b>	<b>0.15</b>	<b>0.09</b>
Mejora (%)	<b>+9,2</b>	<b>+25,2</b>	<b>+19,3</b>	-	-

#### IV. CONCLUSIÓN

Los resultados obtenidos muestran que la umbralización propuesta en el presente trabajo mejora las utilizadas en trabajos precedentes, no solo en el nivel de SNR de la señal restaurada sino además en la precisión con la que pueden determinarse, a partir del sismograma restaurado, parámetros importantes tales como el momento de arribo de la onda P y su magnitud. En particular, se logra una mejora de más de un 10% en la precisión de la estimación del arribo de la onda P con respecto al NeighShrink y también una mejora significativa (para los SNR de 5, 10 y 20 dB) en la estimación de la amplitud máxima de la onda. Debe analizarse, en futuros trabajos, el valor óptimo de  $\alpha$  para sismogramas con frecuencias de muestreo diferentes a 100 Hz.

#### REFERENCIAS

- [1] Kulhanek, O. and L. Persson, *Seismogram Interpretation*. 2020: p. 1-11.
- [2] Bormann, P., *New manual of seismological observatory practice (NMSOP-2)*. Deutsches GeoForschungszentrum GFZ; IASPEI, Potsdam, 1992.
- [3] García, A.P., *Estación sísmica digital. Tratamiento digital de señales*. 2002: pp. 118-132.
- [4] Pazos, A., M.J. Gonzalez, and G. Alguacil, *Non-linear filter, using the wavelet transform, applied to seismological records*. Journal of Seismology, 2003. 7: pp. 413-429.
- [5] HLoupis, G., *Seismological data acquisition and signal processing using wavelets*. London, 2008: p. 26-159.
- [6] Mallat, J., *Wavelet Tour of Signal Processing*. 1999: p. 655-660.
- [7] Donoho, D.L., *Denoising by soft thresholding*. IEEE Trans Inform Theory, 1995. 41: pp. 613-627.
- [8] Donoho, D.L. and I.M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*. Department of Statistics. Stanford University . Stanford. California. 94305-4065. U.S.A. Biometrika, 1994. 81(3): pp. 425-455.
- [9] Cai, T.T. and B. Silverman, *Incorporation Information on Neighbouring coefficients into wavelet estimation*. Sankhya: The Indian Journal of Statistic, 2001. 63(Serie B, Pt. 2): p. 127-148.
- [10] Biswas, M. and H. Om, *A New Adaptive Image Denoising Method Based on Neighboring Coefficients*. J. Inst. Eng. India Ser. B, 2016. 97(1): pp. 11-19.
- [11] Dengwen, Z. and C. Wengang, *Image denoising with an optimal threshold and neighbouring window*. Pattern Recognition Letters www.elsevier.com/locate/patrec, 2008: p. 1694-1697.
- [12] Yang, Y. and Y. Wei, *Neighboring Coefficients Preservation for Signal Denoising*. Circuits Syst Signal Process 31:827-832, 2012. 31: pp. 827-832.
- [13] Ying Yang, Y.W., Ming Yang, *Signal Denoising Based on the Adaptive Shrinkage Function and Neighborhood characteristics*. Circuits Syst Signal Process, 2014. 33: pp. 3921-3930.

- [14] Sendur, L. and I.W. Selesnick, *Bivariate Shrinkage With Local Variance Estimation*. IEEE Signal Processing Letters, 2002. **9**(12): pp. 438.
- [15] Cho, D. and T.D. Bui, *Multivariate statistical modeling for image denoising using wavelet transforms*. Signal Processing: Image Communication, 2004: pp. 77-89.
- [16] Taswell, C., *The What, How, and Why of Wavelet Shrinkage Denoising*. 2001.
- [17] S. Mostafa Mousavi, C.A.L., Stephen P. Horton, *Automatic microseismic denoising and onset detection using the synchrosqueezed continuous wavelet transform*. Geophysics, 2016. **81**(4): p. V341.
- [18] Mousavi, S.M. and C.A. Langston, *Hybrid Seismic Denoising Using Higher-Order Statistics and Improved Wavelet Block Thresholding*. Bulletin of the Seismological Society of America, 2016. **106**(4): pp. 1380–1393.
- [19] Langston, C.A. and S.M. Mousavi, *Adaptive Seismic Denoising based on the synchrosqueezed-continuous wavelet transform and block-thresholding*. Center for Earthquake Research and Information, 2018: pp. 1-44.
- [20] Gaci, S., *The Use of Wavelet-Based Denoising Techniques to Enhance the First-Arrival Picking on Seismic Traces*. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2014. **52**(8): pp. 4558-4563.
- [21] Mousavi, S.M. and C.A. Langston, *Adaptive noise estimation and suppression for improving microseismic event detection*. Journal of Applied Geophysics, 2016. **132**: pp. 116-124.
- [22] Leigh, A., et al., *Comprehensive analysis on the effects of noise estimation strategies on image noise artifact suppression performance*. IEEE International Symposium on Multimedia, 2011: p. 97-104.
- [23] Kalkan, E., *An Automatic P-Phase Arrival-Time Picker*. Bulletin of the Seismological Society of America, 2016. **106**(3): pp. 971–986.



**Yanet Cesaire Velazquez.** Graduada de Ingeniera en Ciencias Informática en el 2010 en la Universidad de las Ciencias Informáticas, Habana, Cuba. Máster en Informática Aplicada en 2016. Sus trabajos de investigación incluyen reducción de ruido en señales, sismogramas e imágenes.



**Rafael Arturo Trujillo Codorniu.** Graduado de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Odessa, Ucrania (1979), y de Doctor en Ciencias Matemáticas en la Universidad de Rostov del Don, Rusia (1986). Actualmente es profesor Adjunto de la Universidad de Oriente en Santiago de Cuba y trabaja en la Empresa SerCoNi.