

# Vehicle Following problem: A Control Approach for Uncertain Systems with Lossy Networks

L. de P. Carvalho, J. M. Palma, A. P. C. Gonçalves and C. Duran Faundez

**Abstract**— In the present work, a control system based in Networked Control Systems is proposed, in order to provide a suitable solution to the vehicle following problem. This problem presents the two main obstacles: the first been the difficulty in the identification process (leading to uncertain numerical models) and the second one is the data communication is inevitably made via a lossy network. An appropriate solution that deals with both characteristics is proposed a static output feedback controller design. Regarding the lossy network problem the Markovian Jump Linear System framework is used to model the controller considering the network behavior, with respect to the uncertainties the system is model in a polytopic manner, and the controller design uses a polynomial Lyapunov equation with an arbitrary degree to solve the optimization problem in Linear Matrix Inequalities form. To analyze the control system performance the Hoo norm is used. At the end of the paper, a numerical example is presented with the intention to illustrate the suitability of the proposed solution.

**Keywords**— Counting of Bacterial Colony, image processing, free software.

## I. INTRODUÇÃO

As etapas de identificação e modelagem de um sistema são procedimentos críticos que influenciam o desempenho de um sistema de controle. Para garantir o desempenho desejado, esses procedimentos devem alcançar resultados o mais próximo possível do sistema real [1]. No entanto, em alguns sistemas o processo de identificação pode ser uma tarefa complexa ou apresentar problemas práticos. De fato, a observação dos estados do sistema pode exigir um sistema de sensores precisos ou de elevado custo [1].

Além disso, em alguns casos de aplicações de veículos autônomos, o uso de sensores apropriados é de difícil instalação ou nem mesmo possível devido às características físicas do sistema [2]. Por exemplo, ao usar drones, o uso de certos sensores é restrito devido à quantidade limitada de peso que estes veículos podem transportar. Outros problemas são derivados da dinâmicas não-lineares que são desconsideradas

durante o processo de linearização, fazendo com que o modelo não apresente o exatamente o mesmo comportamento da planta real [3].

Normalmente, a solução usual na literatura é a utilização de sistemas linearizados em seu ponto nominal de trabalho, entretanto, nessa suposição o comportamento do sistema nos demais pontos de operação são desconsiderados, o que ocasiona na perda da garantia de desempenho e estabilidade. Outra hipótese, abordagem estudada neste trabalho, é gerar um projeto de controle que contemple todos os pontos de operação da planta. Controladores com essas características podem ser obtidos utilizando sistemas politopicos. Entretanto, dependendo do grau de incertezas do sistema a área de factibilidade do problema de otimização é reduzida.

Considerando a aplicação do problema de fila de veículos autônomos, a comunicação entre os veículos é necessariamente feita por redes sem fio. Por esse motivo considerar as falhas inerentes à esse tipo de canal é de extrema importância na síntese de soluções de controle para essa classe de problemas.

De fato, mesmo se todos os esforços necessários para alcançar uma boa identificação e modelagem forem feitos, se a comunicação entre os componentes do sistema de controle não for confiável, os critérios de desempenho serão diferentes dos valores de desempenho projetados ou até mesmo a estabilidade do sistema pode eventualmente ser comprometida. Para o problema de filas de veículos a perda de estabilidade pode causar desde uma queda no desempenho ou em casos extremos causar acidentes, colocando em riscos pessoas e os veículos.

Na literatura um problema de controle muito discutido é o seguimento de carro, dado o grande interesse em veículos autônomos. Existem diferente maneiras de lidar com as dificuldades descritas, dentre elas temos incluindo a aplicação de algoritmos de visão computacional [2], adicionando algumas restrições e aplicando o design de sistemas de controle clássico [4], ou aplicando modelos simplificados e aplicando um controle robusto [5]. Dentre os modelos dinâmicos propostos na literatura, o modelo bicicleta é um dos mais utilizados, principalmente, pelo fato de descrever de maneira satisfatória as forças laterais que atuam no veículo, [6]–[8]. No entanto, devido à complexidade do sistema real, os modelos linearizados adotados apresentam muitas restrições (como considerar os valores de rigidez nas curvas de ambos os eixos e a velocidade em um dos eixos como uma constante), diminuindo muito sua veracidade e usabilidade. Além disso, quando a dificuldade aumenta devido à necessidade de controlar uma cadeia de vários carros autônomos seguindo o veículo líder, usando informações compartilhadas através de links sem fio ideais, técnicas mais robustas e eficientes são necessárias.

Neste trabalho, uma abordagem para lidar com questões incertezas do modelo (causado por imperfeições na

<sup>1</sup>Esse trabalho foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Conselho Nacional de Desenvolvimento

L. de P. Carvalho, Laboratório de Automação e Controle, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo (USP), Brasil. carvalho.lp@usp.br .

J.M. Palma, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas, SP, Brasil and Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile, jpalmao@dt.fee.unicamp.br

A. P. C. Gonçalves, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade de Campinas (UNICAMP), Brasil. alimped@dca.fee.unicamp.br

C. Duran Faundez, Universidad del Bío-Bío, Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Concepción, Bío-Bío, Chile. crduran@ubiobio.cl

Corresponding author: L. D. P. Carvalho

identificação ou premissa do próprio modelo matemático) e também para lidar com o problema da perda de pacotes inerente a comunicação sem fio entre carros. Executamos essas tarefas associando a teoria do Sistema de Controle em Rede (NCS) e a utilização de Equações de Lyapunov polinomiais com grau arbitrário.

