

# Reducing the Number of Control Actions in the Discrete Reactive Optimal Power Flow

Marina Valença Alencar, Edilaine Martins Soler, Leonardo Nepomuceno, *Member, IEEE*, Antonio Roberto Balbo, and Edméa Cássia Baptista

**Abstract**—This paper proposes a new formulation for the Discrete Reactive Optimal Power Flow problem (DROPF) that aims at reducing the number of control actions of the problem. For such a purpose, additional constraints are introduced in the classical model to the DROPF problem so as to represent specific behaviors of voltage control devices in the electrical system. These behaviors involve the actuation of a control device only when the voltage magnitude limit of the bus controlled by such device is effectively reached. The proposed DROPF model is solved by the branch-and-bound method implemented in the free solver BONMIN. Numerical tests were performed using the IEEE 14, 30 and 118 bus electrical systems and demonstrated the efficiency of the proposed model. The results are compared with the ones obtained by a classical DROPF.

**Index Terms**—Optimal power flow problem, complementarity constraints, discrete variables.

## I. INTRODUÇÃO

O sistema elétrico de potência é um sistema complexo, que contém uma série de dispositivos controláveis que influenciam diretamente no seu desempenho. O cálculo de fluxo de potência consiste essencialmente na determinação do estado do sistema, da distribuição dos fluxos e de algumas outras grandezas [1]. O problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO) tem como objetivo otimizar um determinado desempenho do sistema, levando em conta suas restrições físicas e operativas. O FPO pode ser modelado como problema de otimização restrito, estático, não convexo e com variáveis contínuas e discretas. Um dos subproblemas do FPO é o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo (FPOR) [2] em que as variáveis de controle referentes à potência ativa são fixadas e as variáveis de controle referentes à potência reativa são ajustadas de forma a otimizar um desempenho do sistema.

O problema de FPO teve origem na década de 60 [3]. A partir de então, muitos trabalhos com diferentes abordagens e formulações para estes problemas foram publicados. Exemplos de métodos de otimização contínua para a solução do problema envolvem: método do gradiente reduzido [4], método de Newton [5], programação quadrática sucessiva

[6], o método de pontos interiores [7], dentre vários outros. Na década de 90, foi proposta a primeira abordagem de resolução que considera as variáveis discretas neste problema, utilizando funções penalidade para tratar tais variáveis [8]. Desde então métodos de solução que tratam suas variáveis discretas, tem surgido: métodos meta-heurísticos [9], método da função lagrangiana barreira modificada aumentada [10], métodos de planos de corte [11], método *branch-and-bound* [12] [13] [14], entre outros. Dentre estes métodos destacamos o método *branch-and-bound*.

O FPO é uma ferramenta que pode ser utilizada para auxiliar no processo de tomada de decisão do operador junto ao sistema elétrico, de modo a melhorar um critério operativo pré-definido. Assim, para viabilizar a sua aplicação, o operador precisa que o número de ações de controle a serem executadas não seja excessivo, para não comprometer a implementação prática destes controles no sistema [15] [16]. Em formulações clássicas dos problemas de FPO, todas as variáveis de controle são efetivamente ajustadas para se determinar o estado ótimo do sistema. Em sistemas de grande porte, isso resulta em um alto número de variáveis de controle a serem implementados no sistema, o que pode inviabilizar a aplicação desses controles.

Além disso, devido a dificuldade de resolução causada pelas variáveis discretas em problemas de otimização, comumente em formulações clássicas dos problemas de FPO todas as variáveis são modeladas como contínuas, o que não condiz com a realidade de alguns controles do problema, que somente podem ser ajustados por passos discretos, fornecendo soluções não realistas para o problema de FPO [17].

Para sanar tais dificuldades [18] propõe um modelo para o problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo Discreto (FPORD) que restringe a atuação dos dispositivos de controle de tensão por meio de restrições de complementaridade, para que estes sejam ajustados somente quando um dos limites de tensão na barra controlada por eles for atingido. O modelo visa minimizar as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão e ainda considera a natureza discreta das variáveis *tap* dos transformadores e susceptância *shunt*. Tais considerações tornam o modelo de [18] bem realístico e suas soluções viáveis de serem implementadas na prática. No entanto, as restrições de complementaridade são consideradas de difícil resolução, pois a maioria dos métodos determinísticos desenvolvidos para otimização não linear não podem ser aplicados diretamente a estas restrições.

Em [19] foram incorporadas restrições referentes às barras de geração por meio de restrições de complementaridade no

M. V. Alencar, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Bauru, São Paulo, Brasil, marina\_valenca@hotmail.com.

E. M. Soler, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru, São Paulo, Brasil, edilaine.soler@unesp.br.

L. Nepomuceno, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru, São Paulo, Brasil, leonardo.nepomuceno@unesp.br.

A. R. Balbo, Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru, São Paulo, Brasil, antonio.balbo@unesp.br.

E. C. Baptista, Voluntário - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru, São Paulo, Brasil, edmea.c.baptista@unesp.br.

problema de máximo carregamento. Para resolver este problema de forma eficiente os autores utilizaram desigualdades equivalentes para tratar as restrições de complementaridade no problema de otimização não linear, e o problema resultante foi resolvido pelo método de pontos interiores.

A fim de viabilizar a implementação das soluções pelo operador do sistema, restringindo-se o número de ajustes dos dispositivos de controle de tensão do sistema, e obter soluções mais realistas que consideram a natureza discreta dos controles, propõe-se neste trabalho uma nova formulação para o problema de FPORD, a qual considera restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão. Esta formulação é baseada no modelo proposto por [18], com as restrições de atuação dos dispositivos de controle reformuladas por meio das desigualdades equivalentes apresentadas em [19]. O modelo para o problema de FPORD com restrições de atuação de dispositivos de controle proposto neste trabalho tem se mostrado viável de ser resolvido por métodos clássicos de otimização não linear inteira mista. Para a resolução deste modelo, este trabalho propõe utilizar o método *branch-and-bound* disponível no *solver* gratuito BONMIN [20][21]. Testes numéricos com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30 e 118 barras foram realizados e demonstram a eficiência do modelo proposto na redução do número de ajustes nas variáveis de controle quando comparado com o FPORD clássico.

