

Monitoring of Multivariate Processes Through the Regression Adjustment Procedure Based on Artificial Neural Networks

E. Ruelas, J. Vázquez, J. Cruz, R. Baeza, J. Sánchez, and J. Jiménez

Abstract—In current production systems, organizations must control the total of the variables that have a correlated influence on the final quality of the products. For this task, multivariate statistical control is used. One of the most used multivariate control methods is the so-called regression adjustment whose scheme proposes that to monitor a final quality characteristic in a product, a multiple regression should be applied on the previous variables that define it in the process and the resulting residue will be controlled from a univariate control chart to detect changes in the variations, however, the utility of the procedure is directly related to the efficiency of the method used to perform the adjustment task between the dependent and independent variables. The present work proposed to use an artificial neural network to carry out the adjustment operation, the results showed a remarkable superiority of the proposed scheme in comparison with the current scheme (Least Squares) and adjustment methods proposed in the literature (LAD and M). The proposed multivariate control approach allows the evolution of the regression adjustment method with the incorporation of artificial intelligence.

Index Terms—Artificial neural network, Multivariate statistical control, Regression.

I. INTRODUCCIÓN

Actualmente las organizaciones han orientado sus estrategias hacia el mejoramiento de la calidad y la reducción de costos de fabricación; esta tendencia ha llevado al uso de sistemas de control de calidad que proporcionen flexibilidad y disminución de costos por defectos. Entre los sistemas de control de calidad más utilizados se encuentra el control estadístico de procesos (CEP), el cual permite monitorear estrechamente la calidad de los productos con el fin de lograr la satisfacción total del cliente [1]. En los sistemas de producción vigentes, suelen existir características que influyen de forma conjunta e interrelacionada en la calidad final de los productos.

E. A. Ruelas, Instituto Tecnológico Superior de Irapuato, Ingeniería Industrial, Irapuato, Guanajuato, México, edruelas@itesi.edu.mx.

J. A. Vázquez, Instituto Tecnológico de Celaya, Celaya, Guanajuato, México, antonio.vazquez@itcelaya.edu.mx.

J. Cruz, Universidad Politécnica del Bicentenario, Silao, Guanajuato, México, jcruzs@upbicentenario.edu.mx.

R. Baeza, Universidad de Guanajuato, Yuriria, Guanajuato, México, r.baeza@ugtomx.onmicrosoft.com.

J.A. Sánchez, Universidad de Guanajuato campus Salamanca, Salamanca Guanajuato, México, ja.sanchez@ugto.mx.

J. A. Jiménez, Instituto Tecnológico de Celaya, Celaya, Guanajuato, México, alfredo.jimenez@itcelaya.edu.mx.

Una solución consiste en controlar todas de forma simultánea mediante técnicas de control multivariantes, de esta forma no sólo será analizado el efecto de cada una de las características sobre la calidad, sino que también se toma en cuenta el efecto de las interacciones entre ellas [2]. Una condición inconveniente que se presenta en sistemas de producción en los que se analiza más de una característica de calidad dentro de sus productos, es la presencia de datos auto-correlacionados [3]. Es importante resaltar que la independencia de las observaciones es uno de los supuestos básicos de las herramientas tradicionales para el monitoreo estadístico de procesos, omitirlo hace que se incremente el número de falsas alarmas y costos de calidad [4].

Un método utilizado cotidianamente para el control de múltiples características de calidad que prevé de forma eficiente la auto-correlación de los datos, es el denominado: ajuste de regresión propuesto por [5] y empleado en [6], [7] y [8]. El procedimiento se lleva a cabo en múltiples aplicaciones industriales en las cuales una característica de calidad (variable dependiente Y) es definida por diversas variables independientes (X's), en ocasiones a esta situación se le conoce como proceso en cascada. El objetivo del método ajuste de regresión es monitorear una característica de calidad final de un producto tomando en cuenta la correlación de las variables involucradas en el proceso, el esquema consiste en esencia en aplicar una regresión lineal múltiple sobre las variables que definen la característica de calidad monitoreada en el proceso, y el residuo resultante se controla a partir de un gráfico de control univariante para detectar cambios en las variables. El procedimiento es capaz de detectar cambios pequeños en cada una de las variables o conjunto de ellas, que puedan afectar a la calidad en el sistema de fabricación.

Modelo de regresión múltiple.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon \quad (1)$$

Donde:

Y es la variable dependiente.

X_1, X_2, \dots, X_n son variables independientes.

$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ estimadores, transmiten directamente los efectos de las variables X_n sobre la variable Y.

Residuo

$$e_i = |y_i - \hat{y}_i| \quad (2)$$

Y_i : Observación real; \hat{Y}_i : Observación estimada.

Cartas de Control individual de Medias y Rangos ($\bar{X}\bar{R}$).
Tendencia central (3) y Dispersión (4)

$$\text{Limite de Control} = \bar{X} \pm 3 \frac{\bar{R}}{d_2} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{LSC} &= D_4 \bar{R} \\ \text{LIC} &= D_3 \bar{R} \end{aligned} \tag{4}$$

Sin embargo, el rendimiento del método ajuste de regresión depende de la precisión del modelo de regresión utilizado para describir la correlación existente entre las variables bajo estudio [9]. Debido a que el procedimiento ajuste de regresión se ha llevado a cabo desde la óptica del modelo estadístico de regresión múltiple, se deben de satisfacer diversas condiciones como la normalidad e independencia de los datos [10]. Por otro lado, es sustancial destacar que generalmente las relaciones entre las variables multivariantes no son lineales, por lo que es importante utilizar un mecanismo capaz de modelar el comportamiento carente de linealidad entre las variables involucradas en la calidad de un producto, de otra forma la eficiencia del procedimiento se verá disminuido [11]. Con el fin de resolver áreas de oportunidad en el método ajuste de regresión actual, en el presente trabajo de investigación se desarrolla un procedimiento de ajuste de regresión basado en una red neuronal artificial (RNA) que permite llevar a cabo un control de calidad eficiente en sistemas de producción multivariantes. De acuerdo con [12] y [13], las redes neurales artificiales han sido conceptualizadas como técnicas estadísticas no paramétricas al estar libres del cumplimiento de los supuestos teóricos de la estadística paramétrica bajo la que fundamenta el método de ajuste de regresión tradicional. En la tarea de modelar comportamientos entre diversas variables, se ha demostrado que las RNA's son un mecanismo eficiente para modelar comportamientos no lineales en variables correlacionadas [14] y [15]. El procedimiento de ajuste de regresión propuesto presenta un error cuadrático medio menor que los desarrollados hasta el momento bajo enfoques estadísticos en la fase de estimación, además permite anular la auto-correlación significativa de los datos, lo que favorece a reducir el índice falsas alarmas y costos de calidad derivados de la inspección.