Em [9], versão prévia deste artigo, teve como abordagem para solução do problema de fila de carros a utilização de filtros observador acoplado a um controlador de saída, ambos projetados a partir de sistemas politopicos discretizados utilizando métodos de aproximação por séries de Taylor. As principais contribuições dessa nova versão do trabalho são:

- a utilização de controlador estático de saída do termo em inglês Static Output Feedback (SOF) [10] que fornece a priori garantias de estabilidade e desempenho para todo o domínio incerto do sistema. Diferentemente da versão prévia deste trabalho, na qual a estabilidade e desempenho do projeto são calculados a posteriori. Essa característica faz com que a abordagem apresentada em [9] não garanta a estabilidade para todos os pontos de operação do sistema que pertencem ao domínio incerto.
- outro diferencial é que no projeto de controle da versão anterior para a síntese dos controladores foram empregadas estruturas baseadas em estabilidade quadrática (equivalente a utilização de polinômios de grau zero variáveis de otimização) gerando soluções conservadoras. No presente trabalho são utilizadas polinômios de grau arbitrário, onde essas variáveis de otimização gerando soluções menos conservadoras e aproveitando do processo de discretização do sistema utilizado em [11], gerando um sistemas discreto equivalente ao polinomial.

A síntese desse controlador estático de saída é executada através de condições no formato de desigualdade lineares matriciais, do termo em inglês Linear Matrix Inequalities. Para o sistema incerto é apresentado como um problema de dimensão infinita, sendo este, programado empregando o software rolmip [12]. E com a intenção de ilustrar a usabilidade da abordagem proposta apresentamos um conjunto de simulações que utilizam modelos numéricos extraídos de uma planta real [13].

O restante deste artigo é organizado da seguinte forma: seção II apresenta os conceitos básicos necessários para entender a abordagens apresentadas neste artigo, a seção III apresenta o problema de seguimento de veículo e modelos para o comportamento do veículo e da rede, IV apresenta os parâmetros utilizados na simulação, a seção V apresenta o tipo de simulações, testes e também os resultados obtidos com esses testes e a última seção VI uma breve conclusão é feita.

## II. PRELIMINARES

**Notação:** O conjunto de números naturais é representado por  $\mathbb{N}$ , o espaço Euclidiano de dimensão  $n$  é simbolizado por  $\mathbb{R}^n$  e tem a norma representada por  $\|\bullet\|$ . O espaço de probabilidade fundamental é descrito por  $(\omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_k, \Gamma)$ . O conjunto finito de modos,  $\sigma$ , de operação da cadeia de Markov é representada por  $\mathbb{K} = 1, \dots, \sigma$ , a esperança matemática é dada por  $\mathbb{E}[\bullet]$ . O símbolo  $\text{tr}$  indica a transposição de matriz ou vetor. O

operador  $(\bullet)^{-1}$  e  $(\bullet)^{-T}$ , indica, respectivamente, a inversa e a inversa transposta de uma matriz. As matrizes incertas podem ser escritas como uma combinação convexa com um número conhecido  $N$  de vértices, segundo [14].

$$R(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i, \alpha \in \Lambda_N,$$

Onde  $R_i$  representa os vértices do politopo  $R(\alpha)$  e  $\alpha$  é um parâmetro invariante no tempo que pertence ao conjunto de simplex unitário  $\Lambda_N$  descrito como,

$$\Lambda_N = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

### A. Sistemas lineares sujeitos a saltos Markovianos

Considerando que  $\mathcal{G}$  é MJLS (do inglês Markovian Jump Linear Systems) no domínio do tempo discreto, pertencente ao espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, \Gamma)$ , onde esse sistema pode ser descrito da seguinte forma,

$$\mathcal{G} \triangleq \begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)_{\theta_k} x(k) + B(\alpha)_{\theta_k} u(k) + E(\alpha)_{\theta_k} w(k) \\ y(k) = C_y(\alpha)_{\theta_k} x(k), \\ z(k) = C_z(\alpha)_{\theta_k} x(k) + D_z(\alpha)_{\theta_k} u(k) + E_z(\alpha)_{\theta_k} w(k), \end{cases} \quad (1)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$  representa o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$  descreve o sinal de controle e  $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada exógena. O vetor  $z(k) \in \mathbb{R}^{n_z}$  representa o saída a ser controlada, e  $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$  representa o vetor de sinais das medidas. As matrizes do sistema (1) dependem de uma cadeia de Markov. Os valores dos modos dessa cadeia de Markov estão inclusos no conjunto  $\mathbb{K}$  e estão associados a matriz de transição  $\Omega \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Os elementos da matriz de transição  $\Omega$  são descritos da seguinte forma,

$$\rho_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i).$$

Esses termos de  $\Omega$  satisfazem as seguintes restrições:

$$\rho_{ij} \geq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^N \rho_{ij} = 1 \forall i \in \mathbb{K}.$$

Para simplificar a notação, daqui em diante, quando o termo  $\theta_k = i$ , como por exemplo,  $A(\alpha)_{\theta_k} = A(\alpha)_i$  para todo o valor de  $\mathbb{K}$ .

O controlador tem uma estrutura de realimentação estática de saída sujeita a saltos Markvianos. Onde o sinal de controle é dado por  $u(k) = L_i y(k)$ , que representa um controle robusto, independente do valor de  $\alpha$  do sistema (1). O sistema em malha fechada corresponde a

$$\mathcal{G}_L \triangleq \begin{cases} x(k+1) = (A(\alpha)_i x(k) + B(\alpha)_i L_i C_y(\alpha)_i) x(k) + E(\alpha)_i w(k) \\ z(k) = (C_z(\alpha)_i + D_z(\alpha)_i L_i C_y(\alpha)_i) x(k) + E_z(\alpha)_i w(k) \end{cases}$$

A lei de controle tem como objetivo estabilizar o sistema em malha fechada (4), além de isso, podemos otimizar algum critério de desempenho em relação ao sinal de saída,  $z(k)$ , do sistema. Na literatura, um dos critérios mais utilizados para essa finalidade é a norma  $H_\infty$ , principalmente, pela interpretação física da mesma, [15].