Podem ser destacadas as seguintes contribuições deste trabalho: i) o modelo proposto para o problema de FPORD com restrições de atuação de dispositivos de controle fornece soluções viáveis de serem implementadas na prática pelo operador do sistema, devido a redução no número de ajustes dos dispositivos de controle de tensão do sistema; ii) o modelo proposto considera a natureza discreta dos *taps* de transformadores e susceptâncias *shunt* relacionadas aos bancos de capacitores e reatores, fornecendo soluções de acordo com a realidade destes controles; iii) o modelo proposto pode ser resolvido de maneira eficiente pelo *solver* gratuito BONMIN.

O artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção II são apresentados os principais conceitos relacionados ao problema de complementaridade. Na Seção III, descreve-se a modelagem dos dispositivos de controle de tensão. Na Seção IV são propostas reformulações nas restrições de complementaridade que representam a atuação dos dispositivos de controle. A Seção V apresenta a formulação matemática proposta para o problema de FPORD com restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão. Na Seção VI são apresentados os testes realizados com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30 e 118 barras e os resultados são analisados. A Seção VII apresenta as considerações finais deste trabalho.

## II. O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE

A condição de complementaridade entre duas variáveis reais  $x$  e  $y$  é representada pelo produto dessas variáveis igual a zero, podendo ser escrita utilizando a notação de complemento:

$$xy = 0 \Leftrightarrow x \perp y. \quad (1)$$

A condição pode ser satisfeita de três formas:

$$1) \ x = 0 \text{ e } y \neq 0$$

$$2) \ x \neq 0 \text{ e } y = 0$$

$$3) \ x = 0 \text{ e } y = 0.$$

De forma que, as duas primeiras situações satisfazem a condição de complementaridade estrita e a terceira a restrição de complementaridade não estrita. Se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são vetores de dimensão  $n$  não negativos, esse conceito pode ser aplicado também para vetores, de modo que esse comportamento se dá pelo produto escalar:

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0. \quad (2)$$

Pode-se ter ainda um problema de complementaridade com limites inferiores e superiores, chamado de problema com restrições de complementaridade mista, o qual visa determinar a variável real  $x$ , limitada superiormente e inferiormente, que complemente a função real  $F(x)$ , de tal forma que:

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \perp F(x). \quad (3)$$

A restrição (3) significa que:

$$\text{se } x = x^{min} \Rightarrow F(x) \geq 0 \quad (4a)$$

$$\text{se } x^{min} < x < x^{max} \Rightarrow F(x) = 0 \quad (4b)$$

$$\text{se } x = x^{max} \Rightarrow F(x) \leq 0. \quad (4c)$$

## III. MODELAGEM DA ATUAÇÃO DOS DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE TENSÃO

O controle envolvendo os limites nas magnitudes de tensão de um sistema de potência é uma tarefa importante na operação em tempo real. Alguns dispositivos são utilizados para o controle de tensão, tais como os bancos de capacitores e reatores *shunt*, os transformadores em fase, e a potência reativa fornecida por unidades geradoras, etc. Neste trabalho, a atuação dos transformadores e bancos de capacitores/reatores é modelada, conforme descrito a seguir.

Seja o modelo unifilar de um transformador em-fase mostrado na Fig. 1, em que se destacam a relação de transformação  $t_{km} : 1$ , a admitância própria do transformador  $y_{km}$  e as magnitudes das tensões  $V_k$  e  $V_m$ , associadas às tensões fasoriais  $\dot{E}_k$  e  $\dot{E}_m$ , respectivamente:

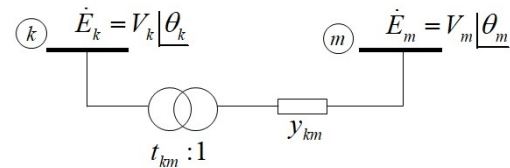


Fig. 1. Diagrama unifilar de um transformador em-fase.

Suponha uma situação em que o transformador opera com objetivos de controle da magnitude de tensão na barra  $k$ . Quando  $V_k$  atinge seu limite máximo ( $V_k^{max}$ ),  $t_{km}$  deve ser ajustado de forma a diminuir  $V_k$ , ou seja, deve-se diminuir  $t_{km}$ . Quando  $V_k$  atinge seu limite mínimo ( $V_k^{min}$ ), o  $t_{km}$  deve ser ajustado de forma a aumentar a magnitude de

tensão na barra  $k$ , ou seja, deve-se aumentar  $t_{km}$ . Essa regra heurística pode ser sintetizada em (5):

$$\text{se } V_k = V_k^{min} \Rightarrow \Delta t_{km} \geq 0 \quad (5a)$$

$$\text{se } V_k^{min} < V_k < V_k^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} = 0 \quad (5b)$$

$$\text{se } V_k = V_k^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} \leq 0, \quad (5c)$$

em que  $\Delta t_{km} = t_{km} - t_{km_i}$ , ou seja,  $\Delta t_{km}$  é a diferença entre o valor do *tap* a ser determinado ( $t_{km}$ ) e o valor inicial do *tap* ( $t_{km_i}$ ). A variável  $t_{km}$  só deve ser ajustada quando a magnitude de tensão na barra  $k$  atingir seu limite mínimo ou máximo. As condições descritas em (5) podem ser modeladas pelo problema de complementaridade (6), como mostrado em [18]:

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \perp \Delta t_{km}. \quad (6)$$

