

Optimum Balancing of the Four-Bar Linkage Using Fully Cartesian Coordinates

M. Acevedo, T. Orvañanos, R. Velázquez, and E. Haro

Abstract—This article presents the design optimization of the four-bar linkage for the reduction of the Shaking Force and the Shaking Moment. It is followed a novel procedure based on fully Cartesian Coordinates (Natural Coordinates) and the use of counterweights. These counterweights with as little restrictive constraints on their geometric parameters as possible. No particular counterweight shape in advance is assumed. The analytical equations for the linear momentum and for the angular momentum are obtained, resulting in equations expressed in terms on the mass and the coordinates of the center of mass of the counterweights. These expressions are then used to obtain the Shaking Force and the Shaking Moment of the system in a very direct way. To solve the inverse dynamics problem the inversion of the transpose of the Jacobian matrix, associated to the kinematic constraints, is not required. The links' masses are restricted only by imposing positive mass values. As a novelty, the most influencing optimization variables are identified using a global sensitivity analysis method, leading to a reduction on the number of optimization variables. The minimization is done using Evolutionary Computation. The results obtained are validated by simulations, and compared to those presented in previous representative works.

Index Terms—Design Optimization, Dynamics, Evolutionary Computation, Minimization Methods, Natural Coordinates, Shaking Force, Shaking Moment.

I. INTRODUCCIÓN

EL balanceo dinámico de mecanismos es un tema de investigación tradicional en la ingeniería mecánica aún muy activo, vea por ejemplo [1]. Este consiste en reducir (en el mejor de los casos eliminar) la variación en las reacciones dinámicas transmitidas a la base fija, producidas por el movimiento. Estas reacciones son la fuerza de sacudimiento f_{sh} , vea la Fig. 1, cuya magnitud es igual a:

$$f_{sh} = \sqrt{(f_{Ax} + f_{Dx})^2 + (f_{Ay} + f_{Dy})^2} \quad (1)$$

y el momento de sacudimiento τ_{sh} :

$$\tau_{sh} = \tau + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_D \quad (2)$$

en donde τ es el par motor, $\mathbf{r} = (x_D, y_D)$ es el vector de posición del punto D y $\mathbf{f}_D = (f_{Dx}, f_{Dy})$ es la reacción en el punto D. De este modo el objetivo es lograr que $f_{sh} = cte$ y que $\tau_{sh} = cte$ mientras el mecanismo se mueve, comúnmente a velocidad constante.

Hasta ahora se han desarrollado muchos métodos con el objetivo de lograr el balanceo de mecanismos. Pueden destacarse algunos trabajos representativos. En [2] se introduce uno de los métodos más conocidos para el balanceo por fuerzas, denominado balanceo por vectores lineales independientes. En [3] se propone el balanceo dinámico de un mecanismo de cuatro barras en línea. En [4] se presenta cómo reducir las fluctuaciones del momento angular a través de una distribución de masas, basado en expresiones numéricas del momento angular. Para mayor referencia los métodos consultar [5], [6] y [7], más recientemente [8], donde se realizan excelentes revisiones.

En este trabajo se propone la adición de contrapesos para llevar a cabo el balanceo dinámico óptimo de un mecanismo cuadrilátero articulado plano. El tamaño y localización de estos contrapesos se diseña con base en la optimización de distintas reacciones dinámicas: la fuerza de sacudimiento, el momento de sacudimiento, el par motor, o una combinación de todas ellas.

Distintos autores han resuelto este mismo problema a través de diferentes enfoques. En [9] y [10] se usa la teoría de mínimos cuadrados para la optimización del momento de sacudimiento de un eslabonamiento de cuatro barras balanceado por fuerzas. En [11] se presenta el balanceo parcial de fuerzas haciendo una adaptación del método de Multiplicadores de Lagrange. En [12] se presentan una mejora para la optimización del momento de sacudimiento mediante un método que utiliza la raíz cuadrada media, mientras que en [13] se utilizan técnicas de optimización heurística en conjunto con métodos de mecánica analítica. Esto último ha sido usado en [14] como base para un método que combina el uso de ecuaciones de Newton con el principio del trabajo virtual, planteando así ecuaciones de equilibrio desacopladas y posteriormente emplear el programa H.O.T. propuesto en [15]. Más recientemente, en [16], se resuelve el balanceo óptimo de un eslabonamiento de cuatro barras basado en la recursividad de las ecuaciones dinámicas. En [17] se logra el balanceo dinámico de un cuadrilátero articulado “in-line” con velocidad de entrada constante, empleando un péndulo físico como acoplador y agregando un grupo Assur de Clase II con parámetros geométricos y de masa previamente determinados. En [18] se formula el balanceo óptimo de un mecanismo de cuatro barras y se utiliza un algoritmo genético para resolver el problema de optimización.

Mario Acevedo (macevedo@up.edu.mx) y Eduardo Haro are with Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería. Álvaro del Portillo 49, Zapopan, Jalisco, 45010, México.
Teresa Orvañanos y Ramiro Velázquez are with Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería. Josemaría Escrivá de Balaguer 101, Aguascalientes, Aguascalientes, 20290, México.

En este trabajo se emplean únicamente coordenadas Cartesianas (coordenadas naturales, [19]) para obtener, de forma sencilla y explícita, las expresiones correspondientes al momento lineal, momento angular y al par motor de un eslabonamiento manivela-balancín plano. Una aportación importante de este trabajo ya que estas reacciones comúnmente se obtienen al resolver el problema de la dinámica inversa, lo cual implica la inversión de una matriz que con el método aquí propuesto se evita.