**Cr terio de desempenho  $H_\infty$ :** O ganho de realimenta o  $L_i$  pode ser projetado para estabilizar o sistemas (3) e otimizar o desempenho do mesmo. Antes de descrever a síntese do controlador  $H_\infty$ , primeiramente, temos que apresentar o conceito de estabilidade para sistemas MJLS.

*Defini o:* O sistema (3)   dito MSS se para qualquer condi o inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ , distribui o inicial  $\theta(0) \in \mathbb{K}$  se respeitar a igualdade a seguir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon \{x(k)'x(k) | x_0, \theta_0\} = 0.$$

Conceito apresentado em [16]. Assumindo que o sistema (3)   MSS, a norma  $H_\infty$    dada por

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 = \sup_{w \in \mathcal{L}_2, \theta_0 \in \mathbb{K}} \frac{\|z(k)\|_2^2}{\|w(k)\|_2^2},$$

onde  $w(k)$  representa as entradas do sistema e  $z(k)$  representa as saídas. Note que, para  $\mathbb{K} = 1$ , isto  , existe somente um único modo da cadeia de Markov, essa defini o retorna a defini o da norma  $H_\infty$  para o caso determinístico.

### B. Síntese do controlador est tico de saída

O problema de realimenta o est tica de saída (4) não   convexo, dado que são existem condi es necessárias baseadas em transformadas de similaridade do sistema (3) baseado em dois estados [10], sendo desigualdade de matriz bilinear do termo em inglês Bilinear Matrix Inequality(BMI) Em [10]   apresentado o controlador est tico de saída em dimensão finita (forma programáveis) no qual   adaptada a dimensão infinita segundo o Teorema,

*Teorema 1:* Existe um controlador est tico de saída dado um ganho  $K_i$  que estabiliza  $(A_i + B_i K_i)$ , dependente de modos, da forma  $u(k) = L_i x(k)$  tal que  $\|G_o\|_2^2 < \gamma$  se existem matrizes simétricas  $P_i$  e as matriz  $G_i, H_i, R_i$  e  $F_i$  de dimensão compatíveis tais que as seguintes inequa es matriciais lineares (LMIs, do inglês, linear matrix inequalities) são satisfeitas  $\forall i \in \mathbb{K}$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Theta_{12} & P_{pi} - G_i - G_i' & \bullet & \bullet & \bullet \\ \Theta_{13} & B_i' G_i' & -G_i - G_i' & \bullet & \bullet \\ \Theta_{14} & 0 & D_{zi} & -I & \bullet \\ J_i' F_i' & J_i' G_i' & 0 & E_{zi} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0,$$

Em que

$$P_{pi} = \sum_{j \in \mathbb{K}} p_{ij} P_j$$

$$\Theta_{11} = -P_i + (A_i + B_i K_i)' F_i' + F_i (A_i + B_i K_i)$$

$$\Theta_{12} = -F_i + G_i (A_i + B_i K_i)$$

$$\Theta_{13} = B_i' F_i' + R_i C_{yi} - H_i K_i$$

$$\Theta_{14} = C_{zi} + D_{zi} K_i$$

Onde, a lei de controle de modo dependente do controlador de realimenta o de saída   dado por

$$u(k) = L_i y(k) = H_i^{-1} R_i y(k).$$

E ainda,  $\delta$    o custo garantido da norma  $H_\infty$  para o sistema em malha fechada. A prova pode ser encontrada em [10].

O Teorema 1 pode ser adaptado para prover um ganho  $L$  independente do modo, simplesmente, substituindo  $H_i$  e  $R_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , pelas matrizes  $Y$  e  $R$ . Como dito em [10], o Teorema 1 utiliza parâmetros polinomiais nas matrizes de Lyapunov, essa característica tr s consigo a redu o do conservadorismo na síntese dos ganhos dos controladores. Note que o ganho  $K_i$    uma dado de entrada para o Teorema 1, no qual pode ser obtido por qualquer método são tem que garantir que  $(A(\alpha)_i + B(\alpha)_i K_i)$  seja MSS.

### C. Procedimento para discretizar um sistema politopico

O processo de discretiza o para sistemas lineares   um procedimento comum e existem algumas técnicas para executar essa tarefa, como o segurador de ordem zero *Zero-Order-Holder* (ZOH). Entretanto, o processo de discretiza o para sistemas politopicos   uma tarefa desafiadora. Isso ocorre porque o politopo obtido discretizando todas as matrizes que constituem um sistema politopico   diferente de discretizar somente os v rtices do sistema politopico contínuo e reconstruir o politopo através de somas convexas.

Portanto, os procedimentos comumente utilizados com ZOH são inapropriados para esse tipo de tarefa. Existem algumas propostas na literatura para solucionar esse problema como, [17], [18], esses procedimentos são solu es numéricas ou solu es de exponenciais de matrizes expandidas em séries de Taylor com um número finito de termos. A soluço utilizada neste trabalho   extraída de [11], que   baseado em expansões de série de Taylor mas, utiliza valores variados números de termos na série, representado por  $l$ . Essa particularidade   essencial para a desempenho do controlador, dado que alguns sistemas necessitam de um grande número de termos para alcançar um nível aceitável de precisão, sendo o problema de seguimento de carros   um desses casos. Considerando o sistema politopico no domínio do tempo contínuo,

$$\dot{x}(t) = A_{cont}(\alpha)x(t) + B_{cont}(\alpha)u(t),$$

o sistema politopico no domínio do tempo discreto equivalente  ,

$$x(k+1) = A_{disc}(\alpha)x(k) + B_{disc}(\alpha)u(k),$$

  possível escrever as matrizes discretas como,

$$A(\alpha) = A_l(\alpha) + \Delta A_l(\alpha)$$

$$B(\alpha) = B_l(\alpha) + \Delta B_l(\alpha)$$

onde  $A_l(\alpha), B_l(\alpha)$  são expansões de série de Taylor e  $\Delta A_l(\alpha), \Delta B_l(\alpha)$  são os resíduos dessas séries. As matrizes  $A_l(\alpha), B_l(\alpha), \Delta A_l(\alpha)$  e  $\Delta B_l(\alpha)$  são obtidas da seguinte forma