Suponha agora uma segunda situação em que o transformador opera com objetivos de controle da magnitude de tensão na barra  $m$ . Neste caso, tem-se, por raciocínio análogo, o comportamento descrito em (7):

$$\text{se } V_m = V_m^{min} \Rightarrow \Delta t_{km} \leq 0 \quad (7a)$$

$$\text{se } V_m^{min} < V_m < V_m^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} = 0 \quad (7b)$$

$$\text{se } V_m = V_m^{max} \Rightarrow \Delta t_{km} \geq 0. \quad (7c)$$

Nesta situação, a variável  $t_{km}$  só deve ser ajustada quando a magnitude  $V_m$  atingir seu limite mínimo ou máximo. Desta forma, pode-se modelar (7) pelo problema de complementaridade descrito em (8):

$$V_m^{min} \leq V_m \leq V_m^{max} \perp -\Delta t_{km}. \quad (8)$$

Sejam agora os bancos de capacitores e reatores *shunt*, os quais são utilizados para regular a magnitude de tensão de um determinada barra pela injeção/absorção adequada de potência reativa nesta barra [22]. Neste caso, a ideia também consiste em acionar este controle de tensão somente quando a magnitude de tensão na barra  $k$  atinge seu limite máximo ou mínimo. Quando  $V_k$  atinge seu limite máximo, a susceptância  $b_k^{sh}$  deve ser ajustada para diminuir a injeção de potência reativa nessa barra, ou seja, reduzindo  $b_k^{sh}$ . Se, por outro lado,  $V_k$  atinge seu limite mínimo, a susceptância  $b_k^{sh}$  deve ser ajustada de modo a aumentar a injeção de potência reativa nessa barra, ou seja, incrementando  $b_k^{sh}$ . Essa regra heurística é descrita em (9):

$$\text{se } V_k = V_k^{min} \Rightarrow \Delta b_k^{sh} \geq 0 \quad (9a)$$

$$\text{se } V_k^{min} < V_k < V_k^{max} \Rightarrow \Delta b_k^{sh} = 0 \quad (9b)$$

$$\text{se } V_k = V_k^{max} \Rightarrow \Delta b_k^{sh} \leq 0, \quad (9c)$$

em que  $\Delta b_k^{sh} = b_k^{sh} - b_{k_i}^{sh}$ , ou seja,  $\Delta b_k^{sh}$  é a diferença entre o valor a ser determinado para a susceptância ( $b_k^{sh}$ ) e o seu valor inicial ( $b_{k_i}^{sh}$ ). As condições descritas em (9) podem ser modeladas pelo problema de complementaridade (10):

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \perp \Delta b_k^{sh}. \quad (10)$$

#### IV. REFORMULAÇÃO DAS RESTRIÇÕES DE COMPLEMENTARIDADE

Devido a dificuldade dos métodos de solução para otimização não linear em tratar diretamente as restrições de complementaridade, em [19] os autores propõem reescrever as restrições de complementaridade (3) conforme descrito a seguir. Primeiramente, define-se a função  $F(x)$  por meio de duas variáveis não negativas, conforme (11):

$$F(x) = a - b. \quad (11)$$

Os autores mostram em [19], que a partir da definição de  $F(x)$  em (11), o problema de complementaridade (3) pode ser reescrito por meio das restrições de complementaridade dadas em (12) em função das variáveis não negativas  $a$  e  $b$ :

$$0 \leq x - x^{min} \perp a \geq 0 \quad (12a)$$

$$0 \leq x^{max} - x \perp b \geq 0. \quad (12b)$$

As restrições de complementaridade (12) equivalem às seguintes relações básicas:

$$1) \text{ se } x = x^{min} \Rightarrow a \geq 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow F(x) \geq 0,$$

$$2) \text{ se } x^{min} < x < x^{max} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow F(x) = 0,$$

$$3) \text{ se } x = x^{max} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b \geq 0 \Rightarrow F(x) \leq 0.$$

Conforme descrito em [19], as restrições (11) e (12) podem ser reformuladas conforme (13):

$$F(x) = a - b \quad (13a)$$

$$(x - x^{min})a \leq 0 \quad (13b)$$

$$(x^{max} - x)b \leq 0 \quad (13c)$$

$$x - x^{min} \geq 0 \quad (13d)$$

$$x^{max} - x \geq 0 \quad (13e)$$

$$a \geq 0 \quad (13f)$$

$$b \geq 0. \quad (13g)$$

Isolando-se os termos  $a$  e  $b$  em (13a), substituindo-se estes valores, respectivamente, em (13b) e (13c), obtêm-se as restrições (14) as quais são equivalentes às restrições (13):

$$F(x) = a - b \quad (14a)$$

$$(x - x^{min})F(x) \leq -(x - x^{min})b \quad (14b)$$

$$-(x^{max} - x)F(x) \leq -(x^{max} - x)a \quad (14c)$$

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \quad (14d)$$

$$a \geq 0 \quad (14e)$$

$$b \geq 0. \quad (14f)$$

Como os termos  $(x - x^{min})$ ,  $(x^{max} - x)$ ,  $a$  e  $b$  são não negativos nas restrições (14b) e (14c), então o maior valor possível para o lado direito destas inequações é nulo. Assim sendo, é possível remover a dependência das variáveis  $a$  e  $b$  do problema, chegando-se à reformulação para o problema de complementaridade descrita em (15):

$$x^{min} \leq x \leq x^{max} \quad (15a)$$

$$(x - x^{min})F(x) \leq 0 \quad (15b)$$

$$(x - x^{max})F(x) \leq 0. \quad (15c)$$

Assim, restrições do tipo (3) podem ser finalmente reformuladas por (15).

Aplicando esta técnica para a reformulação das restrições de complementaridade (6) associadas à atuação dos *taps* de transformadores, obtém-se o conjunto de restrições dado em (16):

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad (16a)$$

$$(V_k - V_k^{min})\Delta t_{km} \leq 0 \quad (16b)$$

$$(V_k - V_k^{max})\Delta t_{km} \leq 0. \quad (16c)$$

De fato, as restrições (16) modelam a mesma situação que a restrição (6). Pela restrição (16a) podemos ter  $V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}$ . Se  $V_k = V_k^{min}$ , então  $V_k - V_k^{max} < 0$ , e portanto pela restrição (16c) tem-se  $\Delta t_{km} \geq 0$ . Se  $V_k^{min} < V_k < V_k^{max}$ , então  $V_k - V_k^{min} > 0$  e a restrição (16b) implica que  $\Delta t_{km} \leq 0$ , e  $V_k - V_k^{max} < 0$ , e a restrição (16c) implica que  $\Delta t_{km} \geq 0$ , portanto  $\Delta t_{km} = 0$ . Se  $V_k = V_k^{max}$ , então  $V_k - V_k^{min} > 0$ , e portanto pela restrição (16b) tem-se  $\Delta t_{km} \leq 0$ . Assim, as restrições (16) são equivalentes à restrição (6) (que modela a situação descrita em (5)).