Posteriormente las expresiones del momento lineal y del momento angular se derivan con respecto al tiempo para obtener expresiones explícitas de la fuerza de sacudimiento y del momento de sacudimiento del mecanismo, haciendo el método muy didáctico y general. Este modelo permite expresar todas las reacciones dinámicas mencionadas, únicamente en función de la masa de los contrapesos y de las coordenadas que localizan sus centros de masa con respecto al sistema de referencia local en cada eslabón. Se evita el uso de variables angulares y de los momentos de inercia, empleados en la mayoría de las referencias, lo que constituye una ventaja. Estas variables son usadas en la optimización sin asumir una forma específica para los contrapesos. Únicamente se restringe a que las masas no sean negativas, su relación con los momentos de inercia queda implícita.

El proceso de optimización se lleva a cabo usando un algoritmo de naturaleza estocástica, Evolución Diferencial o "Differential Evolution" [24]. Este algoritmo es muy usado en distintos ámbitos de la ingeniería [26-28], y ha sido de especial ayuda para la síntesis de mecanismos [29]. Los resultados obtenidos son validados por medio de simulaciones y algunos son comparados con los presentados en [20], un trabajo representativo en este tipo de problemas.

El procedimiento presentado e ilustrado en este trabajo es general y puede aplicarse a eslabonamientos en el plano y en el espacio en general. De amplia aplicación en el diseño de robots.

II. MODELADO EN COORDENADAS NATURALES

La Fig. 1 muestra el diagrama cinemático de un eslabonamiento de cuatro barras genérico en el plano.

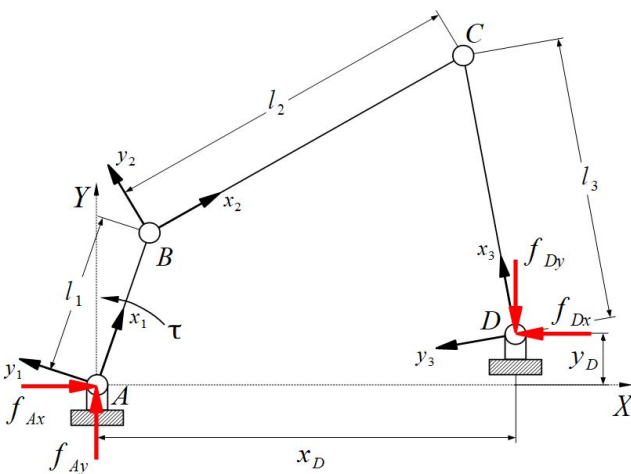


Fig. 1. Modelo cinemático de un mecanismo de cuatro barras: eslabón 1, manivela AC; eslabón 2, acoplador CD; eslabón 3, balancín BC.

Todos los eslabones del mecanismo han sido asumidos como rígidos. El eslabón 1, la manivela AC del mecanismo, gira con una velocidad ω [rad/s]. El eslabón 2, correspondiente con el acoplador BC, conecta la manivela con el tercer eslabón CD, el balancín, que realiza un movimiento oscilatorio. El eslabón, AD, está fijo. Las longitudes de los eslabones han sido indicadas con l_i , donde $i = \{1,2,3\}$.

Este eslabonamiento ha sido modelado utilizando únicamente las coordenadas Cartesianas de los puntos básicos A, B, C y D:

$$\mathbf{q} = [x_A \ y_A \ x_B \ y_B \ x_C \ y_C \ x_D \ y_D]^T \quad (3)$$

Estas coordenadas, dependientes y absolutas, pueden utilizarse para calcular las reacciones dinámicas expresadas directamente en el sistema de referencia fijo (sistema inercial). El punto clave para el cálculo está en el ensamble de la matriz de masas del sistema completo. Se inicia definiendo la matriz de masas de cada eslabón como:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} {}^i\mathbf{M}_{11} & {}^i\mathbf{M}_{12} \\ {}^i\mathbf{M}_{11} & {}^i\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

donde:

$${}^i\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} m_i - \frac{2m_i x_i}{l_i} + \frac{J_i}{l_i^2} & 0 \\ 0 & m_i - \frac{2m_i x_i}{l_i} + \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix}$$

$${}^i\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} & -\frac{m_i y_i}{l_i} \\ \frac{m_i y_i}{l_i} & \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix}$$

$${}^i\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} & \frac{m_i y_i}{l_i} \\ -\frac{m_i y_i}{l_i} & \frac{m_i x_i}{l_i} - \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix}$$

$${}^i\mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{J_i}{l_i^2} & 0 \\ 0 & \frac{J_i}{l_i^2} \end{bmatrix}$$

siendo: m_i la masa del eslabón i , J_i el momento de inercia del eslabón i con respecto al origen del sistema de coordenadas local, y (x_i, y_i) las coordenadas que ubican la posición del centro de masas g_i con respecto al origen del sistema de coordenadas local al elemento. La matriz (4) es simétrica,

positivo definida y constante. En [19] se da una explicación detallada sobre la obtención de (4) para un cuerpo en el plano con dos puntos básicos.

Es muy importante mencionar que en este caso m_i y J_i corresponden en un inicio a los parámetros de masa e inercia de los cuerpos en el eslabonamiento a balancear. Una vez llevado a cabo el proceso de optimización éstos incluirán además los parámetros de masa e inercia de los contrapesos para lograr el balanceo. Las características geométricas de los contrapesos y la localización de sus centros de masa se determinan mediante el proceso de optimización.