Se han realizado investigaciones donde comprobaron los beneficios de la inteligencia artificial para llevar a cabo tareas de estimación o predicción. En [16], se comparó el rendimiento de una red neural artificial y la regresión lineal múltiple en tareas de predicción y ajuste del modelo. Los resultados indicaron que el modelo de RNA, como modelo no lineal, tiene una mayor precisión. En tareas de ajuste de modelo, no solo se han desarrollado modelos bioinspirados, también se han planteado el uso de métodos estadísticos más robustos y eficientes a la hora de analizar datos con mayor variabilidad y presencia de datos atípicos como es el caso del método de regresión robusta o M de Huber y la regresión de Mínimas Desviaciones Absolutas (LAD), [11] y [17] respectivamente.

De acuerdo a la revisión bibliográfica, es necesario establecer una comparación de los métodos de regresión sugeridos aunque ninguno de ellos ha sido empleado hasta el momento bajo el enfoque de control multivariante. La importancia del método seleccionado para tareas de estimación radica en que la eficiencia del procedimiento de control estadístico multivariante ajuste de regresión está ligada de forma significativa a la precisión del método empleado para estimar la variable dependiente (característica de calidad) a partir de las variables independientes, donde estas últimas definen la calidad del producto.

Después de una breve introducción al tema en la sección I, el artículo se organiza de la siguiente forma: la sección II, contiene la descripción de los métodos empleados además de información generada para entrenamiento y prueba para la RNA. Los resultados de las experimentaciones y validación son mostrados en la sección III. Por último, las conclusiones sobre la metodología propuesta conforman la sección IV.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

Para desarrollar el procedimiento propuesto y comparar los resultados con los métodos reportados en la literatura, se retoman los datos establecidos por [5], ver Tabla I. Se muestran 40 observaciones de un proceso en cascada en el que existen nueve variables de entrada y una variable de salida, la presencia de este tipo de circunstancias son cotidianas en procesos químicos y de manufactura, donde alguna característica de calidad de un producto está sujeta a diferentes variables correlacionadas.

TABLA I
CASO DE ESTUDIO

n	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	Y	\hat{Y}	e
1	14.6	0.1	82.4	53.3	1.7	7.1	2.4	6.2	1.1	951.5	950.6	0.9
2	14.2	0.2	80.7	45.2	1.8	6.9	1.9	5.9	1.1	952.2	952.5	0.3
3	16.3	0.1	90.8	43.7	1.7	7.3	1.9	6.1	1.1	952.3	952.5	0.2
4	14.7	0.1	91.5	49.5	1.6	7.1	2.0	6.3	1.1	951.8	952.2	0.4
5	11.0	0.1	92.8	54.3	1.7	7.2	1.7	6.0	1.1	952.3	952.8	0.5
6	15.9	0.1	92.2	42.0	1.5	7.0	2.2	6.1	1.1	952.2	952.4	0.2
7	15.5	0.1	85.4	49.2	1.5	7.2	2.1	5.9	1.1	950.2	950.7	0.5
8	15.5	0.1	78.6	55.7	2.1	7.3	1.5	6.2	1.1	950.5	950.6	0.1
9	14.5	0.1	91.2	39.6	1.6	7.4	1.4	6.0	1.1	950.6	950.4	0.2
10	16.9	0.1	83.4	45.4	1.9	7.3	1.4	6.1	1.1	949.8	950.1	0.3
11	13.8	0.0	85.2	43.9	1.7	7.1	1.7	6.2	1.1	951.2	952	0.8
12	17.0	0.1	92.3	56.4	1.3	7.0	1.8	6.1	1.1	950.6	950.1	0.5
13	15.8	0.1	87.0	59.5	1.9	7.2	1.8	6.2	1.1	948.9	950.6	1.7
14	15.5	0.1	103.5	48.8	1.6	7.3	2.0	6.5	1.1	951.7	951	0.7
15	16.9	0.1	94.0	57.4	1.3	7.2	1.7	5.9	1.1	951.5	950.7	0.8
16	12.3	0.1	92.9	48.6	1.7	7.4	1.7	6.4	1.1	951.3	951.3	0
17	18.0	0.1	87.9	48.3	1.4	7.2	1.7	5.8	1.1	952.9	952.6	0.3
18	14.6	0.1	93.2	47.9	1.7	7.3	1.6	6.1	1.1	953.9	955.7	1.8
19	13.4	0.1	89.7	57.9	1.7	7.3	1.4	6.2	1.1	953.3	953.5	0.2
20	14.5	0.0	90.7	59.9	1.7	7.4	1.7	6.3	1.1	952.6	953.2	0.6
21	17.1	0.2	95.8	59.7	1.5	7.0	1.7	6.1	1.1	952.3	953	0.7
22	19.1	0.1	82.7	48.0	1.2	7.4	1.7	6.1	1.1	952.6	952.6	0
23	14.5	0.1	84.6	54.0	1.7	7.4	1.7	6.3	1.1	952.9	952.6	0.3
24	16.4	0.1	87.0	57.6	1.3	7.3	2.1	6.2	1.1	953.9	953.2	0.7
25	13.5	0.1	89.9	45.8	1.8	7.4	1.4	6.5	1.1	954.2	952.2	2
26	15.8	0.1	99.0	62.9	1.9	7.1	2.0	6.0	1.1	951.9	952.8	0.9
27	17.6	0.1	81.7	40.4	1.4	7.1	1.6	6.2	1.1	952.3	953	0.7
28	15.6	0.1	84.4	47.4	1.7	7.3	1.7	6.2	1.1	953.7	953.9	0.2
29	16.8	0.1	90.8	51.8	1.3	7.4	1.9	6.0	1.1	954.7	954	0.7
30	16.3	0.1	81.2	49.1	1.8	7.3	1.8	6.1	1.1	954.6	953.2	1.4
31	15.7	0.1	84.6	47.8	1.9	7.1	1.7	6.0	1.1	954.8	954.1	0.7
32	15.3	0.1	86.2	55.5	1.6	7.1	1.6	6.0	1.1	954.4	953.8	0.6
33	17.1	0.1	93.8	65.6	1.3	7.2	1.6	6.1	1.1	955	955	0
34	17.6	0.1	91.6	45.9	1.6	7.2	1.6	6.3	1.1	956.5	955.4	1.1
35	15.3	0.1	93.1	55.4	1.6	7.0	1.8	6.1	1.1	955.3	955.3	0
36	13.8	0.1	99.1	41.8	1.7	7.5	1.5	5.9	1.1	954.2	953.6	0.6
37	13.7	0.1	95.3	53.7	1.9	7.1	1.8	6.1	1.1	955.4	955.2	0.2
38	16.1	0.1	91.1	42.5	2.1	6.9	1.6	6.0	1.1	953.8	954.1	0.3
39	17.4	0.1	90.4	45.6	2.1	7.2	1.6	6.3	1.1	953.2	953	0.2
40	14.3	0.2	91.4	37.9	1.8	7.3	2.3	5.9	1.1	954.2	953.7	0.5