Analogamente, as restrições (8) e (10) podem ser, respectivamente, representadas por (17) e (18):

$$V_m^{min} \leq V_m \leq V_m^{max} \quad (17a)$$

$$(V_m - V_m^{min})(-\Delta t_{km}) \leq 0 \quad (17b)$$

$$(V_m - V_m^{max})(-\Delta t_{km}) \leq 0, \quad (17c)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max} \quad (18a)$$

$$(V_k - V_k^{min})\Delta b_k^{sh} \leq 0 \quad (18b)$$

$$(V_k - V_k^{max})\Delta b_k^{sh} \leq 0. \quad (18c)$$

Assim, a partir da reformulação da restrição de complementaridade proposta por [19] e com base no modelo proposto em [18], propõe-se neste trabalho o modelo para o problema de FPORD com restrições no comportamento dos dispositivos de controle de tensão, o qual é descrito na seção V.

## V. O PROBLEMA FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO DISCRETO COM RESTRIÇÕES DE ATUAÇÃO DOS DISPOSITIVOS DE CONTROLE

### A. Nomenclatura

#### Conjuntos

- $B$ : Barras do sistema;
- $B_L$ : Barras de carga;
- $B_{CR}$ : Barras de controle reativo;
- $B_{SH}$ : Barras com banco de capacitores ou reatores *shunt* associadas;
- $L$ : Linhas de transmissão;
- $T$ : Transformadores com *tap* variável;
- $L_k$ : Barras conectadas à barra  $k$ ;
- $D_{km}^T$ : Valores discretos que a variável discreta *tap* do transformador associado ao ramo  $km$  pode assumir;
- $D_k^{SH}$ : Valores discretos que a variável discreta susceptância *shunt* da barra  $k$  pode assumir;
- $M$ : Transformadores com *tap* variável, nos quais os nós finais são barras controláveis;
- $K$ : Transformadores com *tap* variável, nos quais os nós iniciais são barras controláveis;

### Variáveis

- $V_k$ : Magnitude de tensão da barra  $k$ ;
- $\theta_k$ : Ângulo de tensão da barra  $k$ ;
- $b_k^{sh}$ : Susceptância *shunt* da barra  $k$  associada a bancos de capacitores/reatores;
- $t_{km}$ : *Tap* variável do transformador em-fase associado ao ramo  $km$ ;

### Parâmetros

- $g_{km}$ : Condutância série do ramo  $km$ ;
- $P_k^G$  e  $P_k^C$ : potências ativas geradas e consumidas na barra  $k$ , respectivamente;
- $Q_k^G$  e  $Q_k^C$ : potências reativas geradas e consumidas na barra  $k$ , respectivamente;
- $Q_k^{min}$  e  $Q_k^{max}$ : Limites mínimos e máximos de geração de potência reativa da barra  $k$ , respectivamente;
- $V_k^{min}$  e  $V_k^{max}$ : Limites mínimos e máximos da magnitude de tensão da barra  $k$ , respectivamente;

### Funções

- $P_{km}(V, \theta, t)$  e  $Q_{km}(V, \theta, t)$ : Representam os fluxos de potência ativa e reativa no ramo  $km$ , respectivamente.

### B. Modelo Proposto

Tomando-se como base o modelo descrito em [18], este trabalho propõe uma reformulação das restrições de complementaridade segundo [19], conforme discutido na seção anterior, resultando em um novo modelo para o problema de FPORD com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão, o qual é descrito de (19) a (31).

$$\min \sum_{(k,m) \in LUT} g_{km} (t_{km}^2 V_k^2 + V_m^2 - 2t_{km} V_k V_m \cos(\theta_k - \theta_m)) \quad (19)$$

sujeito a:

$$P_k^G - P_k^C - \sum_{m \in L_k} P_{km}(V, \theta, t) = 0, \forall k \in B_L \cup B_{CR} \quad (20)$$

$$Q_k^G - Q_k^C + b_k^{sh} V_k^2 - \sum_{m \in L_k} Q_{km}(V, \theta, t) = 0, \quad \forall k \in B_L \quad (21)$$

$$Q_k^{min} \leq Q_k^C - b_k^{sh} V_k^2 + \sum_{m \in L_k} Q_{km}(V, \theta, t) \leq Q_k^{max}, \quad \forall k \in B_{CR} \quad (22)$$

$$b_k^{sh} \in D_k^{sh}, \forall k \in B_{sh} \quad (23)$$

$$t_{km} \in D_{t_{km}}, \forall (k, m) \in T \quad (24)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, \forall k \in B \quad (25)$$

$$(V_k - V_k^{min})\Delta t_{km} \leq 0, \forall (k, m) \in K \quad (26)$$

$$(V_k - V_k^{max})\Delta t_{km} \leq 0, \forall (k, m) \in K \quad (27)$$

$$(V_m - V_m^{min})(-\Delta t_{km}) \leq 0, \forall (k, m) \in M \quad (28)$$

$$(V_m - V_m^{max})(-\Delta t_{km}) \leq 0, \forall (k, m) \in M \quad (29)$$

$$(V_k - V_k^{min})\Delta b_k^{sh} \leq 0, \forall k \in B_{sh} \quad (30)$$

$$(V_k - V_k^{max})\Delta b_k^{sh} \leq 0, \forall k \in B_{sh}, \quad (31)$$

O modelo matemático proposto para o FPORD com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão descrito de (19) a (31) visa minimizar as perdas ativas nos ramos do sistema, sujeito às restrições de operação e às regras heurísticas de operação propostas. A função em (19) representa as perdas de potência ativa na transmissão. As restrições (20) e (21) representam as equações de balanço de potência ativa e reativa, respectivamente. As restrições (22) estabelecem os limites mínimos e máximos para a geração de potência reativa de geradores e compensadores síncronos. As restrições (23) e (24) estabelecem os valores discretos para as susceptâncias de bancos de capacitores/reatores e *taps* de transformadores, respectivamente. As restrições (25) estabelecem os limites mínimos e máximos para as magnitudes de tensão. As restrições que modelam o comportamento dos dispositivos de controle de tensão transformadores em fase e bancos de capacitores/reatores *shunt* são dadas de (26) a (31). Sem essas restrições, o modelo se torna um problema de FPORD clássico.