A. Cálculo de la Fuerza de Sacudimiento ("Shaking Force")

El momento lineal l del sistema, puede calcularse de forma directa empleando la siguiente expresión:

$$l = \mathbf{B}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades dependientes:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_A^T \quad \dot{\mathbf{q}}_B^T \quad \dot{\mathbf{q}}_C^T \quad \dot{\mathbf{q}}_D^T]^T \quad (6)$$

siendo $\dot{\mathbf{q}}_k = [\dot{x}_k \quad \dot{y}_k]^T$. Se introduce la matriz \mathbf{B} con el objetivo de poder sumar los vectores momento lineal correspondientes a cada uno de los puntos del eslabonamiento, calculados a través del producto $\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$. \mathbf{B} tiene dimensión $[2 \times 2n]$, siendo n el número de puntos básicos en el eslabonamiento, y está formada por una serie de matrices identidad. En este caso:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_2]; \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por otra parte, la matriz de masas de todo el sistema, \mathbf{M} , se ensambla teniendo en cuenta los puntos compartidos entre los cuerpos, en este caso queda como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{11} & {}^1\mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}^1\mathbf{M}_{21} & {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} & {}^3\mathbf{M}_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^3\mathbf{M}_{12} & {}^3\mathbf{M}_{11} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Precisamente esta es la ventaja de usar únicamente coordenadas cartesianas. El punto B es compartido por los eslabones 1 y 2, el punto C es compartido 2 y 3.

Por otra parte la derivada temporal del momento lineal corresponde directamente con la fuerza de sacudimiento \mathbf{f}_{sh} , en este caso puede obtenerse de forma sencilla derivando (3):

$$\mathbf{f}_{sh} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \quad (9)$$

donde:

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{\mathbf{q}}_A^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_B^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_C^T \quad \ddot{\mathbf{q}}_D^T]^T \quad (10)$$

Notando que sólo los puntos B y C tienen movimiento, A y D están fijos, la fuerza de sacudimiento para el cuadrilátero articulado puede calcularse como:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{B} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{12} & \mathbf{0} \\ {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{0} & {}^3\mathbf{M}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_B \\ \dot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} \quad (11)$$

B. Cálculo del Momento de Sacudimiento ("Shaking Moment")

Debido a que el modelo está expresado únicamente en coordenadas Cartesianas, el momento angular puede calcularse directamente mediante la siguiente expresión:

$$h = \mathbf{r}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (12)$$

donde \mathbf{r} es un vector renglón de dimensión $2n$, siendo n el número de puntos básicos en el eslabonamiento, y está formado por una serie de vectores $\tilde{\mathbf{r}}$ que equivalen al producto vectorial: $\tilde{\mathbf{r}} \equiv [-y \quad x]$, en este caso:

$$\mathbf{r} = [\tilde{\mathbf{r}}_A \quad \tilde{\mathbf{r}}_B \quad \tilde{\mathbf{r}}_C \quad \tilde{\mathbf{r}}_D] \quad (13)$$

Así el momento angular puede emplearse para calcular el momento de sacudimiento del sistema, τ_s , derivando (12) con respecto al tiempo:

$$\tau_s = \frac{dh}{dt} = \mathbf{r}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{r}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} \quad (14)$$

en donde:

$$\dot{\mathbf{r}} = [\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_A \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_B \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_D] \quad (15)$$

Considerando que $\mathbf{r}_A = 0$, que $\mathbf{r}_D = (x_D, y_D)$ y que sólo los puntos B y C se mueven, el momento angular total puede calcularse como:

$$\tau_{sh} = [\tilde{\mathbf{r}}_B \quad \tilde{\mathbf{r}}_C \quad \tilde{\mathbf{r}}_D] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \\ \mathbf{0} & {}^3\mathbf{M}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_B \\ \dot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} + [\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_B \quad \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_B \\ \dot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} \quad (16)$$

C. Cálculo del Par Motor

Otro parámetro a controlar es el par motor requerido para mover el sistema, τ_m . Debe calcularse para incluirlo en los criterios de optimización.

Se ha empleado el principio de las potencias virtuales para su cálculo. El par motor puede obtenerse de forma directa como:

$$\omega\tau_m = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} \quad (17)$$

Considerando que los puntos A y D son fijos, el par motor del eslabonamiento puede calcularse como:

$$\omega\tau_m = [\dot{\mathbf{q}}_B^T \quad \dot{\mathbf{q}}_C^T] \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{M}_{22} + {}^2\mathbf{M}_{11} & {}^2\mathbf{M}_{12} \\ {}^2\mathbf{M}_{21} & {}^2\mathbf{M}_{22} + {}^3\mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_B \\ \ddot{\mathbf{q}}_C \end{bmatrix} \quad (18)$$

III. PROCESO DE OPTIMIZACIÓN

Para de minimizar la variación las reacciones dinámicas: fuerza de sacudimiento, momento de sacudimiento y par motor, se agregan contrapesos a cada uno de los eslabones móviles del sistema. Los parámetros de masa de los contrapesos y la localización de sus centros de masa constituyen las variables de optimización y pueden agruparse en un vector:

$$\mathbf{p} = [{}^1\mathbf{c} \quad {}^2\mathbf{c} \quad {}^3\mathbf{c}] \quad (19)$$

donde ${}^i\mathbf{c} = [{}^i m_c \quad {}^i x_c \quad {}^i y_c]$, ${}^i m_c$ corresponde a la masa de cada uno de los contrapesos, $i = \{1,2,3\}$, mientras ${}^i x_c$ y ${}^i y_c$ son las coordenadas del centro de masa de cada contrapeso definidas con respecto al sistema de coordenadas local a cada uno de los eslabones, Fig. 1. Es conveniente notar que el vector de variables a optimizar, \mathbf{p} , tiene únicamente nueve elementos, esto se debe a que el momento de inercia se excluye gracias a que se excluyen coordenadas angulares. Las restricciones impuestas a los contrapesos son las mínimas posibles, siendo menores que las que se proponen en la mayoría de las referencias.