En el control de calidad tradicional de la característica Y, se observan dos situaciones inconvenientes en el sistema de producción. La primera situación corresponde a la presencia de siete puntos fuera de control estadístico lo que señala una desestabilización del sistema, la segunda circunstancia se asocia a la presencia de una autocorrelación significativa en la característica de calidad Y, dicha autocorrelación va en contra del principio de los supuestos de independencia del control estadístico, ver Fig. 1 y Fig. 2 respectivamente.

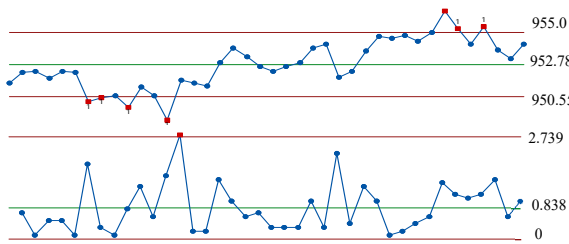


Fig. 1. Cartas de control individual de Y.

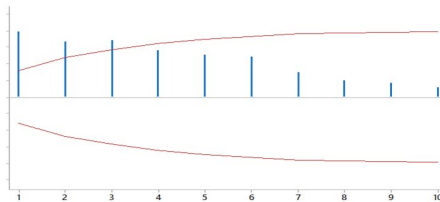


Fig. 2. Función de autocorrelación para Y.

Debido a los inconvenientes de inestabilidad estadística en el proceso y la falta de independencia, el método ajuste de regresión tradicional plantea dar solución al llevar un monitoreo estadístico del proceso a partir del estudio de los residuales bajo el enfoque de mínimos cuadrados, es decir, después de la operación de ajuste empleando (1), se obtiene el modelo presentado en (5). Los residuales se obtienen a partir de (2), restando el valor estimado a la observación original. Al construir las cartas de control individuales de medias y rangos ($\bar{X}\bar{R}$) sobre los residuales se observa un mayor control en el proceso, identificando únicamente un punto fuera de control, ver Fig. 3. Respecto a la autocorrelación, de acuerdo a la Fig. 4, es posible asumir la independencia de los residuales y de esta forma cumplir con los supuestos de la filosofía del control estadístico.

$$Y = 825.9 + (0.4741 * x_1) + (1.41 * x_2) - (0.1168 * x_3) - (0.0824 * x_4) - (2.39 * x_5) - (1.3 * x_6) + (2.18 * x_7) + (2.981 * x_8) + (113.2 * x_9) \quad (5)$$

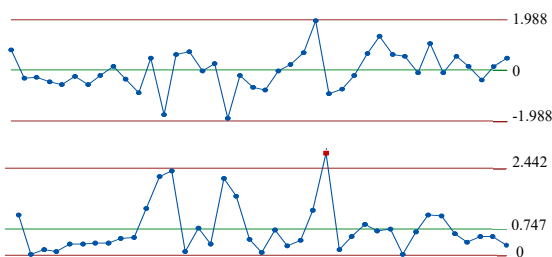


Fig. 3. Cartas de control para residuales de Y.

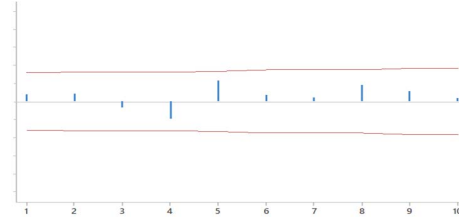


Fig. 4. Función de autocorrelación para Y.

En el presente trabajo de investigación se desarrolló una comparativa de métodos estadísticos contra la propuesta de inteligencia artificial con el fin de obtener residuales que tiendan a un valor mínimo, de esta forma la eficiencia del método se verá mejorada y permitirá evolucionar el procedimiento ajuste de regresión empleado para el control estadístico de sistemas de fabricación bajo entornos multivariantes.

A. Regresión LAD

La Regresión de Mínimas Desviaciones Absolutas (LAD), tiene la finalidad de encontrar una función que se aproxime a un conjunto de datos. Este método minimiza la suma de errores absolutos, que son la suma de los valores absolutos de los residuales entre los puntos generados por la función y los puntos correspondientes en los datos [11]. La metodología utilizada por la regresión LAD, se muestra en los siguientes pasos empleando los datos establecidos en la Tabla I, como caso de estudio.

Los estimadores de LAD quedan representados por $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n$, se eligen de modo que la suma de los valores absolutos de los residuales $\sum|\hat{\epsilon}_i|$, sean lo más pequeño posible, es decir, $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_n$ son los valores de $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$, que minimizan a (6).

$$\sum|y_i - (b_0 + b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + \dots + b_nx_{in})| \quad (6)$$

La notación vectorial se describe en (7).