$$A_l(\alpha) = \sum_{j=0}^l \frac{A_{cont}(\alpha)^j}{j!} T^j,$$

$$B_l(\alpha) = \sum_{j=1}^l \frac{A_{cont}(\alpha)^{j-1}}{j!} T^j B_{cont}(\alpha)$$

$$\Delta A_l(\alpha) = e^{A_{cont}(\alpha)T} - A_l(\alpha),$$

$$\Delta B_l(\alpha) = \left( \int_0^T e^{A_{cont}(\alpha)s} ds \right) B_{cont}(\alpha) - B_l(\alpha),$$

onde  $l \in \mathbb{N}$    o número de termos da expansão em série de Taylor e  $T > 0$  [s]   o tempo de amostragem. O resíduo   uma medida importante porque a garantia de desempenho do controlador está atrelado a ele. Depois de efetuar a expansão

em série de Taylor as matrizes polinomiais devem ser homogeneizadas, para mais detalhes consulte [11].

Para garantir o desempenho do sistema de controle, é necessário limitar a norma do sistema. Para efetuar esse procedimento uma opção é utilizar o teorema do pequeno ganho, [19]. É importante ressaltar que a medida que o número de termos da série aumenta o valor da norma do resíduo diminui, portanto, se o número de termos  $l$  não for suficiente o teorema do pequeno ganho não será satisfeito, fazendo com que o controlador não garanta o desempenho ou estabilidade. E por essa razão é a escolha do procedimento de [11], que permite a variação do número de termos da expansão em série de Taylor para garantir que o teorema do pequeno ganho seja satisfeito.

### III. PROBLEMA DE SEGUIMENTO DE CARROS

Nessa seção é apresentado: os modelos da cinemática do carro, do sistema dinâmico, da rede sujeita a falha e por fim o modelo que descreve a dinâmica completa do sistema.

#### A. Modelo do carro

O modelo utilizado para as simulações é conhecido na literatura com modelo bicicleta apresentado na Fig. (1). O sistema linearizado na forma de espaço de estados é dado pela Eq. (15),

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(c_r+c_f)}{mv_x} & \frac{(l_r c_r + L_f c_f)}{mv_x} - v_x \\ \frac{(l_r c_r - l_f c_f)}{J_v v_x} & -\frac{l_r^2 c_r + l_f^2 c_f}{J_v v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{l_f c_f} \\ \frac{c_f}{m} \end{bmatrix} \delta$$

em que  $J_v$  representa o momento de inércia do carro,  $l_f$  indica a distância entre o centro de gravidade e o eixo frontal,  $l_r$  é a distância entre o eixo traseiro e o centro de gravidade,  $c_f$  representa o parâmetro de rigidez de curva para as rodas dianteiras,  $c_r$  representa o parâmetro de rigidez de curva para as rodas traseiras,  $m$  representa a massa do carro,  $v_x$  é a componente da velocidade no eixo  $x$ ,  $v_y$  é a componente da velocidade no eixo  $y$ ,  $\delta$  é o ângulo de esterçamento das rodas dianteiras,  $r$  é o momento angular para o eixo de tombamento e  $L$  é a distância entre os eixos. A descrição completa de como esse modelo foi concebido pode ser encontrada em [7], [20].

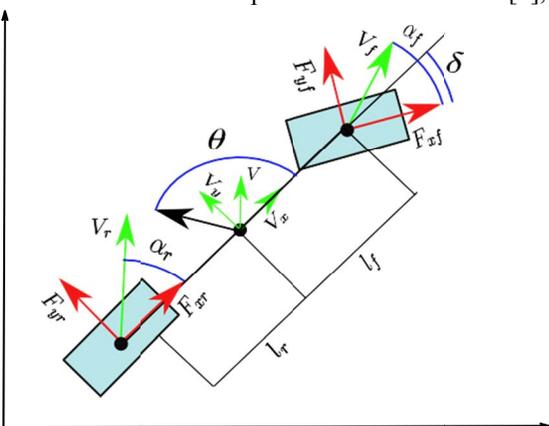


Figura 1: Modelo Bicicleta

#### B. Modelagem de seguimento de Carros

Considere uma fila de carros seguindo um carro líder, o caminho que o primeiro carro percorre é determinístico e todos os demais carros não possuem piloto. Todos os carros mantêm uma velocidade constante no eixo  $x$ . O carro líder é controlado por um motorista ou possui um trajeto predeterminado e os outros carros são autônomos. Os carros se comunicam em cadeia, isto é, o primeiro carro se comunica com o segundo e o segundo com o terceiro e assim sucessivamente. Todos os carros têm acesso a seus próprios estados e recebem os sinais referentes aos estados do carro a frente via rede de comunicação sem fio. Uma representação gráfica do problema é mostrada na Fig. 2.

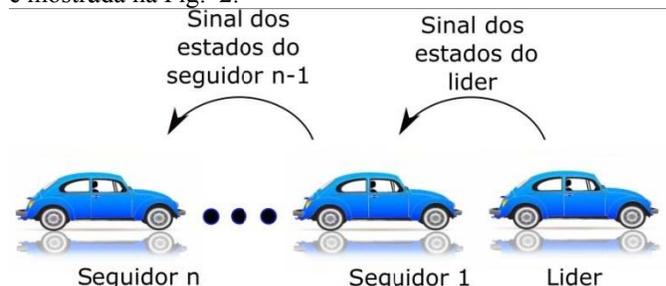


Figura 2: Modelo do problema de seguimento de carros.