A. Función Objetivo

Para definir la función objetivo se emplean los índices efectivos de balanceo: β_i , que son expresiones adimensionales. Este tipo de expresiones ya han sido usadas previamente en [21], [11] y más recientemente en [20]. Este índice se define como el valor cuadrático medio, “*root mean square*” o rms, de la correspondiente reacción del eslabonamiento modificado con contrapesos, indicado por el superíndice izquierdo ${}^o(\cdot)$, en relación al valor cuadrático medio de la reacción del eslabonamiento original. Por ejemplo, en el caso del momento de sacudimiento este índice es:

$$\beta_{ms} = \frac{\text{rms}({}^o\tau_s)}{\text{rms}(\tau_s)} \quad (20)$$

El objetivo es minimizar β_{fs} , el índice asociado a la fuerza de sacudimiento, así como β_{ms} .

B. Optimización

La optimización se lleva a cabo utilizando un algoritmo Evolución Diferencial [24]. Se creó una población de N individuos, identificando el i -ésimo individuo de la generación con el vector $x_{i,g}$, que se evolucionó varias generaciones. Los individuos se inicializaron siguiendo una distribución uniforme con los límites restringidos por los rangos permitidos para las variables. En cada generación se modificó un individuo a la vez. Para la mutación se seleccionaron tres individuos

aleatoriamente: $x_{r_0,g}$, $x_{r_1,g}$, y $x_{r_2,g}$, para generar un individuo:

$$v_{i,g} = x_{r_0,g} + F * (x_{r_1,g} - x_{r_2,g}) \quad (21)$$

siendo F un número aleatorio entre F_a y F_b . La cruce se realizó entre el individuo $x_{i,g}$ y $v_{i,g}$ para generar a su vez un tercero denominado $u_{i,g}$, formado por elementos de los vectores $v_{i,g}$ o $x_{i,g}$, teniendo en cuenta la probabilidad P_{Cr} . Dada la función de optimización, se seleccionó el mejor individuo entre $x_{i,g}$ y $u_{i,g}$ para ser parte de la siguiente generación. Las generaciones se repitieron hasta que la desviación estándar de las aptitudes de los individuos dividida entre el promedio de las aptitudes de los mismos superó el umbral T . Los valores usados en los parámetros en este trabajo han sido: $F_a = 0.5$, $F_b = 1$, $P_{Cr} = 0.7$, $T = 0.000001$ y $N = 15 \times V$, donde V es el número de variables a optimizar, nueve en este caso. Estos valores, recomendados como adecuados en general para iniciar el proceso de optimización [24], resultaron convenientes para esta aplicación, dado que el número de variables a optimizar no es grande.

La optimización se lleva a cabo considerando la restricción:

$$\beta_{pm} \leq \beta_{pm}^{m\acute{a}x} \quad (22)$$

donde β_{pm} corresponde al índice de balanceo adimensional del par motor, $\beta_{pm}^{m\acute{a}x}$ representa el valor máximo permitido para estos dos índices. Tal como se indica en [20], la ventaja de esta aproximación consiste en que el valor cuadrático medio de la fuerza y momento de sacudimiento pueden minimizarse, controlando de forma directa al mismo tiempo el incremento máximo permitido o la mínima reducción deseada para el valor cuadrático medio del par motor.

Además de la restricción en (19) es necesario agregar algunas otras, correspondientes a los parámetros de cada contrapeso. Se requiere que las masas sean positivas, adicionalmente es necesario poner límites a las coordenadas de los centros de masas, logrando así dimensiones prácticas para los contrapesos:

$$\begin{aligned} & {}^i m_c \geq 0 \\ & {}^i x_c^{m\acute{i}n} \leq {}^i x_c \leq {}^i x_c^{m\acute{a}x} \\ & {}^i y_c^{m\acute{i}n} \leq {}^i y_c \leq {}^i y_c^{m\acute{a}x} \end{aligned} \quad (23)$$

siendo ${}^i m_c$ la masa del i -ésimo contrapeso, que depende su radio ${}^i R_c = [{}^i x_c^2 + {}^i y_c^2]^{1/2}$ y de su espesor ${}^i t_c$, $i = \{1,2,3\}$. Una práctica común en este tipo de problemas es limitar ${}^i R_c$ para que no sea mayor a la longitud del eslabón correspondiente.

La cantidad máxima de masa que puede ser agregada al sistema a través de los contrapesos debe restringirse también. La masa añadida por contrapesos puede expresarse como:

$$m_c = \sum_{i=1}^3 {}^i m_c \leq k m_o \quad (24)$$

donde m_c es la masa total agregada por los contrapesos, m_o la masa total del eslabonamiento original y k es una constante que controla la suma de la masa de los contrapesos. De acuerdo con los resultados obtenidos en trabajos anteriores [2-18, 20-21], así como en este, se ha visto que es posible obtener buenos resultados al permitir que la masa añadida por contrapesos esté entre 1 y 2 veces la masa original.

C. Análisis de Sensibilidad de los Parámetros de Optimización

Para entender el proceso de optimización y establecer los criterios del mismo, se ha realizado un análisis de sensibilidad basado polinomios del caos, ver [22]. Hasta donde se ha podido indagar no se tiene referencia del uso de esta herramienta en este tipo de problemas.

El resultado de aplicar este análisis se presenta en la Fig. 2, donde “ $m_{c,i}$ ” es la masa del contrapeso i , “ $x_{c,i}$ ” es la posición en la dirección “ x ” del contrapeso “ i ” en el sistema de coordenadas local, “ $y_{c,i}$ ” es la posición en la dirección y del contrapeso “ i ” en el sistema de coordenadas local. La barra azul en “ $m_{c,1}$ ” en la Fig. 2, indica que un incremento en la masa del contrapeso agregado al eslabón de entrada (la manivela) tiene gran influencia en la fuerza de sacudimiento. Por otra parte, un incremento en la masa del contrapeso del balancín, “ $m_{c,3}$ ”, y de la posición de su centro de masas en la dirección y , tienen gran influencia en el momento de sacudimiento y del par motor. De esta forma es posible controlar el crecimiento de las reacciones dinámicas principalmente con dos contrapesos. Concuera con los resultados en [2].