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad y \quad x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Paso 1: Matriz base (A), variables independientes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 14.58 & 0.07 & 82.38 & 53.25 & 1.68 & 7.09 & 2.44 & 6.16 & 1.09 \\ 1 & 14.23 & 0.15 & 80.70 & 45.20 & 1.77 & 6.86 & 1.88 & 5.93 & 1.10 \\ 1 & 16.30 & 0.07 & 90.76 & 43.66 & 1.67 & 7.26 & 1.86 & 6.06 & 1.09 \\ 1 & 14.69 & 0.13 & 91.52 & 49.47 & 1.64 & 7.09 & 1.95 & 6.32 & 1.09 \\ 1 & 11.01 & 0.13 & 92.80 & 54.25 & 1.72 & 7.18 & 1.72 & 6.04 & 1.10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 16.94 & 0.13 & 83.40 & 45.44 & 1.87 & 7.25 & 1.43 & 6.13 & 1.10 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Matriz base c de variable(s) dependiente(s)

$$c = [951.5 \quad 952.2 \quad 952.3 \quad 951.8 \quad 952.3 \quad \dots \quad 949.8]'$$

La suma de las desviaciones absolutas de (6), pueden escribirse como se presenta en (8).

$$\Sigma|y_i - b'x_i| \tag{8}$$

Paso 3: Matriz β de estimadores

$$\hat{\beta} = A^{-1} * c$$

$$\hat{\beta} = [971.7778 \ -0.2088 \ -27.4639 \ 0.2523 \ -0.1181 \ 6.8692 \\ -7.9261 \ 0.9576 \ -0.9219 \ 16.7075]'$$

Para determinar el vector b que minimice a (8), se emplea un procedimiento iterativo. Comienza con un vector b, y así sucesivamente hasta obtener el mejor vector $\hat{\beta}$. En cada iteración es importante localizar un vector dirección d, y así definir el mejor valor para el cual $b^* = b + td$ es mejor. Se requiere un procedimiento que determine un valor de t (9), que minimice a (10).

$$t = \frac{y_i - b_i'x_i}{d_j'x_i} \tag{9}$$

$$\Sigma|y_i - (b + td)'x_i| \tag{10}$$

Paso 4: Direcciones generadas. Escribiendo $z_i = y_i - b'x_i$ y $w_i = d'x_i$, entonces el procedimiento debe localizar un valor de t que minimice a (11).

$$\Sigma|z_i - tw_i| \tag{11}$$

Se almacenan las razones z_i/w_i , que serán posicionadas en orden ascendente y se recalculan z's y w's de acuerdo al nuevo orden, localizando un índice k que satisfaga a (12).

$$|w_1| + |w_2| + \dots + |w_{k-1}| < \frac{1}{2}T \tag{12} \\ |w_1| + |w_2| + \dots + |w_{k-1}| + |w_k| > \frac{1}{2}T$$

Donde $T = \Sigma|w_i|$. El valor minimizado de t es: z_k/w_k .

Paso 6: identificar el número de iteraciones, direcciones y vectores remplazados. El problema menor desviación absoluta puede ser extendido para incluir múltiples explicadores (13).

$$\text{Minimizar } S(\beta, b) = \Sigma_i |x_i'\beta + b - y_i| \tag{13} \\ x_i'\beta + b - y_i \leq k$$

Paso 7: Estimador de salida

$$\hat{\beta} = [874.6302 \ -0.0679 \ 9.5327 \ 0.0535 \ -0.0757 \\ -0.1282 \ 0.1652 \ 0.2838 \ 3.0084 \ 51.5750]'$$

Modelo matemático de la regresión LAD:

$$\hat{Y} = 874.6302 - 0.0679X1 + 9.5327X2 + 0.0535X3 - 0.0757X4 \\ - 0.1282X5 + 0.1652X6 + 0.2838X7 + 3.0084X8 \\ + 51.5750X9$$

Los valores de variables independientes (Xi) correspondientes a la variable dependiente (Yi) son sustituidos en el modelo de regresión, el valor resultante es comparado con el valor real para obtener el residual.

$$\hat{Y}_1 = 874.6302 - 0.0679(14.5868) + 9.5327(0.073) \\ + 0.0535(82.3809) - 0.0757(53.2551) \\ - 0.1282(1.6802) + 0.1652(7.0944) \\ + 0.2838(2.4403) + 3.0084(6.1696) \\ + 51.5750(1.0969)$$

$$\hat{Y}_1 = 951.4568; Y = 951.5 \\ \text{Residual}_1 = |951.5 - 951.5016| \\ \text{Residual}_1 = 0.0016$$

B. Regresión M de Huber

La regresión M es un procedimiento estadístico robusto, funciona de forma eficiente cuando las suposiciones del modelo estadístico no son verdaderas como la normalidad e independencia. El funcionamiento consiste en un proceso iterativo en el que se realizará un ajuste al vector estimador cuando su desviación estándar sea mayor que su varianza, el proceso se detiene hasta que la convergencia de su vector estimador sea cero o se aproxime a cero [18].

La desventaja del método es que sólo se basa en relaciones lineales entre las variables dependientes e independientes. El funcionamiento del método empleado por la regresión M, se muestra en los siguientes pasos.

El procedimiento para encontrar M-estimaciones en regresión múltiple es una generalización directa de (14). Las M-estimaciones de Huber representadas por $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p$ son los valores de $b_0, b_1, b_2, \dots, b_p$ que minimizan a (15). Para obtener una versión invariante en relación a la escala (o a la variabilidad), se busca:

$$\Sigma \rho'(y_i - (a + bx_i)) = 0 \tag{14} \\ \Sigma x_i \rho'(y_i - (a + bx_i)) = 0$$

$$\Sigma \rho(y_i - (b_0 + b_1x_{i1} + \dots + b_px_{ip})) \tag{15}$$

Paso 1: Matriz de los estimadores.

$$\hat{\beta} = A^{-1} * c$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 14.58 & 0.07 & 82.38 & \dots & 1.09 \\ 1 & 14.23 & 0.15 & 80.70 & \dots & 1.10 \\ 1 & 16.30 & 0.07 & 90.76 & \dots & 1.09 \\ 1 & 14.69 & 0.13 & 91.52 & \dots & 1.09 \\ 1 & 11.01 & 0.13 & 92.80 & \dots & 1.10 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 14.30 & 0.15 & 91.39 & \dots & 1.11 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 951.5 \\ 952.2 \\ 952.3 \\ 951.8 \\ 952.3 \\ \vdots \\ 954.2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = [878.7405 \ 0.1312 \ 14.7179 \ 0.0350 \ -0.0145 \ 0.7260 \ 0.9707 \\ -0.0775 \ 0.2467 \ 53.0996]'$$

Donde $\rho(e)$ es la función definida en (16). Es conveniente usar la notación vectorial (17).

$$\rho(e) = \begin{cases} e^2 & \text{si } -k \leq e \leq k \\ 2k|e| - k^2 & \text{si } e < -k \text{ ó } k < e \end{cases} \tag{16}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \quad y \quad x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Paso 2: iteraciones y vectores remplazados. El vector $\hat{\beta}$ de M-estimaciones de Huber se define como el vector b que minimiza a (18).