#### C. Modelagem da Rede de comunicação

Com as informações da descrição do problema de seguimento de carros podemos considerar que o esquema de comunicação mais apropriado para essa situação é o modelo *End-to-End*. Consideramos que a comunicação entre os carros é uma comunicação *semi-confiável*, isto é, é sujeita a perda de informação. A informação transmitida de um carro para o outro é referente às medições dos sensores dos carros imediatamente a frente. Em relação aos sinais de controle, esses sinais são transmitidos aos atuadores através de uma rede cabeada considerada confiável. Na Fig. 3 mostra o esquema de comunicação do problema.

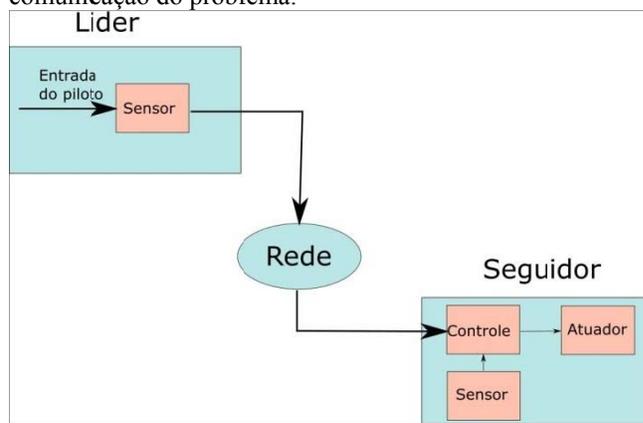


Figura 3: Descrição gráfica do modelo de comunicação.

Outro importante aspecto da rede que devemos levar em consideração é a presença de falhas em rajada. Apesar que muitos trabalhos modelam o comportamento da rede como um processo Bernoulli [21], [22], esse processo não considera o comportamento de falha em rajada. Com a intenção de considerar essa importante característica um modelo mais apropriado é o modelo Gilbert [23], composto por dois modos de cadeia de Markov. Onde o primeiro representa a comunicação nominal e o segundo modo representa a falha na

comunicação. A matriz de probabilidade de transição  $P$  para esse modelo é dada por,

$$\Omega = \begin{bmatrix} P_{cc} & 1 - P_{cc} \\ 1 - P_{ff} & P_{ff} \end{bmatrix}$$

#### D. Modelo em espaço de estado

Dada as considerações feitas podemos descrever o sistema em espaço de estado, lembrando que o sistema de um único carro na forma de espaço de estado é dada pela equação (15). Vamos definir a matriz  $\Delta_i$  como a responsável pela modelagem da falha de comunicação, tendo dois modos, o primeiro é referente ao modo nominal do sistema, onde todas as informações são transmitidas de forma adequada. Já o segundo modo representa o caso onde a comunicação não é falha, isto é, o pacote de informação não chega ao destino. A estrutura de  $\Delta_i$  é dada por:

$$\Delta_i : \begin{cases} \Delta_1 = \begin{bmatrix} I^{(2)} & 0 \\ 0 & I^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ modo de sucesso,} \\ \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ modo de falha.} \end{cases}$$

Para garantir que exista o seguimento de carros, é de suma importância que o segundo carro faça os mesmos movimento do primeiro carro. Esse comportamento é alcançado minimizando a diferença entre todos os estados do primeiro e segundo carro. Essa minimização é feita tendo em mente a função objetivo do problema de otimização da norma  $H_\infty$  (6), com isso definimos a  $C_z$  como a diferença dos estados dos dois carros e  $D_z$  como um pequeno ruído aditivo.

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix} u_2(k) + \dots \\ \dots \begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_i B_d & 0 & 0 \end{bmatrix} w(k), \\ z(k) = \begin{bmatrix} I^2 & -I^2 \\ 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 2} \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_u \end{bmatrix}' u_2(k) \\ y(k) = \Delta_i \bar{x}(k) \end{cases}$$

onde  $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^{2n}$  é os estado aumentado  $\bar{x}(k) = [v_{y1}(k) \ r_1(k) \ v_{y2}(k) \ r_2(k)]$ ,  $u_2(k) \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$  e é composto por  $u^2(k) = [0 \ \delta_2(k)]'$  representando o sinal de controle onde somente o segundo carro possui sinal de controle, e por último,  $\bar{w} = [\delta_1(k) \ d_2(k) \ \eta_1(k)' \ \eta_2(k)']'$  que representa o sinal e ruído no sistema.

#### A. Valores numéricos das constantes do modelo

Os valores para a simulação normalmente são obtidos efetuando o processo de identificação do sistema, entretanto, para o nosso caso não foi possível fazer esses experimentos. Para contornar esse problema utilizamos os valores obtidos da referência [13]. Os valores são expostos na Tab. I,

Tabela I: Valor das constantes.

Símbolo	Valores	Unidades
$J_v$	1436,24	$\text{kgm}^2$
$l_f$	1,165	-
$l_r$	1,165	-
$c_f$	155494,663	N/rad

$c_r$	155494,663	N/rad
$m$	1140	kg
$v_x$	15	m/s

Extraído de [13], os valores são obtidos a partir da identificação do sistema, esses valores correspondem a um pequena caminhonete com sua carga máxima. Os valores dos parâmetros de rigidez foram obtidos, segundo [13]. O pneu foi analisado no teste de bancada com velocidade de 11,1 m/s, a pressão interna do pneu é de 2,9 bar.

#### B. Valores para a modelagem da rede

O modelo Gilbert é empregado como modelo da rede. Os valores de transição de modo  $P_{cc}$  e  $P_{ff}$  utilizados são,  $P_{cc} = 0,5$  e  $P_{ff} = 0,7$ , essas probabilidades geram um taxa de perda de pacote (PLR) de 62.5%. O valor de  $P_{cc}$  significa que o pacote tem 50% de chance de ser transmitido corretamente após uma transmissão bem sucedida, o valor de  $P_{ff}$  significa que após uma transmissão defeituosa a chance de uma outra falha ocorrer é de 70%. O valor de PLR indica que um quarto dos pacotes transmitidos, em média, não chegarão ao destino.