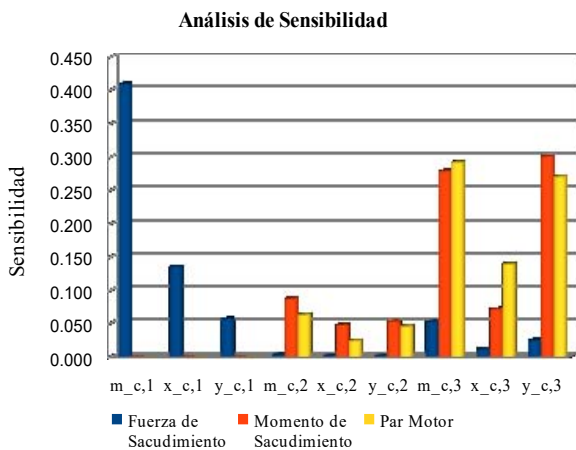


Fig. 2. Resultados del análisis de sensibilidad.

Identificado el número y localización de los contrapesos, se plantean las modificaciones necesarias al mecanismo. Para ejemplificar es común considerar contrapesos con forma de disco, como es el caso en este artículo. En aplicaciones prácticas es necesario verificar la forma del contrapeso más adecuada para poder integrarlo (fijarlo) al diseño ya existente.

Lo ideal es que el mecanismo se diseñe balanceado desde un inicio, esto es, que desde la etapa del diseño se defina la forma idónea de los eslabones para que el mecanismo esté balanceado desde la fabricación, evitando problemas de ensamble y fijación

de contrapesos externos. Las tecnologías de fabricación aditiva pueden ser de especial ayuda.

IV. EJEMPLOS NUMÉRICOS

A. Reducción de la Fuerza de Sacudimiento

El método propuesto ha sido aplicado a un cuadrilátero articulado manivela-balancín, estudiado previamente en [18], [20] y [23], sus parámetros se encuentran definidos en la Tabla I.

TABLA I
PARÁMETROS DEL CUADRILÁTERO
ARTICULADO USADO EN EL EJEMPLO A.

Eslabón	$i=1$	$i=2$	$i=3$
l_1 [m]	0.0508	0.1524	0.0762
m_i [kg]	0.0894	0.2394	0.1215
x_i [m]	0.0254	0.0762	0.0381
y_i [m]	0.0	0.0102	0.0
J_i [kg · m ²]	0.0000198	0.0006792	0.0002198
x_D [m]	0.1397	$\omega_1 = 500$ [rpm], constante.	
y_D [m]	0.0		

Se resuelven el radio iR_c y el espesor ${}^i t_c, i = \{1,3\}$, de los discos unidos a la manivela y al balancín. No se considera contrapeso en el acoplador ya que no es tan determinante (Fig. 2). En este caso:

$${}^iR_c = \sqrt{{}^i x_c^2 + {}^i y_c^2} \tag{25}$$

$${}^i m_c = \pi ({}^i R_c^2) ({}^i t_c) \rho \tag{26}$$

siendo ρ la densidad del material (en este ejemplo es acero con $\rho = 7,833$ [kg/m³]), de modo que el problema de optimización queda expresado en función de un total de 6 parámetros:

$$p = [{}^1 x_c \quad {}^1 y_c \quad {}^1 t_c \quad {}^3 x_c \quad {}^3 y_c \quad {}^3 t_c] \tag{27}$$

En la optimización pueden variar los parámetros en (25), aunque de forma práctica los espesores deben tener una dimensión estándar. De modo que se optimizó la fuerza de sacudimiento manteniendo los espesores con el mismo valor usado en uno de los ejemplos resuelto en [23]: ${}^1 t_c = {}^3 t_c = 1.5875$ [cm], en donde se presenta solución analítica al problema. Se obtuvieron los mismos resultados. El eslabonamiento resultante se representa en la Fig. 3.

Los eslabones originales se muestran en líneas continuas, los contrapesos unidos al mecanismo en el punto A y en el punto D, respectivamente, se muestran en líneas discontinuas, también se muestra su ubicación con respecto a la manivela y al balancín respectivamente. Los resultados numéricos obtenidos se muestran en la Tabla III, columna A.

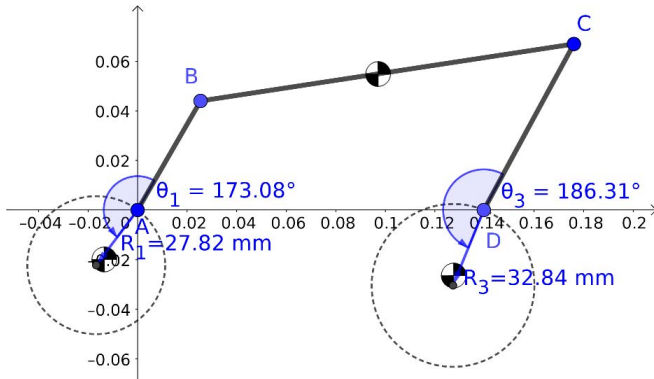


Fig. 3. Mecanismo resultante al optimizar la fuerza de sacudimiento. Los círculos blanco y negro muestran los centros de masa.

Se obtuvo una reducción en la fuerza de sacudimiento (ShF) del 100%, con un aumento de 4.79% en el momento se sacudimiento (ShM) y un aumento del 94.18% en el par motor (DrT). Mientras que la masa aumentó en un 160%.