$$\sum \rho(y_i - b'x_i) \quad (18)$$

Paso 3: Estimador de salida.

$$\hat{\beta} = [874.9934 \ 0.1482 \ 17.1345 \ 0.0259 \ -0.0151 \ 0.9583 \ 1.3458 \\ -0.1604 \ 0.2949 \ 53.8605]'$$

Modelo matemático de la regresión M:

$$\hat{Y} = 874.9934 + 0.1482X_1 + 17.1345X_2 + 0.0259X_3 - 0.0151X_4 \\ + 0.9583X_5 + 1.3458X_6 - 0.1604X_7 + 0.2949X_8 \\ + 53.8605X_9$$

Los valores de variables independientes (X_i) correspondientes a la variable dependiente (Y_i) son sustituidos en el modelo de regresión, el valor resultante es comparado con el valor real para obtener el residual.

$$\hat{Y}_1 = 874.9934 + 0.1482(14.5868) + 17.1345(0.0732) \\ + 0.0259(82.3809) - 0.0151(53.2551) \\ + 0.9583(1.6802) + 1.3458(7.0944) \\ - 0.1604(2.4403) + 0.2949(6.1696) \\ + 53.8605(1.0969)$$

$$\hat{Y}_1 = 951.4092; Y = 951.5 \\ \text{Residual}_1 = |951.5 - 951.4092| \\ \text{Residual}_1 = 0.0908$$

C. Regresión RNA

El funcionamiento de este método consiste en entrenar una RNA multicapa a partir de las variables independientes (X 's) una vez normalizadas en un rango de -1 a 1, de ahí que la función de activación empleada es una tangente sigmoidea. La RNA realiza el trabajo de estimación en base a pesos sinápticos y bias generados en un proceso iterativo [14]. El procedimiento empleado por la RNA para la estimación de la variable dependiente (Y) a partir de las variables independientes (X 's) se muestra a partir de los siguientes pasos.

El ajuste corresponde a la acción de modificar parámetros que integran la topología de la red neuronal artificial hasta obtener una combinación de parámetros que arroje una solución aceptable para la tarea de estimación. Las topologías de RNA's propuestas en la Tabla II, son arquitecturas que se ajustan adecuadamente a los valores objetivos de la variable dependiente Y durante la fase de entrenamiento, es por ello que se recurrió a un parámetro estadístico como el error cuadrático medio (MSE) para determinar que topología debería ser seleccionada para la fase de prueba y posteriormente resolver la tarea de estimación. En la Tabla III, se muestra la topología de la RNA seleccionada para llevar a cabo la tarea de estimación

en el procedimiento ajuste de regresión propuesto para el control estadístico de procesos multivariantes.

TABLA II
TOPOLOGÍAS DE RNA

Topología	1	2	3	4	5	6
Neuronas capa oculta	5	5	6	6	7	7
Tasa de aprendizaje	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
Error permitido	1e-4	1e-5	1e-4	1e-5	1e-4	1e-5
Iteraciones	225	555	245	317	149	269
Coefficiente de Correlación	0.9998	0.9999	0.9997	0.9999	0.9998	0.9999
Error Cuadrático Medio	0.0027	0.0015	0.0025	0.0019	0.0002	0.0021

TABLA III
TOPOLOGÍA DE RNA SELECCIONADA

Parámetro	Valor
Neuronas en capa oculta.	7
Función de activación.	Tangente-Sigmoidea
Visualización.	50
Tasa de aprendizaje.	0.005
Error permitido.	1e-4
Iteraciones.	149
Tipo de entrenamiento.	Gradiente conjugado
Tiempo de convergencia	1 segundo

Como se mencionó, el procedimiento comienza con la normalización de las variables de entrada, de esta forma queda definida la matriz x_i . Se procede a ilustrar el procedimiento tomando en cuenta la primera observación de los datos establecidos en la Tabla I.

$$x_1 = [0.0046 \ -0.4467 \ -0.8466 \ 0.1526 \ 0.0404 \\ -0.8713 \ 1.2388 \ 0.3323 \ -0.2412]'$$

Mediante el algoritmo del gradiente escalada conjugada se efectúa la fase de entrenamiento desarrollando los pesos sinápticos y bias para cada una de las capas empleadas en la RNA.

Donde: W_1 : corresponde a los pesos sinápticos de la primera capa; b_1 : bias de la primera capa; LW_1 : pesos sinápticos de la capa oculta y Lb_1 : bias de la capa oculta.

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1.3767 & 1.0468 & 0.3340 & \dots & -0.8867 \\ 0.0210 & 0.4452 & -0.3507 & \dots & -0.3101 \\ -0.7687 & 1.0547 & 0.5637 & \dots & -1.2905 \\ -1.3063 & 0.2013 & 0.5150 & \dots & -0.5381 \\ -0.5283 & 0.1600 & 0.2892 & \dots & 1.5786 \\ 0.9612 & -1.1483 & -0.9032 & \dots & 1.5510 \\ -0.2728 & -1.8443 & 0.8154 & \dots & 1.3388 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = [-1.10 \ -1.68 \ 0.50 \ 0.35 \ 0.96 \ 2.45 \ 3.33] \\ LW_1 = [21.57 \ 1.91 \ 0.72 \ -0.78 \ 0.67 \ 1.81 \ 2.12] \\ Lb_1 = [-1.2031]$$

Donde la matriz J_{ij} se define como la función tangente sigmoidea definida en (19), que a su vez depende de la función neuronal K descrita en (20).

$$J = \frac{e^K - e^{-K}}{e^K + e^{-K}} \quad (19)$$

$$K = x'(W') + b' \tag{20}$$

$$K = [-2.83 \quad -0.90 \quad -0.05 \quad 1.48 \quad 1.88 \quad 2.47 \quad 5.33]$$

Obtenida la matriz K, cada uno de sus elementos es evaluado en la función tangencial sigmoidea que se especificó en (19) generando la matriz J.

$$J = [-0.9932 \quad -0.7176 \quad -0.0589 \quad 0.9020 \quad 0.9553 \quad 0.9859 \quad 1]'$$

Se genera la salida de la RNA sin normalizar (V_n) al emplear (21).

