

# Kinematics of the Gough-Stewart Platform by Means of the Newton-Homotopy Method

J. Gallardo, and L. Alcaraz

**Abstract**—In this work the forward kinematic problem of the general Gough-Stewart platform is easily formulated and solved combining the homotopy continuation method and the Newton-Raphson method. Unlike most contributions approaching the topic, in this work the Gough-Stewart platform is considered as a parallel manipulator of general geometry, e.g., it is composed of two three-dimensional platforms. The closure kinematic constraints required to approach the forward displacement analysis are formulated based on linear combinations of three unit vectors attached to the moving platform and one vector relating the position of the moving platform as observed from the base. For the robot manipulator of general geometry a non-linear system of twelve non-linear equations are generated and solved by means of the Newton-homotopy continuation method. Numerical examples are provided with the purpose to illustrate the proposed method.

**Index Terms**—Forward kinematics, Gough-Stewart platform, Homotopy continuation method, Newton-Raphson method, Three-dimensional platform.

## I. INTRODUCCIÓN

UNA plataforma Gough-Stewart se compone de una plataforma móvil unida a una base o plataforma fija por medio de seis extremidades del tipo Universal (U) + Prismático (P) + Esférico (S), Fig. 1. Este manipulador posee seis grados de libertad y por lo tanto la plataforma móvil puede adoptar posiciones y orientaciones arbitrarias como se aprecian desde la plataforma fija, características ampliamente apreciadas en el contexto industrial y todo un reto en su análisis cinemático en el ámbito académico, por ejemplo, el análisis cinemático directo correspondiente es considerado aún en nuestros días un problema abierto para la comunidad de cinemática. Ciertamente, la solución en forma cerrada de dicho análisis es una tarea poco realista y seguramente lo será por muchos años más. Por otra parte, aplicaciones sumamente prácticas y novedosas como lo son máquinas herramienta con múltiples husillos móviles, dispositivos de alta precisión, robots con fines quirúrgicos, robots para operaciones pick-and-place de alta

velocidad, etc., son incentivos que han propiciado un renovado interés en los manipuladores paralelos.

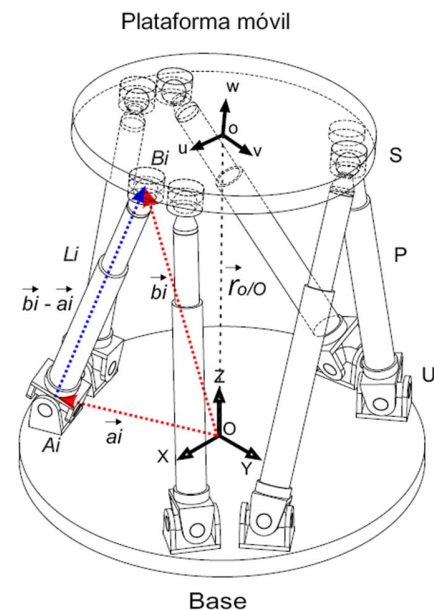


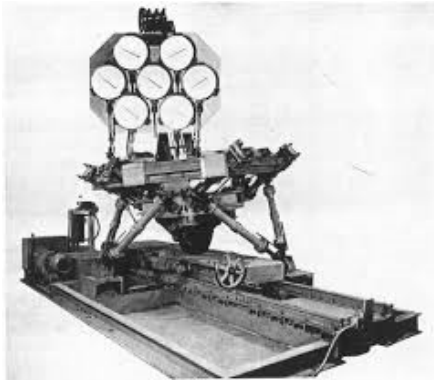
Fig.1. La plataforma Gough-Stewart. Un manipulador paralelo no redundante cuyo análisis directo de posición representa uno de los mayores retos de la cinemática teórica moderna.