B. Reducción de la Fuerza y del Momento Sacudimiento, así como del Par Motor

En [20], el balanceo dinámico óptimo del eslabonamiento especificado en el inciso A, ha sido aproximado expresando las reacciones dinámicas: fuerza de sacudimiento, momento de sacudimiento y par motor, como un problema de optimización convexo, facilitando el cálculo numérico haciéndolo más eficiente. Como contrapesos se usan masas puntuales y sus características se usan como base para el diseño de discos equivalentes con espesor constante como contrapesos.

A diferencia, en este trabajo, se han incluido las características de los contrapesos mediante un método directo y libre de simplificaciones, haciendo el cálculo más exacto, aunque a costa de un ligero aumento en el tiempo de cálculo que, para efectos prácticos y de diseño, no es importante.

Las expresiones dinámicas descritas en la sección II se han usado para formular distintas variaciones de la función objetivo para su optimización que puede conducir al mínimo global. Esto ha facilitado los resultados exactos manteniendo completa flexibilidad en la forma de los contrapesos.

En este caso se resolvió una variante del eslabonamiento descrito en el inciso previo, IV.A. De esta forma se usan longitudes exactas de los eslabones, teniendo conocimiento preciso de las masas y de los momentos de inercia extraídos del modelo en CAD. Las características exactas se listan en la Tabla II. Todos los elementos del mecanismo son de acero con densidad $\rho = 7,801 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ y espesor de 5 mm. Se consideraron contrapesos de latón en forma de disco, con densidad $\rho = 8,545 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ con el objetivo de obtener valores más pequeños en los parámetros optimizados.

Se observó que es posible reducir la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento a costa de un aumento en la masa y del par motor. Los mejores resultados se pueden obtener permitiendo que los contrapesos tengan espesores muy grandes en relación a sus longitudes. Se puede lograr una reducción del 70% en la fuerza y el momento de sacudimiento con contrapesos de radio pequeño y espesores cercanos a los 90 cm,

nada útil desde el punto de vista práctico.

TABLA II
PARÁMETROS DEL CUADRILÁTERO
ARTICULADO USADO EN EL EJEMPLO B.

Eslabón	$i=1$	$i=2$	$i=3$
l_i [m]	0.05	0.16	0.08
m_i [kg]	0.02251580	0.22708468	0.03421730
x_i [m]	0.025	0.07	0.04
y_i [m]	0.0	0.015622	0.0
J_i [kg · m ²]	0.00000646	0.00037876	0.00002226
x_D [m]	0.14	$\omega_1 = 500$ [rpm], constante.	
y_D [m]	0.0		

De modo que, con el fin de dar soluciones prácticas desde el punto de vista del diseño, se limitaron los parámetros a optimizar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 -5 \text{ cm} &\leq {}^1x_c \leq 5 \text{ cm} \\
 -5 \text{ cm} &\leq {}^1y_c \leq 5 \text{ cm} \\
 -4 \text{ cm} &\leq {}^1t_c \leq 4 \text{ cm} \\
 -8 \text{ cm} &\leq {}^3x_c \leq 8 \text{ cm} \\
 -8 \text{ cm} &\leq {}^3y_c \leq 8 \text{ cm} \\
 -4 \text{ cm} &\leq {}^3t_c \leq 4 \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Como primer resultado práctico se ha obtenido una reducción del 66% en la fuerza de sacudimiento y una reducción de 60% en el momento de sacudimiento. Estas reducciones son posibles con una masa añadida 175% de la masa original y un aumento en el par motor de 45.37%. Ver la columna B de la Tabla III. En este caso los contrapesos de la manivela y del balancín tienen espesores de ~1.06 y 4.0 cm respectivamente.

TABLA III
RESULTADOS DE LA OPTIMIZACIÓN PARA
DISTINTOS ESCENARIOS

	A	B	C
1x_c [mm]	-27.62	-29.494	-33.10
1y_c [mm]	3.35	-2.335	-1.985
1t_c [mm]	15.875	10.614	7.913
3x_c [mm]	-32.64	-20.449	-23.657
3y_c [mm]	-3.61	7.072	10.0
3t_c [mm]	15.875	40.0	22.0
ShF (%)	-100	-66	-63
ShM (%)	4.79	-60	-57
DrT (%)	94.18	45.37	49.607
Masa Añadida (%)	160	175	145

Un mejor resultado, desde el punto de vista de la masa añadida, se obtiene si se reduce la fuerza de sacudimiento en 63% y el momento de sacudimiento en 57%. De este modo la masa se incrementa en un 145% y el par motor aumenta en 49.61%. En este caso los contrapesos de la manivela y del balancín tienen espesores de ~0.8 y 2.0 cm respectivamente. Los resultados completos de detallan en la columna C de la Tabla III.

Para validar los resultados obtenidos en la optimización, se

elaboró un modelo del eslabonamiento en un software comercial para la simulación dinámica de sistemas mecánicos (MSC-ADAMS). Los resultados de la simulación dinámica para el caso C en la Tabla III se presentan en las Figs. 4, 5, 6 y 7. Se comparan la fuerza y el momento de sacudimiento, así como el par motor.

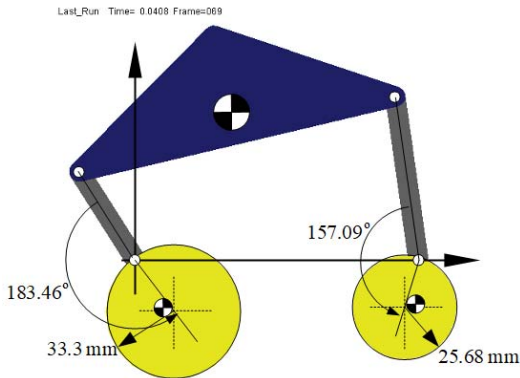


Fig. 4. Eslabonamiento descrito en el inciso IV.B optimizado, resultados de la columna C en la Tabla III, simulado dinámicamente con MSC-ADAMS.