As restrições (26) a (31), juntamente com as restrições (25), garantem que os dispositivos de controle de tensão transformadores em fase e bancos de capacitores/reatores *shunt* apenas atuarão quando um dos limites de tensão da barra controlada por ele for atingido, garantindo dessa forma uma redução no número de ações desses controles. Desse modo, o modelo matemático proposto objetiva determinar um ponto de operação para o sistema elétrico, que minimize as perdas de potência ativa nos ramos do sistema, satisfaça as restrições físicas e operacionais do sistema, e com um menor número de ações de controle do que em um FPORD clássico devido às regras heurísticas de operação modeladas pelas restrições (26) a (31).

Neste trabalho, o modelo proposto é resolvido pelo método *branch-and-bound* disponível no *solver* gratuito BONMIN [20] [21], o qual se mostrou eficiente na resolução deste problema. Os testes numéricos realizados são apresentados na próxima seção.

## VI. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para analisar o comportamento do modelo proposto para problema de FPORD com restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão foram realizados testes computacionais com os sistemas elétricos IEEE de 14, 30 e 118 barras [23]. Para fins de comparação, também foram resolvidos os respectivos problema de FPORD clássicos associados a tais sistemas, nos quais as restrições de atuação dos dispositivos de controle de tensão são desprezadas.

Em todos os testes realizados os dados dos sistemas elétricos e as condições iniciais destes foram tomadas como em [23]. Nota-se nestas condições iniciais violações dos limites da rede, assim não partiu-se de uma situação com uma rede ideal.

Todas as implementações computacionais foram desenvolvidas na plataforma GAMS (*General Algebraic Modeling System*). O GAMS é um sistema de modelagem de alto nível para programação e otimização matemática, que consiste de um compilador integrado com *solvers* de alta performance (<https://www.gams.com>). Entre os *solvers* disponíveis para integração com a plataforma GAMS tem-se o *solver* gratuito BONMIN [20][21], o qual foi utilizado neste trabalho de pesquisa.

Todos os testes foram realizados em um computador Acer que possui processador Intel Core i5-3230M de 2.60GHz e 6GB de RAM.

### A. Sistema Elétrico IEEE 14 Barras

Considera-se que a susceptância *shunt* do único banco de capacitores do sistema (localizado na barra 9) pode assumir somente os seguintes valores discretos:

$$b_9^{sh} \in \{0; 0.05; 0.15; 0.19; 0.20; 0.24; 0.34; 0.39\}.$$

Os valores discretos adotados para os *taps* variáveis de todos os transformadores variaram de 0.95 a 1.05 p.u., com o passo de 0.01 p.u. Os valores iniciais e os valores obtidos na solução para os *taps* dos transformadores e para a susceptância *shunt* do banco de capacitores são apresentados na Tabela I. Os limites inferiores e superiores considerados para as magnitudes de tensão foram, 0.95 e 1.05 p.u. respectivamente.

Na Fig.2 são apresentadas as soluções obtidas para as magnitudes de tensão em todas as barras do sistema elétrico para o FPORD, para os casos com restrições de atuação dos dispositivos de controle (FPORD proposto) e sem estas restrições (FPORD clássico).

O modelo proposto para o problema de FPORD com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão foi resolvido com o tempo de 1.214 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 13.780982 MW. Para o FPORD clássico (sem restrições de atuação) o valor obtido para função objetivo foi de 13.60438 MW com o tempo computacional de 1.313 segundos.

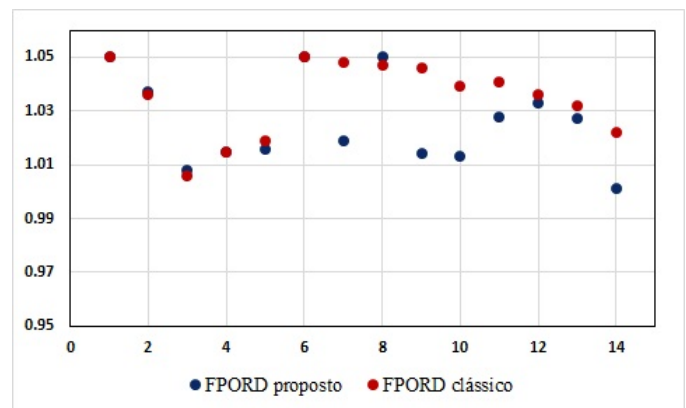


Fig. 2. Valores obtidos para as magnitudes de tensão nas barras do sistema elétrico IEEE 14 barras pelo modelo proposto (em azul) e pelo FPORD clássico (em vermelho).

TABELA I  
DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE TENSÃO NAS SOLUÇÕES OBTIDAS.

	Valor Inicial	FPORD proposto	FPORD clássico
$b_9^{sh}$	0.19	0.19	0.39
$t_{4-7}$	0.98	0.98	1.04
$t_{4-9}$	0.97	0.97	0.95
$t_{5-6}$	0.93	1.05	1.02

Na Tabela II são apresentadas as soluções obtidas para magnitude de tensão nas barras que contém um dispositivo de controle de tensão variável para o FPORD com e sem restrições de atuação dos dispositivos de controle.

TABELA II  
MAGNITUDE DE TENSÃO NAS BARRAS COM DISPOSITIVOS DE CONTROLE VARIÁVEL NA SOLUÇÃO OBTIDA.

	FPORD proposto	FPORD clássico
$V_6$	1.05	1.05
$V_7$	1.019	1.048
$V_9$	1.014	1.046

Pode-se observar o comportamento das restrições (26) a (31) limitando o número de ajustes necessários na variável de controle de acordo com a tensão na barra por ele controlada. Nota-se portanto que com um pequeno aumento no valor da função objetivo, foi possível reduzir o número de controles utilizados pelo operador do sistema.