$$V_n = J_{1j}(LW') + Lb \tag{21}$$

$$V_n = \begin{bmatrix} -0.9932 \\ -0.7176 \\ -0.0589 \\ 0.9020 \\ 0.9553 \\ 0.9859 \\ 1.0000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1.5710 \\ 1.9192 \\ 0.7286 \\ -0.7827 \\ 0.6740 \\ 1.8176 \\ 2.1284 \end{bmatrix} + [-1.2031]$$

$$V_n = [-0.3254]$$

El proceso de desnormalización se obtiene a partir de (22).

$$\hat{Y}_1 = \frac{(V_n - R_{MIN})(V_{MAX} - V_{MIN})}{R_{MAX} - R_{MIN}} + V_{MIN} \tag{22}$$

Donde: \hat{Y} : Es el valor de salida emitida por la RNA; V_{MAX} : Valor mayor (Y); V_{MIN} : Valor menor (Y); R_{MAX} : Rango superior; R_{MIN} : Rango inferior.

$$\hat{Y}_1 = \frac{[-0.3254 - (-1)](956.5 - 948.9)}{1 - (-1)} + 948.9$$

$$\hat{Y}_1 = 951.4634$$

Al obtener el valor emitido por la regresión empleando la RNA se compara con el valor objetivo de esa misma observación Y, con el fin de generar el valor residual.

$$\hat{Y}_1 = 951.4634; Y = 951.5$$

$$\text{Residual}_1 = |951.5 - 951.4634|$$

$$\text{Residual}_1 = 0.0366$$

III. RESULTADOS

El método ajuste de regresión tiene el objetivo de controlar simultáneamente varias características de calidad que influyen de forma correlacionada a una variable de salida que define la calidad final del proceso, de tal forma que es vital desarrollar un mecanismo que modele el comportamiento de las características de calidad independientes de forma eficiente. Para poder realizar la comparación entre los métodos estadísticos (LAD y M) propuestos en la literatura y la RNA basada en los principios de inteligencia artificial, se obtuvieron las estimaciones de las 40 observaciones establecidas para el caso de estudio, ver Tabla I. Los resultados de las estimaciones por cada uno de los métodos además del valor real del proceso se observan en la Tabla IV.

TABLA IV
ESTIMACIONES POR MÉTODO

Observación	Y Valor real	RNA Estimado	M Estimado	LAD Estimado
1	951.5	951.4634	951.4092	951.5016
2	952.2	952.2183	952.8974	952.1987
3	952.3	952.2807	952.0694	951.8360
4	951.8	951.7886	952.7271	953.0878
5	952.3	952.28714	952.7931	952.6128
6	952.2	952.1797	951.9396	952.2006
7	950.2	950.1490	951.5320	950.9669
8	950.5	950.4537	951.7000	950.4993
9	950.6	950.5554	952.8650	952.5482
10	949.8	949.7715	953.6430	952.3451
11	951.2	951.1697	950.7828	951.7480
12	950.6	950.5870	952.3669	951.7748
13	948.9	948.8042	950.7410	949.9174
14	951.7	951.6724	952.7245	953.9827
15	951.5	951.4599	952.6707	951.5006
16	951.3	951.2147	952.3600	953.5075
17	952.9	952.8726	953.1788	951.5818
18	953.9	953.9392	953.2365	953.2329
19	953.3	953.3001	952.9310	952.1064
20	952.6	952.5962	952.6040	952.3261
21	952.3	952.3285	953.4137	952.2019
22	952.6	952.6010	953.8780	952.6005
23	952.9	952.8798	953.8124	953.4336
24	953.9	953.9236	952.4763	951.9120
25	954.2	954.2914	953.5251	954.2017
26	951.9	951.8724	953.4186	951.8984
27	952.3	952.2989	952.4274	952.5400
28	953.7	953.6873	952.0574	951.9334
29	954.7	954.7192	953.0271	951.8865
30	954.6	954.6806	951.9265	950.9339
31	954.8	954.8265	953.7027	952.2587
32	954.4	954.4489	952.7926	951.6211
33	955	955.03885	953.3563	951.8049
34	956.5	956.5473	953.5394	953.0869
35	955.3	955.3828	951.9007	951.5896
36	954.2	954.2755	953.3275	952.8419
37	955.4	955.3012	954.0603	953.4904
38	953.8	953.7553	952.6471	952.1576
39	953.2	953.1893	953.7030	953.2011
40	954.2	954.2354	954.7606	954.1970

El comportamiento de los residuales obtenidos por cada uno de los métodos de regresión aplicados a las 40 observaciones se muestra en la Fig. 5. Cabe señalar que los residuales son una medida estadística que cuantifica la diferencia entre la estimación del método de regresión y el valor real a partir de (2), por lo tanto el uso de un método de ajuste competitivo mantendrá los residuales cercanos a cero.

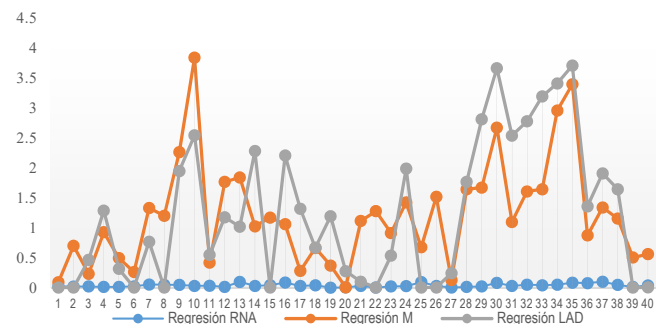


Fig. 5. Comparación de residuales.

De acuerdo con [19], existen otros indicadores estadísticos que miden la eficiencia de un método en la operación de estimación al comparar el error o desviación de ajuste: suma acumulada de errores de pronóstico (CFE), error cuadrático medio (MSE), desviación media absoluta (MAD) y error porcentual medio absoluto (MAPE). Ver Tabla V.

TABLA V
INDICADORES DE AJUSTE ESTADÍSTICO

CFE	MSE	MAD	MAPE
$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)$	$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}$	$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{Y}_i }{n}$	$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{100 Y_i - \hat{Y}_i }{\text{Real}_i}}{n}$
(23)	(24)	(25)	(26)

TABLA VI
MEDICIÓN DE ERROR ESTADÍSTICO

Método Regresión	CFE	MSE	MAD	MAPE
Múltiple	547.1638	191.273093	13.6790938	1.4359389
RNA	1.4671	0.00207394	0.03667775	0.00384885
M	48.1097	2.2033042	1.2027425	0.12621995
LAD	49.6755	2.9022365	1.2418875	0.13024469

De acuerdo con los resultados mostrados por los indicadores estadísticos se demuestra que el uso de la RNA es un método que se encuentra muy por encima de los métodos estadísticos a la hora de modelar el comportamiento de las variables independientes sobre la variable dependiente al registrar la menor magnitud en cada uno de los indicadores estadísticos, ver Tabla VI.