#### C. Valores de variação da incerteza

A variação da incerteza é feita no parâmetro  $c_f$ . A variação é feita de maneira linear. O alcance de variação é de 40% em relação ao valor nominal, isto é,  $c_f = 155494,663 \pm 40$ . O comportamento do ruído aditivo aplicado é uma senoide com valor de pico de 0,3 e com frequência de 6 radianos.

## IV. V. RESULTADOS

Nessa seção apresentaremos os resultados obtidos da simulação do caso apresentado na seção IV. Dividiremos a presente seção em quatro partes distintas sendo elas os resultados sobre o comportamento da norma, processo de discretização, resultados em relação ao controlador obtido e por fim os resultado relacionados a simulação Monte Carlo.

#### A. Discretização do sistema por série de Taylor

O sistema que representa o modelo cinemático (15) utilizando um coeficiente incerto conforme seção II-C formando um sistema politípico no domínio do tempo contínuo, o qual deve ser discretizado. O processo de discretização é feito conforme o procedimento apresentado em [11], ilustrado na seção II-C, resultando nas matriz  $A_d$ ,  $B_d$  e  $e_i B_d$ , sendo  $e_i = 0, 1$  representa a ponderação da matriz de entrada. A discretização do sistema por série de Taylor depende do grau de expansão  $\ell$  da série. Os erros  $err$  para cada matriz  $A_d$ ,  $B_d$  e  $e_i B_d$  conforme a variação de  $\ell$  são apresentados na Fig 4.

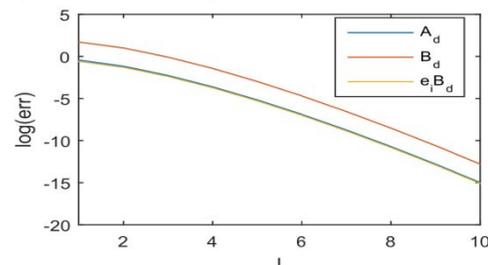


Figura 4: Análise do erro em relação a variação de  $\ell$ .

Os valores de  $err$  são apresentados em escala logarítmica para melhor visualização. Observe que para o valor de  $\ell > 8$  o erro de discretização para a matriz  $B_d$  é  $err(B_d) = 1,9 \times 10^{-4}$ , sendo assim, podemos dizer que do valor de  $\ell > 8$  o erro de aproximação pode ser desconsiderado.

### B. Comportamento da norma

Nessa subsecção o comportamento da norma é apresentado na Fig. 5. Essa análise é importante para ilustrar a influência da variação dos valores no modelo da rede (16).

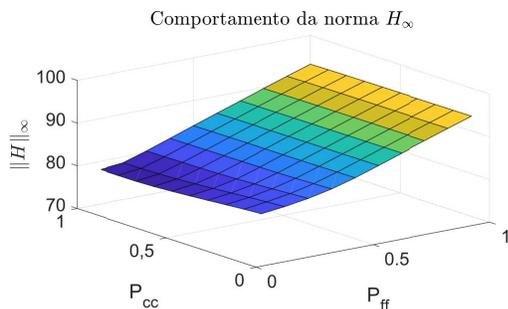


Figura 5: Comportamento da norma.

É possível observar que a medida que o valor de  $P_{ff}$  aumenta o valor da norma  $H_\infty$  também aumenta, o que é um resultado esperado, dado que,  $P_{ff}$  representa a probabilidade de permanência do modo de falha de comunicação da rede. Outra informação importante ilustrada nesse gráfico é que mesmo com a variação dos valores em (16), o problema de otimização tem solução factível para todas as combinações de  $P_{cc}$  e  $P_{ff}$ , mostrando que a solução é pouco conservadora.

### C. Controlador

Para programar as condições de realimentação estática de saída (Teorema 1), são utilizados o pacote computacional ROLMIP (Robust LMI Parser), [12], o qual descrever as condições LMI em dimensão infinita, sendo capaz de extrair um conjunto finito de LMIs a partir da imposição de um grau particular para as variáveis de decisão. No Teorema 1 além de fornecer às matriz que compõem o sistema (3) deve ser fornecido como condição inicial do problema de otimização, um ganho estabilizante  $K_i$ . Este ganho  $K_i$  foi obtido através de [24] impondo o valor de norma  $H_\infty$  em malha fechada igual a 100 fornecendo um ganho dado por

$$K_i = [0,03470, 0565 - 0,0347 - 0,0565] \forall i \in \mathbb{K}$$

É utilizado grau zero nas variáveis de recuperação do ganho  $L_i$ ,  $H_i$  e  $R_i$  e grão um para as demais variáveis de decisão. Como exemplo um ganho  $L_i$  obtido com os valores de  $P_{cc} = 0,5$  e  $P_{ff} = 0,7$

$$L_1 = [0.0101 \quad 0.0426 \quad 0.0133 \quad -0.0597]$$

$$L_2 = [0 \quad 0 \quad -0.0477 \quad -0.0214]$$

### D. Simulação Monte Carlo

Nesta subsecção apresentaremos os resultados para o sinal médio do segundo carro comparado com o sinal do carro líder, erro quadrático e desvio padrão da velocidade lateral ( $v_y$ ) e o sinal de controle ( $u(k)$ ). Essa simulação Monte Carlo teve 2000 amostras, com um tempo de simulação de 50s. Em [9], a

versão prévia do artigo, é apresentado a análise do erro quadrático e do desvio padrão da metodologia proposta, no qual utiliza-se a mesma configuração de experimentos. Entretanto, com a intenção de apresentar resultado com maior nível de confiabilidade adicionamos a comparação do valor médio do sinal de  $v_y$  do segundo carro comparado com o primeiro, para mostrar de forma clara que a abordagem funciona. Também apresentamos os sinal de controle, dado que este é de suma importância, que independente dos resultados das simulações se o sinal de controle obtido na simulação for impraticável a abordagem deve ser desconsiderada, dada a falta de aplicabilidade. Outro importante fator quando comparamos a abordagem apresentada em [9] e o presente trabalho é que a área de factibilidade para o Teorema 1 é sempre maior que os da abordagem do trabalho anterior. Essa característica permite afirmar que a abordagem apresentada no presente trabalho é capaz de gerar soluções para situações onde o grau de incerteza no modelo veículo é maior. Em Fig.6 a comparação entre o sinal do carro líder e do segundo carro são apresentados,