El hexápodo bajo estudio fue introducido en el año 1957 por Gough como una máquina para probar la durabilidad de neumáticos bajo diferentes condiciones de carga [1,2]. Pocos años más tarde, Stewart propuso un simulador de vuelo basado en un manipulador paralelo con tres extremidades compuestas [3,4]. Como se aprecia en la Fig. 2, ambos diseños son definitivamente diferentes y sin embargo el trabajo teórico de Stewart fue severamente criticado e incluso el mismo Gough, quién curiosamente había fungido como revisor del artículo teórico publicado por Stewart, aseguró de una manera un tanto absurda que el diseño de Stewart era una copia de su probador de neumáticos. Aún cuando Stewart replicó de manera elegante a las acusaciones de sus colegas, las críticas fueron tan crudas que Stewart no volvió a publicar artículo científico alguno. Hoy en día el manipulador de la Fig. 1 se conoce como plataforma Gough-Stewart a pesar de que ambas invenciones son muy diferentes. Es de llamar la atención las decenas de artículos teóricos publicados en revistas del más alto prestigio que describen la plataforma de Stewart como si fuese el hexápodo de Gough. Más aún, hasta donde el autor sabe la plataforma de

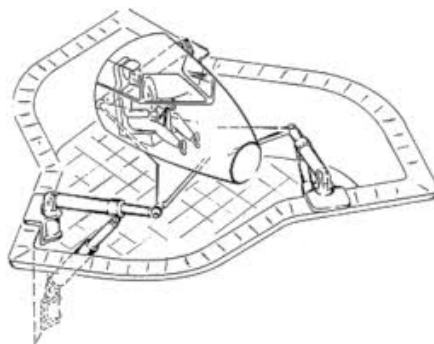
J. Gallardo es profesor de tiempo completo en el Departamento de Ingeniería Mecánica del Instituto Tecnológico de Celaya, Tecnológico Nacional de México, Av. Tecnológico y A. García Cubas, C.P. 38010 Celaya, Gto., México (e-mail: jaime.gallardo@itcelaya.edu.mx).

L. A. Alcaraz es profesor de tiempo completo en el Departamento de Ingeniería Mecatrónica del Instituto Tecnológico de Celaya, Tecnológico Nacional de México, Av. Tecnológico y A. García Cubas, C.P. 38010 Celaya, Gto., México (e-mail: alejandro.alcaraz@itcelaya.edu.mx).

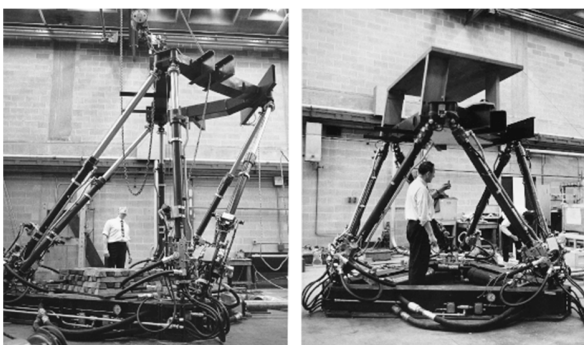
Stewart nunca fue construida mientras que, irónicamente, hoy en día los simuladores de vuelo comerciales se basan en el diseño del hexápodo propuesto y construido por Gough y sus colaboradores. Para enriquecer más todavía el ambiente, cabe mencionar que la primera patente relacionada con el hexápodo y sus aplicaciones fue concedida a Klaus Cappel en el año 1967 y es así que los créditos de tan formidable invención se vuelven más oscuros con lo que se espera que en el mediano plazo se elucide quién realmente es el inventor original del hexápodo industrial [5].



a)



b)



c)

Fig. 2.a) Probador de neumáticos de Gough, b) plataforma de Stewart c) simulador de vuelo de Cappel. Existe toda una polémica sobre quién fue el verdadero inventor del hexápodo mecánico.

Más allá de la polémica desatada por la plataforma Gough-Stewart, es admirable como ésta incentivó desde su introducción la creatividad de académicos e industriales abordando diversos temas entre los que destacan el análisis y síntesis de manipuladores paralelos, siendo uno de los más retadores el análisis directo de posición. La solución de este tipo de problemas es una tarea sumamente ardua y por tal motivo Freudenstein los consideró como el "Everest" de la cinemática moderna.