### B. Sistema Elétrico IEEE 30 barras

Para esses testes, considerou-se que as susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores/reatores podem assumir somente os seguintes valores discretos:

$$b_{10}^{sh} \in \{0; 0.05; 0.15; 0.19; 0.20; 0.24; 0.34; 0.39\};$$

$$b_{24}^{sh} \in \{0; 0.04; 0.05; 0.09\}.$$

Os valores discretos adotados para os *taps* variáveis de todos os transformadores variaram de 0.95 a 1.05 p.u., com o passo de 0.01 p.u. Os valores iniciais e os valores obtidos para os *taps* dos transformadores e para as susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores/reatores são apresentados na Tabela III. Os limites inferiores e superiores considerados para as magnitudes de tensão foram, 0.95 e 1.1 p.u., respectivamente.

Na Fig.3 são apresentadas as soluções obtidas para as magnitudes de tensão em todas as barras deste sistema elétrico quando são resolvidos os modelos de FPORD para os casos com e sem restrições de atuação dos dispositivos de controle.

O modelo proposto para o problema de FPORD com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão foi resolvido com o tempo de 1.641 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 16.31061 MW. Para o FPORD clássico o valor obtido para função objetivo foi de 16.0670 MW com o tempo computacional de 1.515 segundos.

Na Tabela IV são apresentadas as soluções obtidas para as magnitudes de tensão nas barras que contém um dispositivo

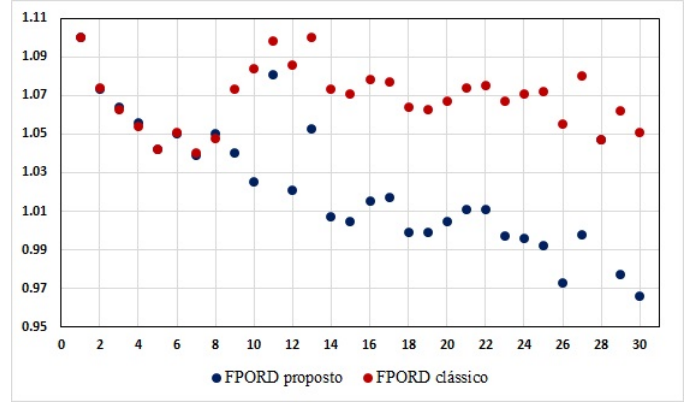


Fig. 3. Valores obtidos para as magnitudes de tensão nas barras do sistema elétrico IEEE 30 barras pelo modelo proposto (em azul) e pelo FPORD clássico (em vermelho).

TABELA III  
DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE TENSÃO NAS SOLUÇÕES OBTIDAS.

	Valor Inicial	FPORD proposto	FPORD clássico
$b_{10}^{sh}$	0.19	0.19	0.34
$b_{24}^{sh}$	0.04	0.04	0.09
$t_{6-9}$	0.98	0.98	0.98
$t_{6-10}$	0.97	0.97	1.01
$t_{4-12}$	0.95	0.95	1.04
$t_{28-27}$	0.97	0.97	1.05

de controle de tensão variável para o FPORD com e sem restrições de atuação dos dispositivos de controle.

TABELA IV  
MAGNITUDE DE TENSÃO NAS BARRAS COM DISPOSITIVOS DE CONTROLE VARIÁVEL NA SOLUÇÃO OBTIDA.

	FPORD proposto	FPORD clássico
$V_9$	1.04	1.073
$V_{10}$	1.025	1.084
$V_{12}$	1.021	1.086
$V_{24}$	0.996	1.071
$V_{27}$	0.998	1.08

Observa-se o comportamento das restrições (26) a (31) limitando o número de ajustes necessários na variável de controle de acordo com a tensão na barra por ele controlada. Novamente, nota-se que com um pequeno aumento na função objetivo, foi possível reduzir consideravelmente o número de controles utilizados pelo operador. Na solução obtida não houve alteração nos controles discretos associados aos transformadores em fase e aos bancos de capacitores e reatores *shunt*, neste caso, outras variáveis atuam para otimizar a função objetivo.

### C. Sistema Elétrico IEEE 118 Barras

Para esse sistema considerou-se que as susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores/reatores podem assumir somente os seguintes valores discretos:

$$\begin{aligned}
b_5^{sh} &\in \{-0.40; -0.20; 0\}; \\
b_{34}^{sh} &\in \{0; 0.06; 0.07; 0.13; 0.14; 0.20\}; \\
b_{37}^{sh} &\in \{-0.25; -0.20; 0\}; \\
b_{44}^{sh}, b_{45}^{sh}, b_{46}^{sh} &\in \{0; 0.10\}; \\
b_{48}^{sh} &\in \{0; 0.15\}; \\
b_{74}^{sh} &\in \{0.08; 0.12; 0.20\}; \\
b_{79}^{sh}, b_{82}^{sh}, b_{83}^{sh}, b_{105}^{sh} &\in \{0.10; 0.20\}; \\
b_{107}^{sh}, b_{110}^{sh} &\in \{0; 0.06; 0.07; 0.13; 0.14; 0.20\}.
\end{aligned}$$

Os valores discretos adotados para os *taps* variáveis de todos os transformadores variaram de 0.95 a 1.05 p.u., com o passo de 0.01 p.u. Os valores iniciais e os valores obtidos para os *taps* dos transformadores e para as susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores/reatores são apresentados na Tabela V. Os limites inferiores e superiores considerados para as magnitudes de tensão foram de 0.95 e 1.1 p.u., respectivamente.

O modelo proposto para o problema de FPORD com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão foi resolvido com o tempo de 130.68 segundos e o valor obtido para a função objetivo foi de 107.109 MW. Para o FPORD clássico o valor obtido para função objetivo foi de 104.47319 MW com o tempo computacional de 21.185 segundos.

TABELA V  
DISPOSITIVOS DE CONTROLE DE TENSÃO NAS SOLUÇÕES OBTIDAS.