El método ajuste de regresión propone realizar una carta de control ($\bar{X}\bar{R}$) a partir de los residuos generados por el método de regresión empleado, en este caso serán utilizados los residuos resultantes del ajuste ejecutado por la RNA y posteriormente utilizando (3) y (4), respecto a la carta de tendencia central (\bar{X}) las observaciones permanecen dentro de los límites de control, analizando la carta de dispersión (\bar{R}) las muestras se encuentran dentro de los límites de control pero muy cerca del límite inferior, esto indica que el proceso está bajo control y el ajuste realizado a la variable independiente empleando la RNA es muy cercano, ver Fig. 6. Por otro lado, es importante cumplir con supuestos estadísticos como la independencia para la validación del método, empleando los residuales generados del ajuste realizado por la RNA sobre los datos reales del proceso, en la Fig. 7, se observa claramente que no se presentan una autocorrelación significativa, es decir que se cumple con el supuesto de independencia estadística ya que no se exceden los límites de la función de autocorrelación en los datos.

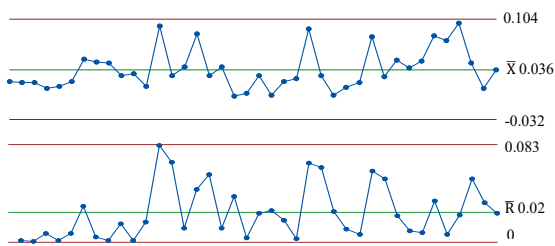


Fig. 6. Cartas de control para residuales RNA.

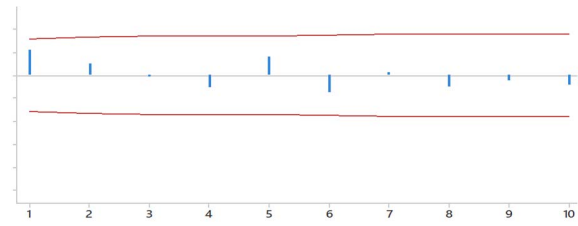


Fig. 7. Función de autocorrelación para residuales RNA.

Con el fin de extender la evaluación efectuada a la RNA para resolver tareas de ajuste entre diferentes variables de fabricación correlacionadas sobre alguna variable de calidad final del proceso, se realiza un ensayo en el cual se modifica el tamaño de muestra y aumenta el número de variables incluidas en el ajuste procesado por la RNA. Los datos fueron obtenidos de un proceso de manufactura de ejes traseros para el sector automotriz. Las métricas estadísticas presentadas dentro de la Tabla VII, muestran que la RNA ofrece mejores resultados en tareas de regresión efectuadas sobre variables correlacionadas en comparación con los métodos estadísticos actuales (LAD y M), inclusive si el número de variables aumenta a igual que el tamaño de la muestra obtenida.

TABLA VII
MEDICIÓN DE ERRORES ESTADÍSTICOS

Método Regresión	Número de Variables	Número de Observaciones	CFE	MSE	MAD	MAPE
RNA	11	100	1.5603	0.0047	0.0631	0.00571
		150	2.0603	0.0063	0.0728	0.00904
	13	100	1.3452	0.0014	0.0251	0.00245
		150	1.2671	0.0011	0.0217	0.00221
	15	100	1.7920	0.0058	0.0687	0.00684
		150	1.4001	0.0015	0.0208	0.00307
M	11	100	40.3027	1.9759	1.0081	0.1084
		150	53.365	2.8940	1.9472	0.2284
	13	100	44.6821	2.1007	1.1738	0.1107
		150	58.6318	2.9174	2.056	0.2145
	15	100	47.2761	2.1104	1.1047	0.1085
		150	50.4872	2.7640	1.8018	0.2173
LAD	11	100	53.8720	3.4105	1.5207	0.1684
		150	59.6152	4.2056	1.9470	0.1974
	13	100	56.9754	3.9031	1.7603	0.1785
		150	62.6182	4.5714	2.2601	0.2307
	15	100	60.7520	4.7972	2.2456	0.2190
		150	64.6755	4.8902	2.4038	0.3651

IV. CONCLUSIÓN

En el presente trabajo de investigación se plantea la integración del método ajuste de regresión y la inteligencia artificial, específicamente se propone emplear una RNA para llevar a cabo la tarea de ajuste para cada una de las variables que afectan de forma conjunta y correlacionada a la calidad de un producto expresada en una variable dependiente. El uso de la RNA demostró que brinda mejores resultados en cuanto a la calidad de estimación al obtener valores muy por debajo de los métodos LAD y M sugeridos en la literatura, ver Tabla VI y VII.

La metodología presentada permitirá llevar a cabo de forma eficiente un control estadístico multivariante de procesos inclusive si los datos extraídos del sistema de fabricación se encuentran autocorrelacionados incumpliendo el supuesto de independencia. Las ventajas que ofrece el método multivariante ajuste de regresión tradicional están ligadas directamente a la

capacidad de ajustar un modelo que correlacione las variables independientes en la calidad del proceso y la variable independiente que será monitoreada empleado un gráfico de control ($\bar{X}R$), el trabajo presentado permite la evolución del método multivariante al mostrar una metodología de ajuste más eficiente en la operación de estimación a partir de una red neuronal artificial, incluso al aumentar la capacidad de análisis de variables y tamaño de muestra.