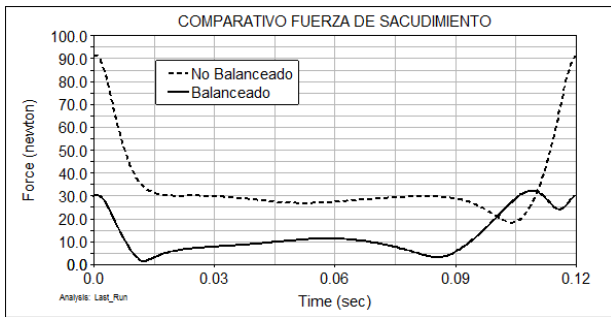


Fig. 5. Comparación de las fuerzas de sacudimiento.

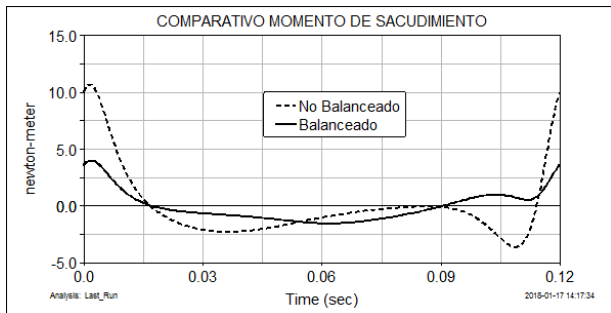


Fig. 6. Comparación de los momentos de sacudimiento.

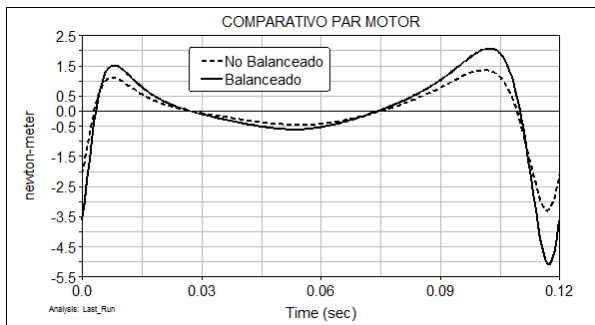


Fig. 7. Comparación de los pares motores.

V. CONCLUSIONES

Se presenta un método alternativo para el balanceo dinámico óptimo de un mecanismo de cuatro barras manivela-balancín. Se usa “Differential Evolution” para la optimización. Las variables usadas en la optimización son menos restrictivas que lo usado previamente en otros trabajos, obteniendo mínimos globales sin la necesidad de reformular el problema como un programa convexo. Como novedad se presenta la forma de calcular la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento sin necesidad de usar las relaciones cinemáticas, que quedan implícitas en la definición de la matriz de masas del sistema. Adicionalmente la matriz de masas se aprovecha para calcular el par motor sin necesidad de realizar la tradicional inversión de la matriz Jacobiana asociada con un problema general de dinámica inversa. Queda abierta la posibilidad de llevar este método a eslabonamientos más complejos, incluyendo aquellos definidos en el espacio tridimensional.

REFERENCIAS

- [1] D. Zahng and B. Wei, “Dynamic Balancing of Mechanisms and Synthesizing of Parallel Robots,” Springer International Publishing, 2016.
- [2] R. S. Berkof and G. G. Lowen, “A New Method for Completely Force Balancing Simple Linkages,” *J. Eng. Ind.*, vol. 91, no. 1, p. 21, 1969.
- [3] R. S. Berkof, “Complete force and moment balancing of inline four-bar linkages,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 8, no. 3, pp. 397–410, 1973.
- [4] J. L. Wiederrich and B. Roth, “Momentum Balancing of Four-Bar Linkages,” *J. Eng. Ind. - Trans. ASME*, vol. 98, no. 4, pp. 1289–1295, 1976.
- [5] G. G. Lowen, F. R. Tepper, and R. S. Berkof, “Balancing of linkages-an update,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 213–220, 1983.
- [6] V. H. Arakelian and M. R. Smith, “Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Mechanisms: A Historical Review With New Examples,” *J. Mech. Des.*, vol. 127, no. 2, p. 334, 2005.
- [7] V. H. Arakelian and M. R. Smith, “Erratum: ‘Shaking Force and Shaking Moment Balancing of Mechanisms: A Historical Review With New Examples’ [Journal of Mechanical Design, 2005, 127(2), pp. 334–339],” *J. Mech. Des.*, vol. 127, no. 5, p. 1034, 2005.
- [8] V. Arakelian and S. Briot, *Balancing of Linkages and Robot Manipulators*, vol. 27. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [9] R. S. Berkof and G. G. Lowen, “Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages,” *J. Eng. Ind.*, vol. 93, no. 1, p. 53, 1971.
- [10] G. G. Lowen and R. S. Berkof, “Determination of Force-Balanced Four-Bar Linkages With Optimum Shaking Moment Characteristics,” *J. Eng. Ind.*, vol. 93, no. 1, p. 39, 1971.
- [11] F. R. Tepper and G. G. Lowen, “Shaking Force Optimization of Four-Bar Linkage With Adjustable Constraints on Ground Bearing Forces,” *J. Eng. Ind. - Trans. ASME*, vol. 97, no. 2, pp. 643–651, 1975.
- [12] R.S. Haines. “Minimum rms shaking moment or driving torque of a force-balanced 4-bar linkage using feasible counterweights,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 16, no. 3, pp. 185–195, 1981.
- [13] T. W. Lee and C. Cheng, “Optimum Balancing of Combined Shaking Force, Shaking Moment, and Torque Fluctuations in