	Valor Inicial	FPORD proposto	FPORD clássico
$b_5^{sh}$	-0.2	-0.2	0
$b_{34}^{sh}$	0.14	0.14	0
$b_{37}^{sh}$	-0.20	-0.20	0
$b_{44}^{sh}$	0.10	0.10	0.10
$b_{45}^{sh}$	0.10	0.10	0.10
$b_{46}^{sh}$	0.10	0.10	0
$b_{48}^{sh}$	0.15	0.15	0
$b_{74}^{sh}$	0.12	0.12	0.20
$b_{79}^{sh}$	0.20	0.20	0.20
$b_{82}^{sh}$	0.20	0.20	0.20
$b_{83}^{sh}$	0.10	0.10	0.20
$b_{105}^{sh}$	0.20	0.20	0.20
$b_{107}^{sh}$	0.06	0.06	0.13
$b_{110}^{sh}$	0.06	0.06	0.13
$t_{8-5}$	0.98	0.98	1.02
$t_{26-25}$	0.96	0.97	0.95
$t_{30-17}$	0.96	0.96	0.95
$t_{38-37}$	0.95	0.95	0.95
$t_{63-59}$	0.96	0.96	0.95
$t_{64-61}$	0.98	1.04	0.95
$t_{65-66}$	0.95	1.01	0.95
$t_{68-69}$	0.95	1.03	0.95
$t_{81-80}$	0.95	1.02	0.95

Na Tabela VI são apresentadas as soluções obtidas da magnitude de tensão nas barras que contém um dispositivo de controle de tensão variável para o FPORD com e sem restrições de atuação.

Novamente pode-se observar o comportamento das restrições (26) a (31) limitando o número de ajustes necessários na variável de controle de acordo com a tensão na barra por ele

TABELA VI  
MAGNITUDE DE TENSÃO NAS BARRAS COM DISPOSITIVOS DE CONTROLE VARIÁVEL NA SOLUÇÃO OBTIDA.

	FPORD proposto	FPORD clássico
$V_5$	1.059	1.1
$V_{17}$	1.051	1.1
$V_{25}$	1.1	1.1
$V_{34}$	1.028	1.096
$V_{37}$	1.031	1.1
$V_{44}$	1.05	1.08
$V_{45}$	1.054	1.075
$V_{46}$	1.073	1.087
$V_{48}$	1.087	1.091
$V_{59}$	1.083	1.1
$V_{61}$	1.1	1.1
$V_{66}$	1.1	1.1
$V_{69}$	1.1	1.1
$V_{74}$	1.058	1.064
$V_{79}$	1.084	1.085
$V_{80}$	1.1	1.1
$V_{82}$	1.079	1.083
$V_{83}$	1.081	1.088
$V_{105}$	1.079	1.079
$V_{107}$	1.067	1.067
$V_{110}$	1.075	1.075

controlada. Nota-se novamente que com um pequeno aumento no valor da função objetivo, foi possível reduzir o número de controles utilizados pelo operador do sistema.

A fim de observar a influência do número de dispositivos controláveis (*tap* e banco de capacitores/reatores *shunt*) no tempo computacional de resolução para o modelo de FPORD proposto, realizou-se testes com sistema elétrico IEEE 118 Barras adicionando gradativamente cada dispositivo controlável, com isso observou-se que a cada incremento desses dispositivos o tempo computacional de resolução aumenta, pois como estes dispositivos estão associados a variáveis discretas aumenta-se o número de variáveis discretas no problema. Este aumento do tempo computacional de resolução também ocorre em FPOR clássicos que consideram a natureza discreta das variáveis, e é esperado devido a complexidade de resolução de problemas de otimização não linear com variáveis discretas.

Cabe destacarmos que o modelo matemático para o problema de FPORD clássico consiste do modelo matemático para o FPORD com restrições de atuação dos dispositivos de controle sem as restrições (26) a (31), assim o modelo para o FPORD clássico é uma relaxação do modelo para o FPORD com restrições de atuação dos dispositivos de controle, ou seja, a região factível do modelo de FPORD com restrições de atuação dos dispositivos de controle está contida na região factível do problema de FPORD clássico, assim é esperado que a solução do FPORD clássico tenha valor para a função objetivo melhor. O aumento na função objetivo para os sistemas 14, 30 e 118 Barras foi de 1,3%, 1,5% e 2,5%, respectivamente. Do ponto de vista prático este aumento no valor da função objetivo não é significativo quando considerada a viabilidade de aplicação da solução

obtida (solução com menor número de ações de controle), pois obteve-se uma redução de 75% no número de atuação dos dispositivos de controle de tensão *taps* dos transformados e bancos de capacitores e reatores *shunt* para o sistema IEEE 14 Barras, 100% para o sistema IEEE 30 Barras e 64, 28% para o sistema IEEE 118 Barras. Esta é uma redução expressiva, e foi obtida sem que houvesse um aumento considerável das perdas. Assim, o modelo proposto fornece uma solução mais realista para a implementação dos controles na operação dos sistemas de potência, com um aumento não significativo no valor da função objetivo.

## VII. CONCLUSÕES

Este trabalho propõe um modelo para o problema de FPORD com restrição de atuação dos dispositivos de controle de tensão baseado no modelo proposto por [18]. Restrições de complementaridade que modelam o comportamento de tais dispositivos foram reformuladas utilizando desigualdades equivalentes de acordo com [19], obtendo-se assim um modelo viável de ser resolvido pelo *solver* gratuito BONMIN, realista, pois considera a natureza discreta das variáveis, e possível de ser implantado na prática, pois reduz o número de ações de controle. Nos testes com os sistemas elétricos do IEEE observa-se tanto a eficácia do uso das restrições propostas, bem como o bom comportamento e a confiabilidade da reformulação proposta. Foi possível verificar que o modelo proposto é capaz de reduzir de forma consistente o número de ações de controle que devem ser implementados pelo operador do sistema, sem aumentar a função objetivo de perdas de modo significativo. O modelo proposto fornece portanto uma estratégia mais realista para a implementação dos controles nos sistemas de potência.

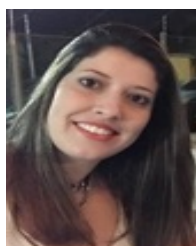
## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, e ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processos n°: 428740/2016-2, 313495/2017-3 e 309780/2017-9).