El análisis directo de posición de la plataforma Gough-Stewart consiste en determinar las configuraciones que el mecanismo puede alcanzar de acuerdo a un conjunto definido de las longitudes de las extremidades. Dentro del gran número de investigaciones que abordan el tema destacan aquellas que han elucidado con exactitud el número de soluciones posibles [6-9] así como los métodos matemáticos, algunos tan elegantes que representan verdaderas joyas de la cinemática moderna, empleados para la solución de las ecuaciones de clausura [5, 10-15].

El presente trabajo se enfoca al análisis directo de posición de la plataforma Gough-Stewart. Aunque este análisis se ha estudiado de manera recurrente, todavía se tienen puntos que es posible mejorar. Por ejemplo, en la mayoría de las contribuciones que abordan el tema, las ecuaciones de clausura se establecen empleando métodos clásicos como lo son la combinación de la matriz de rotación y el álgebra de Cayley [12], aplicación de coordenadas de Soma [14], introducción de cuaterniones duales [15], parámetros de Study, etc. Posteriormente dichas ecuaciones se resuelven utilizando ya sea complejos métodos de eliminación que conducen a polinomios de alto orden [11-13] o bien métodos clásicos de homotopía [14, 16-18]. Todas esas estrategias resultan complejas de aplicar para investigadores que no son expertos en la materia pues requieren sin duda de un conocimiento especializado. En el presente trabajo, a diferencia de las contribuciones mencionadas en este párrafo, las ecuaciones de clausura se establecen considerando simples combinaciones lineales de vectores anclados en la plataforma móvil y se resuelven combinando el método de Newton-Raphson y el de homotopía. El método propuesto es fácil de seguir y no requiere más que el conocimiento elemental del álgebra lineal en combinación con métodos numéricos elementales.

## II. METODOLOGÍA

La presente sección se subdivide en dos partes. Formulación del problema de análisis cinemático directo y su solución por medio del método de Newton-homotopía.

### A. Formulación del Problema Cinemático Directo

El análisis directo del manipulador consiste en determinar la posición y orientación de la plataforma móvil con respecto a la base dado un conjunto de longitudes  $L_i$  de las extremidades. A fin de establecer las ecuaciones de clausura, considere que  $O_{XYZ}$  es un sistema de referencia fijo a la base del manipulador y con vectores unitarios  $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ . Más aún, considere que sobre la plataforma móvil se encuentran tres vectores unitarios  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$  los cuales forman una base ortonormal y

a derechas fija, es decir, que se satisface el que  $\hat{w} = \hat{u} \times \hat{v}$ , donde ( $\times$ ) denota al producto cruz usual del álgebra vectorial de tres dimensiones. Considere además que sobre la plataforma móvil se ubica un punto  $o$ , localizado por el vector  $\vec{r}_{o/O}$ , el cual puede considerarse como la intersección de los vectores unitarios  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$ . Por otra parte considere que el punto  $A_i$  denota la intersección de los dos ejes asociados a la  $i$ -ésima junta universal mientras que el punto  $B_i$  denota el centro geométrico de la  $i$ -ésima junta esférica. Entonces, el vector de posición  $\vec{b}_i$  del  $i$ -ésimo punto  $B_i$  puede expresarse como

$$\vec{b}_i = \vec{r}_{o/O} + \alpha_i \hat{u} + \beta_i \hat{v} + \gamma_i \hat{w} \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathfrak{R} \quad (1)$$

donde  $a_i$ ,  $b_i$  y  $g_i$  son las coordenadas del punto  $B_i$  expresadas en la base ortonormal  $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ . Con estas consideraciones en mente se determinan las ecuaciones de clausura, por ejemplo, con base en la distancia  $L_i$  entre los puntos  $A_i$  y  $B_i$  se obtienen seis ecuaciones cuadráticas de la siguiente forma

$$(\vec{b}_i - \vec{a}_i) \cdot (\vec{b}_i - \vec{a}_i) = L_i^2 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2)$$

donde  $\vec{a}_i$  es el vector de posición del  $i$ -ésimo punto  $A_i$  y el punto  $(\cdot)$  denota al producto interno usual del álgebra vectorial de tres dimensiones. Por otra parte, tres ecuaciones cuadráticas se generan si se toma en cuenta que  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  y  $\hat{w}$  son vectores unitarios, es decir, es evidente que

$$\hat{u} \cdot \hat{u} = 1, \quad \hat{v} \cdot \hat{v} = 1, \quad \hat{w} \cdot \hat{w} = 1 \quad (3)$$