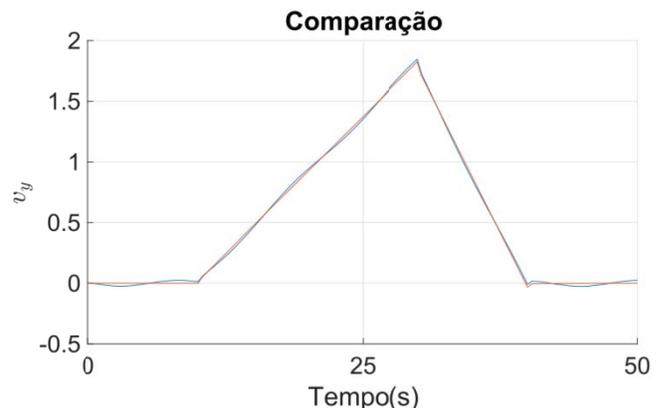


Figura 6: Comparação entre o primeiro e segundo carro.

Na Fig. 6 é possível observar que a curva de velocidade lateral do segundo carro, curva em vermelho, praticamente apresenta os mesmos valores da velocidade lateral do primeiro carro, curva azul. Com isso podemos dizer que a abordagem apresenta uma resposta apropriada. Em Fig. 7 aqui apresentamos o erro quadrático médio calculado usando os dados do gráfico apresentado em 6.

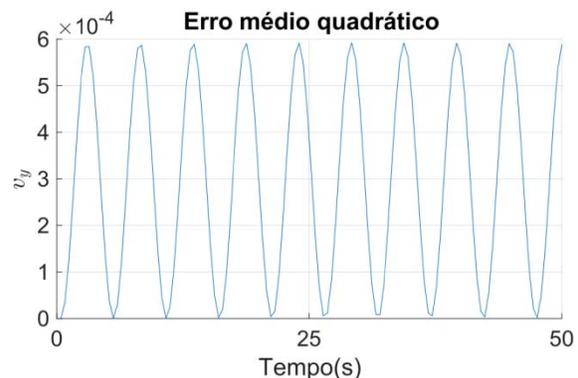


Figura 7: Erro quadrático médio entre primeiro e o segundo carro.

Na Fig. 7 podemos ver que o ruído aplicado tem grande influência no comportamento do erro médio quadrático. Entretanto, a relevância desse erro é baixa, observe que o gráfico está na grande de  $10^{-4}$ . Em Fig. 8 apresentamos o desvio padrão obtido na simulação.



Figura 8: Desvio padrão entre primeiro e o segundo carro.

Na Fig. 8 é possível observar que o desvio padrão para os valores de  $v_y$  está na grandeza de  $10^{-15}$ , isso pode ser interpretado como a abordagem proposta durante a simulação apresenta altos níveis de confiabilidade. Isto é, após 2000 simulações os resultados não diferem de maneira relevante, mesmo aplicando sinais de ruído aditivos na planta.

E por último a Fig. 9 a qual apresenta a média do sinal de controle obtido na simulação.



Figura 9: Sinal de controle do segundo carro.

E por último o gráfico mostrado na Fig. 9, como dissemos anteriormente, independente dos valores mostrados nos outros gráficos sejam excelentes em simulação, caso os valores do sinal de controle sejam muito altos na simulação isso implicaria não aplicabilidade da abordagem. Os valores de ângulo de esterçamento não ultrapassam 0,45 rad(25,7831), o que condiz com os limites de esterçamento de um sistema de direção de um carro.

## V. VI. CONCLUSÃO

No presente trabalho apresenta o estudo do problema de seguimento de carro. Duas premissas importantes são consideradas sendo elas: a comunicação entre os veículos é considerada *semi-confiável*, isto é, são sujeitas a falha; a segunda é a presença de incertezas no modelo. Tendo em mente essas premissas apresentamos a seguinte abordagem: a utilização de síntese de um controlador de realimentação de

saída, essas síntese tem como peculiaridade funções de Lyapunov polinomiais com grau arbitrário. Essa característica tem a vantagem de diminuir o conservadorismo do problema de otimização, em consequência obtendo valores de custo garantido  $H_\infty$  menores em comparação ao trabalho anterior. É um controlador estático de saída robusto para um sistema incerto polinomial (pelo processo de discretização). Com resultados obtidos em simulação é possível constatar que a abordagem proposta apresente uma resposta adequada, para o problema de seguimento de carros, quando comparada com os resultados do trabalho anterior. Na Fig. 6 podemos ver que a velocidade de ambos os carros é praticamente igual, na Fig. 7 o erro quadrático médio está no patamar de  $10^{-4}$  o que pode ser interpretado como que o nível precisão da solução é adequada. Já na Fig. 8 é possível observar que o patamar está na casa de  $10^{-15}$ , mesmo com ruído aditivo com frequência e valor de pico adequados. É por fim, o sinal de controle se mantém em níveis aceitáveis, o sinal de controle é o ângulo de esterçamento das rodas dianteiras, o valor de pico apresentado no Fig. 9 não ultrapassa o valor de 0.5 radianos (25,7831), o que condiz com o sistema real.