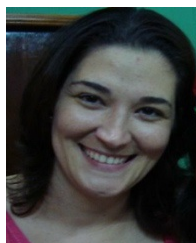
## REFERÊNCIAS

- [1] A. J. Monticelli, *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*, E. Blucher, 1983.
- [2] J. A. Delgado *et al.*, "A Modified Barrier and Barrier Method and the Optimal Power Flow Problem," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 1, no. 9, pp. 1629-1638, 2017.
- [3] J. Carpentier, "Contribution a l'etude du dispatching economique," *Bull Soc Francaise Electr.*, vol. 8, pp. 431-447, 1962.
- [4] H. W. Dommel and W. F. Tinney, "Optimal power flow solutions," *Trans. Power Appar. Syst.*, no. 10, pp. 1866-1876, 1968.
- [5] D. I. Sun *et al.*, "Optimal power flow by Newton approach," *Trans. Power Appar. Syst.*, no. 10, pp. 2864-2880, 1984.
- [6] R. C. Burchett, H. H. Happ and D. R. Vierath, "Quadratically convergent optimal power flow," *Trans. Power Appar. Syst.*, no. 11, pp. 3267-3275, 1984.
- [7] G. L. Torres and V. H. Quintana, "On a nonlinear multiple-centrality-corrections interior-point method for optimal power flow," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 16, no. 2, pp. 222-228, 2001.
- [8] W. -H. Liu, A. D. Papalexopoulos and W. F. Tinney, "Discrete shunt controls in a Newton optimal power flow," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 7, no. 4, pp. 1509-1518, 1992.

- [9] A. G. Bakirtzis, P. N. Biskas, C. E. Zoumas, and V. Petridis, "Optimal power flow by enhanced genetic algorithm," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 17, no. 2, pp. 229-236, 2002.
- [10] M. M. Adibi, R. A. Polyak, I. A. Griva, and L. Mili, "Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented Lagrangian method," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 18, no. 1, pp. 251-257, 2003.
- [11] L. Liu, X. Wang, X. Ding, and H. Chen, "A robust approach to optimal power flow with discrete variables," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 24, no. 3, pp. 1182-1190, 2009.
- [12] C. R. N. Estevam *et al.*, "Reactive power dispatch and planning using a non-linear branch-and-bound algorithm," *IET Gen., Transm., Distrib.*, vol. 4, no. 8, pp. 963-973, 2010.
- [13] D. T. Phan, "Lagrangian duality and branch-and-bound algorithms for optimal power flow," *Operations Research*, vol. 60, no. 2, pp. 275-285, 2012.
- [14] M. C. A. Silva and E. A. Belati, "Allocation of static VAR compensators using optimal reactive power flow and branch & bound algorithm," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 14, no. 5, pp. 2194-2200, 2016.
- [15] F. Capitanescu, W. Rosehart and L. Wehenkel, "Optimal power flow computations with constraints limiting the number of control actions," in *2009 IEEE Bucharest PowerTech*, IEEE, 2009, pp. 1-8.
- [16] F. Capitanescu *et al.*, "State-of-the-art, challenges, and future trends in security constrained optimal power flow," *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 81, no. 8, pp. 1731-1741, 2011.
- [17] E. M. Soler, E. N. Asada and G. R. M. Costa, "Penalty-based nonlinear solver for optimal reactive power dispatch with discrete controls," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 28, no. 3, pp. 2174-2182, 2013.
- [18] G. G. Lage, "O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão," Ph.D. dissertation, Dep. de Eng. Elétrica e Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 2013.
- [19] W. Rosehart, C. Roman and A. Schellenberg, "Optimal power flow with complementarity constraints," *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 813-822, 2005.
- [20] P. Bonami *et al.*, "An algorithmic framework for convex mixed integer nonlinear programs," *Discrete Optimiz.*, vol. 5, pp. 186-204, 2008.
- [21] P. Bonami and J. Lee, "BONMIN User's Manual", *Numer Math*, vol. 4, pp. 1-32, 2007.
- [22] A. Gomez-Exposito, A. J. Conejo and C. Canizares, *Electric energy systems: analysis and operation*, CRC press, 2018.
- [23] R. Christie, *Power System Test Case Archive*. Washington University, 2013, Disponível em: <<http://labs.ece.uw.edu/psca/>>. Acesso em: 01 Jun. 2018.



**Marina Valença Alencar** possui graduação em Engenharia Eletrônica pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Campo Mourão, PR (2016), mestrado em Engenharia Elétrica na Universidade Estadual Paulista - Unesp, Bauru (2019). Atualmente é doutoranda em Engenharia Elétrica na Unesp, Bauru, SP.



**Edilaine Martins Soler** possui graduação em Bacharelado em Matemática, e em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (2005, 2007), mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional pela Universidade de São Paulo (2008) e doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo (2011). Atualmente, é Professora Assistente Doutora na Universidade Estadual Paulista - Unesp. Tem experiência na área de otimização, atuando principalmente nos seguintes temas: problema de Fluxo de Potência Ótimo (FPO), programação não linear e variáveis discretas.





**Leonardo Nepomuceno** recebeu o título de Engenheiro Eletricista pela Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Uberlândia-MG, em 1990, e os títulos de mestre e doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas-SP, em 1993 e 1997, respectivamente. De 1997 a 2000 ele trabalhou em um projeto de pós-doutorado na Unicamp. A partir de 2000, ele é professor do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - Unesp, Bauru, SP. Em 2014 ele obteve o título de livre-docente

em Sistemas Elétricos de Potência pela UNESP. Suas áreas de especialidade envolvem sistemas elétricos de potência, mercados de eletricidade, bem como teoria de otimização e suas aplicações.



**Antonio Roberto Balbo** é graduado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista - Unesp, em 1986, tendo obtido seu título de mestre em Ciência da Computação em 1991 e seu título de doutor em Engenharia de Estruturas em 1998, ambos pela Universidade de São Paulo - USP. Atualmente é Professor Associado do Departamento de Matemática da UNESP, em Bauru, onde desenvolve pesquisas nas áreas de métodos primal-dual previsor-corretor de pontos interiores/exteriores aplicados em sistemas de energia.



**Edméa Cássia Baptista** é graduada em Matemática pela Universidade Estadual Paulista-UNESP-SP, em 1988, tendo obtido os títulos de mestre em Ciência da Computação e doutora em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo-USP, em 1993 e 2001, respectivamente. Atualmente é Professora Voluntária do Departamento de Matemática da Unesp, em Bauru, onde desenvolve pesquisas nas áreas de otimização, programação não linear, fluxo de potência ótimo e planicidade.