REFERENCIAS

- [1] Ramírez, H.; Mendoza, E.; Mendoza, M.; et al. "Application of Augmented Reality in Statistical Process Control, to Increment the Productivity in Manufacture". *Procedia Computer Science*, Vol.75, pp. 213-220. DOI:10.1016/j.procs.2015.12.240. 2015
- [2] Kharbach, M.; Cherrah, Y.; et al. "Multivariate statistical process control in product quality review assessment – A case study". *Annales Pharmaceutiques Françaises*, Vol.75, pp. 446-454. DOI:10.1016/j.pharma.2017.07.003. 2017
- [3] Kim, B.; Jitpitakert, W.; et al. "Data mining model-based control charts for multivariate and autocorrelated processes". *Expert Systems with Applications*, Vol.39, pp. 2073-2081. DOI:10.1016/j.eswa.2011.08.010. 2012
- [4] Campos, R.; Branco, A.; Guerreiro, A. "The effect of the autocorrelation on the performance of the T² chart". *European Journal of Operational Research*, Vol.247, pp. 155-165. DOI:10.1016/j.ejor.2015.05.077. 2015
- [5] Hawkins, D. "Multivariate Quality Control Base on Regression-Adjusted Variables". *Technometrics*, Vol.33, pp. 61-75. <https://www.jstor.org/stable/1269008>. 1991
- [6] Hauck, D.; Runger, G.; Montgomery, D. "Multivariate statistical process monitoring and diagnosis with grouped regression-adjusted variables". *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Vol.28, pp. 309-328. DOI:10.1080/03610919908813551. 2007
- [7] Lawless, J.; Mackay, R.; Robinson J. "Analysis of Variation Transmission in Manufacturing Processes—Part I". *Journal of Quality Technology*, Vol.31, pp. 131-142. DOI:10.1080/00224065.1999.119799. 2018
- [8] Zantek, P.; Wright, G.; Plante, R. "Process and Product Improvement in Manufacturing Systems with Correlated Stages". *Management Science*, Vol.48, pp. 591-710. DOI:10.1287/mnsc.48.5.591.780. 2002
- [9] Ding, G.; Zeng, L. "On the effect of measurement errors in regression-adjusted monitoring of multistage manufacturing processes". *Journal of Manufacturing Systems*, Vol.36, pp. 263-273. DOI:10.1016/j.jmsy.2014.06.013. 2015
- [10] Gejdoš, P. "Continuous Quality Improvement by Statistical Process Control". *Procedia Economics and Finance*, Vol.34, pp. 565-572. DOI:10.1016/S2212-5671(15)01669-X. 2015
- [11] Chuanfa; Chen; Li; et al. "Least absolute deviation-based robust support vector regression". *Knowledge-Based Systems*, Vol.131, pp. 183-194. DOI:10.1016/j.knsys.2017.06.009. 2017
- [12] Donnelly, A.; Misstear, B.; Broderick, B. "Real time air quality forecasting using integrated parametric and non-parametric regression techniques". *Atmospheric Environment*, Vol.103, pp. 53-65. DOI:10.1016/j.atmosenv.2014.12.011. 2015
- [13] Jiang, C.; Jiang, M.; Xua, Q.; et al. "Expectile regression neural network model with applications". *Neurocomputing*, Vol.247, pp. 73-86. DOI:https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.03.040. 2017
- [14] Cui, C.; Feam, T. "Modern practical convolutional neuronal networks for multivariate regression: applications to NIR calibration". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*. DOI:10.1016/j.chemolab.2018.07.008. 2018
- [15] La Delfa, N.; Potvin, J. "Predicting manual arm strength: A direct comparison between artificial neural network and multiple regression approaches". *Journal of Biomechanics*, Vol. 49, pp. 602-605. DOI:10.1016/j.jbiomech.2016.01.008. 2016
- [16] Azadi, S.; Karimi-Jashni, A. "Verifying the performance of artificial neural network and multiple linear regression in predicting the mean seasonal municipal solid waste generation rate: A case study of Fars province, Iran". *Waste Management*, Vol.48, pp. 14-23. DOI:10.1016/j.wasman.2015.09.034. 2016
- [17] Hoffmann, I.; Semeels, S.; Filzmoser, P.; et al. "Sparse partial robust M regression". *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, Vol.149. DOI: 10.1016/j.chemolab.2015.09.019. 2015
- [18] Du, J.; Zhang, Z.; Xie, T. "A weighted M-estimator for linear regression models with randomly truncated data". *Statistics & Probability Letters*, Vol.138. DOI:10.1016/j.spl.2018.02.055. 2018
- [19] Permai, S. D.; Tanty, H. "Linear regression model using bayesian approach for energy performance of residential building". *Procedia Computer Science*, Vol.135, pp. 671-677. DOI:10.1016/j.procs.2018.08.219. 2018



Edgar Augusto Ruelas Santoyo. Earned a BEng and MSc in Industrial Engineering from the Instituto Tecnológico of Celaya in 2008 and 2011, respectively. He obtained PhD in Posgrado Interinstitucional en Ciencia y Tecnología (PICyT) from CIATEC in 2015. He is currently a Full Professor in the the Instituto Tecnológico Superior de Irapuato. His main research interests in Industrial Engineering are: industrial statistics, image processing, fuzzy logic and neural networks.



José Antonio Vázquez López graduated with Engineering and Master degree from Instituto Tecnológico de Celaya, in 1998 and 2001. He obtained PhD in Posgrado Interinstitucional en Ciencia y Tecnología (PICyT) from CIATEC in 2009. His main research interest is in industrial engineering and statistics, where he has served as an industrial consultant for several companies. His research interests are design and improvement of processes and products: advanced process control and pattern recognition using neural networks. He is currently a Full Professor in the Instituto Tecnológico of Celaya.



Javier Cruz Salgado he obtained a PhD in industrial engineering at CIATEC. He made a PostDoctoral stay at CIO from 2016 to 2018. Invited researcher at illinois institute of technology in the department of applied mathematics in 2013. Hi is currently head of research department at Universidad Politécnica del Bicentenario.



Roberto Baeza Serrato is a Research professor at a University of Guanajuato, Sede Yuriria in Guanajuato, México. He received his BSc, MSc and PhD degrees in Industrial Engineering and Manufacturing from ITSUR, ITC and CIATEC, respectively. His doctoral training was supported by the National Council of Science and Technology of México (CONACYT). He is a member of the National System of Researchers of México (SNI).



2016, respectively.

Juan Antonio Sánchez Márquez is a professor and researcher at the University of Guanajuato in the Chemical Engineering Department, Campus Guanajuato. He obtained a Master Degree in Process Integration and Energy Saving and a PhD in Chemical Engineering from University of Guanajuato in 2011 and



Tecnológico of Celaya.

José Alfredo Jiménez García. He obtained PhD in Posgrado Interinstitucional en Ciencia y Tecnología (PICyT) from CIATEC in 2013. His main research interest is in industrial engineering, simulation and design of experiments. His research interests is improvement discrete event systems. He is currently a Full Professor in the Instituto