O próximo passo dessa linha de pesquisa seria a utilização Linear Parameter Varying (LPV), com a intenção de aumentar ainda mais precisão da representação das incertezas, reescrevendo-as como parâmetros que variam linearmente, e fazendo a síntese dos controladores sob multiplex pontos de equilíbrio e parâmetros sujeitos a perda [24].

## VI. VII AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Cecília de Freitas Moraes pelo suporte técnico no processo de programação do controlador.

## REFERÊNCIAS

- [1] G. Baffet, A. Charara, and D. Lechner, "Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness," *Control Engineering Practice*, vol. 17, no. 11, pp. 1255–1264, 2009.
- [2] A. K. Das, R. Fierro, V. Kumar, J. P. Ostrowski, J. Spletzer, and C. J. Taylor, "A vision-based formation control framework," *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 18, no. 5, pp. 813–825, 2002.
- [3] A. Pesterev, "A linearizing feedback for stabilizing a car-like robot following a curvilinear path," *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 52, no. 5, pp. 819–830, 2013.
- [4] U. Petersen, A. Rukgauer, and W. Schiehlen, "Lateral control of a convoy vehicle system," *Vehicle System Dynamics*, vol. 25, no. S1, pp. 519–532, 1996.
- [5] P. Seiler and R. Sengupta, "Analysis of communication losses in vehicle control problems," vol. 2, pp. 1491–1496, 2001.
- [6] O. Garcia, J. Ferreira, and A. Miranda Neto, "Design and simulation for path tracking control of a commercial vehicle using mpc," pp. 61–66, 2014.
- [7] J. M. Snider, "Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking," Robotics Institute, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-ITR-09-08, 2009.
- [8] M. R. Licea and I. Cervantes, "An approach to mitigate the lateral skid for wheeled vehicles," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 5, pp. 1306–1313, 2018.
- [9] L. d. P. Carvalho, J. M. Palma, A. P. d. C. Gonçalves, and C. Duran-Faundez, "Applying polytopic uncertainty in the vehicle-following problem with lossy networks," in *Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON)*, 2017 CHI-LEAN Conference on. IEEE, 2017, pp. 1–7.
- [10] C. F. Moraes, M. F. Braga, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres, " $H_\infty$  static output feedback control of discrete-time Markov jump linear systems with

- uncertain transition probability matrix,” 2014 American Control Conference, Portland, OR, USA, June 2014, pp. 489–494.
- [11] M. F. Braga, C. F. Morais, E. S. Tognetti, R. C. Oliveira, and P. L. Peres, “A new procedure for discretization and state feedback control of uncertain linear systems,” pp. 6397–6402, 2013.
- [12] C. M. Agulhari, R. C. L. F. de Oliveira, and P. L. D. Peres, “Robust LMI Parser: a computational package to construct LMI conditions for uncertain systems,” in *XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012), Campina Grande, PB, Brazil, September 2012*, pp. 2298–2305.
- [13] B. Avak, “Modeling and control of a superimposed steering system,” Ph.D. dissertation, Citeseer, 2004.
- [14] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994, vol. 15.
- [15] K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover et al, *Robust and optimal control*. Prentice hall New Jersey, 1996, vol. 40.
- [16] O. L. Costa and M. D. Fragoso, “Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters,” *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 179, no. 1, pp. 154–178, 1993.
- [17] L. S. Shieh, W. Wang, and G. Chen, “Discretization of cascaded continuous-time controllers and uncertain systems,” *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 17, no. 5, pp. 591–611, 1998.
- [18] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Lung, “Lmi control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems,” *2007 American Control Conference*, New York City, USA pp. 1401–1406, 2007.
- [19] J. C. Geromel and R. Korogui, “*Controle linear de sistemas dinâmicos*,” Editora Blucher, São Paulo, SP, 2011.
- [20] L. d. P. Carvalho et al., “Controle de fila de carros usando sistemas sujeitos a saltos markovianos,” Ms. dissertation, 2016.
- [21] A. R. Fioravanti, A. P. Gonçalves, and J. C. Geromel, “Filter inputs with markovian lossy links: Zero or hold?” *2011 9th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, Santiago Chile, pp. 656–661, 2011.
- [22] L. Schenato, “To zero or to hold control inputs with lossy links?” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 5, pp. 1093–1099, 2009.
- [23] E. N. Gilbert, “Capacity of a burst-noise channel,” *Bell system technical journal*, vol. 39, no. 5, pp. 1253–1265, 1960.
- [24] J. M. Palma, C. F. Morais, and R. C. L. F. Oliveira, “Gain-scheduled control for lpv systems with scheduling parameters transmitted through a markov channel,” in *Joint 9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, Sep. 2018.



**Leonardo de Paula Carvalho**, formado em Engenharia Elétrica, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil em 2012. Mestrado na Universidade Estadual de Campinas no Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial. cursando Doutorado na Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, SP, Brasil. As principais pesquisas feitas em controle em rede.



**Jonathan Matias Palma Olate** (03/11/1989) formado em Ingeniería de Ejecución en Electrónica, pela Universidad del Bío-Bío, Concepcion Chile em 2014, mestrado em Engenharia Elétrica (2016) e estudante de Doutorado (2016-Atual) na Unicamp Brasil, baixo a orientação R.C. L. F. Oliveira de e co-orientação por C.F. Morais em sistemas lineares dependentes de parâmetros, teoria e aplicação.



**Alim Pedro de Castro Gonçalves**. Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (2000); Mestre em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (2006), modalidade Automação e Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (2009), modalidade Automação.



**Cristian Duran-Faundez**. Professor Assistente no Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica da Universidade do Bío-Bío, Concepción, Chile. Graduou-se em Informática pela Universidade do Bío-Bío (2005). Doutorado em Automação, Processamento de Sinais e Engenharia de Computação na Universidade Henri Poincaré (2009). Seus interesses atuais de pesquisa estão centralizados em redes de sensores sem fio, com ênfase em comunicação de imagem e métodos de localização.