- High-Speed Linkages,” *J. Mech. Transm. Autom. Des.*, vol. 106, no. 2, p. 242, 1984.
- [14] N.M. Qi and E. Pennestri. “Optimum balancing of four-bar linkages,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 26, no. 3, pp: 337–348, 1991.
- [15] T. W. Lee and F. Freudenstein. Heuristic combinatorial optimization in the kinematic design of mechanisms, part 1: Theory,” *ASME J. Manuf. Sci. Eng.*, vol. 98, no. 4, pp. 1277–1280, 1976.
- [16] H. Chaudhary and S.K. Saha. “Balancing of four-bar linkages using maximum recursivedynamic algorithm,”. *Mech. Mach. Theory*, vol. 42, no. 2, pp. 216–232, 2007.
- [17] S. Briot and V. Arakelian. “Complete shaking force and shaking moment balancing of in-line four-bar linkages by adding a class-two RRR or RRP Assur group”. *Mech. Mach. Theory*, vol. 57, pp. 13–26, 2012.
- [18] S. Erkaya. “Investigation of balancing problem for a planar mechanism using genetic algorithm,”. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 27, no. 7, pp. 2153–2160, 2013.
- [19] J. García de Jalón and E. Bayo. “Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge,”. Springer, 1994.
- [20] B. Demeulenaere, E. Aertbeliën, M. Verschuure, J. Swevers, and J. De Schutter. “Ultimate limits for counterweight balancing of crank-rocker four-bar linkages,”. *ASME J. Mech. Des.*, vol. 128, no. 6, pp. 1272–1284, 2006.
- [21] G. G. Lowen, F. R. Tepper, and R. S. Berkof. “The quantitative influence of complete force balancing on the forces and moments of certain families of four-bar linkages,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 9, pp: 299–1323, 1974.
- [22] E. Haro, F. Anstett-Collin, and M. Basset. “Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos,”. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 104, pp:15–26, 2012.
- [23] S. J. Tricamo and G. G. Lowen. “A novel method for prescribing the maximum shaking force of a four-bar linkage with flexibility in counterweight design,”. *ASME J. Mech. Des.*, vol. 105, no. 3, pp: 511–519, 1983.
- [24] R. Storn and K. Price, “Differential Evolution - a Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces,” *Journal of Global Optimization*, vol. 11, pp. 341–359, 1997.
- [25] M. Acevedo. “An Efficient Method to Find the Dynamic Balancing Conditions of Mechanisms: Planar Systems,” *ASME 2015 IDETC*, vol. 5B: 39th Mechanisms and Robotics Conference. Boston, Massachusetts, USA, August 2–5, 2015.
- [26] J. Almanza Malagoli, J.R. Camacho, M. Valencia Ferreira da Luz, J. H. I. Ferreira, and A. M. Sobrinho. “Design of Three-Phase Induction Machine Using Differential Evolution Algorithm”. *IEEE Latin America Transactions*, vol. 13, no. 7, 2015.
- [27] G. H. Negri, M. Santos Matos Cavalca, and R. Stubs Parpinelli. “Model-Based Predictive Control Using Differential Evolution Applied to a Pressure System”, *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 1, 2016.
- [28] J. J. Guedes, M. F. Castoldi, and A. Goedel. “Temperature influence analysis on parameter estimation of induction motors using differential evolution”. *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 9, 2016.
- [29] E. A. Portilla Flores, M. B. Calva Yanez, M. G. Villareal Cervantes, P. A. Nino Cervantes, and G. Sepulveda Cervantes. “An Optimum Synthesis of a Planar Mechanism Using a Dynamic-based Approach”. *IEEE Latin America Transactions*, vol. 13, no. 5, 2015.



Mario Acevedo received the PhD in Mechanical Engineering from Universidad de Navarra – San Sebastian (Spain) in 1996. Since 1996, he is an Associate Professor at Universidad Panamericana, Guadalajara, and currently serves as Secretary for Research of the Faculty of Engineering. He is member of the Mexican National Systems of Researchers (SNI) and Chair of Member Organization (Mexico) for the International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science (IFTOMM). His current research interests are Multibody System Dynamics Applications, and Mechanism and Machine Theory.



María Teresa Orvañanos is an Electronics and Digital Systems Engineer with major in Robotics. She obtained her MsC in Engineering and is PhD Candidate from Universidad Panamericana, Aguascalientes. Currently she is Associate Professor and Head of the Electronics and Digital Systems program in the Faculty of Engineering of Universidad Panamericana. Her current research interests are mechatronic systems, dynamics and control.



Ramiro Velázquez received the PhD in Robotics from Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (France) in 2006. Since 2006, he is an Associate Professor at Universidad Panamericana Aguascalientes. He is past Dean of the Faculty of Engineering and currently serves as Vice-President for Research. He is considered an expert evaluator for the European Commission, CONACYT (Mexico), and COLCIENCIAS (Colombia). He is a member of the Mexican National Systems of Researchers (SNI). His current research interests are assistive technologies and mechatronic systems.



Eduardo Haro received the Engineering degree in Electronics from ITESM (Mexico) in 1992, the MSc degree in Electrical Engineering from INPG (France) in 2001, and the PhD in Control Systems from Université de Haute-Alsace (France) in 2006. Since 2006, he is Associate Professor at the Faculty of Engineering, Universidad Panamericana, Guadalajara. He is a member of the Mexican National Systems of Researchers (SNI). His current research interests are: parameter sensitivity and mechatronic systems.