Finalmente, tres ecuaciones de clausura no-lineales adicionales emergen del hecho de que

$$\hat{w} = \hat{u} \times \hat{v} \quad (4)$$

Las expresiones (2)-(4) forman un sistema de 12 ecuaciones no-lineales donde las variables son precisamente las componentes de los vectores  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  y  $\vec{r}_{o/O}$ . En el caso de una plataforma móvil plana, el sistema se reduce de 12 a 9 variables dado que el vector unitario  $\hat{w}$  es innecesario, en tal caso es recomendable substituir la Ec. (4) por el producto interno entre  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$ , es decir, con la finalidad de completar las 9 ecuaciones de restricción se toma ventaja de la perpendicularidad entre dichos vectores, por ejemplo es evidente el que

$$\hat{u} \cdot \hat{v} = 0 \quad (5)$$

Nótese que las ecuaciones de clausura de la plataforma Gough-Stewart que se obtienen con el procedimiento descrito en esta subsección se explican en tan solo media página y sin embargo son aplicables tanto a plataformas planas como a plataformas con forma de poliedros, es decir, el procedimiento es general. Cabe mencionar que existen contribuciones que aseguran resolver el mismo problema y sin embargo se limitan

al caso más simple, el manipulador Gough-Stewart con plataformas planas [16-18]. Normalmente, en dichas contribuciones la generalidad se refiere a la topología de las extremidades y no a la geometría de las plataformas en sí.

### B. Solución de las Ecuaciones de Clausura

El método seleccionado para resolver el sistema de ecuaciones no-lineales es una combinación de los métodos de Newton-Raphson y de homotopía [19]. Las 12 variables, las cuales se designan como  $w$ , a considerar se asignan de la siguiente manera:

$$\hat{u} = (w_1, w_2, w_3), \quad \hat{v} = (w_4, w_5, w_6), \quad \hat{w} = (w_7, w_8, w_9) \quad \text{y} \\ \vec{r}_{o/O} = (w_{10}, w_{11}, w_{12}).$$

Por su parte, las ecuaciones no-lineales se denotan de manera compacta como

$$f(w) := [f_1(w), \dots, f_n(w)] \quad (6)$$

donde  $n=12$  es el número de ecuaciones de clausura. El método Newton-Homotopía requiere como un paso inicial que las ecuaciones por resolver se modifiquen omitiendo algunos términos y se adicionen nuevos términos de tal manera que el sistema resultante sea susceptible de incorporar un sistema inicial de soluciones fácil de suponer y libre de divergencia. Entonces, los coeficientes son deformados/perturbados en los coeficientes del sistema original por una serie de pequeños incrementos. Por ejemplo, suponga que se requiere resolver el sistema  $f(w)=0$ , entonces se define una función auxiliar de homotopía  $g(w)$  dada por

$$g(w) := [g_1(w), \dots, g_n(w)] \quad (7)$$

Cabe mencionar que la función  $g(w)$  no requiere de condiciones especiales para su selección. Por ejemplo, una elección sencilla puede ser una composición de combinaciones lineales de las variables involucradas:

$$g(w) = \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 w_1 + \dots + \lambda_n^1 w_n + \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^n w_1 + \dots + \lambda_n^n w_n + \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (8)$$

Otras posibilidades más *extravagantes* incluyen funciones trigonométricas:

$$g(w) = \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \sin(w_1) + \dots + \lambda_n^1 \sin(w_n) + \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^n \sin(w_1) + \dots + \lambda_n^n \sin(w_n) + \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (9)$$

Funciones de tipo exponencial:

$$g(w) = \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 e^{w_1} + \dots + \lambda_n^1 e^{w_n} + \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda_1^n e^{w_1} + \dots + \lambda_n^n e^{w_n} + \lambda^n \end{bmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (10)$$

etcétera.

Una vez seleccionada la función auxiliar  $g(w)$  se define la función múltiple de homotopía  $H(w,t):=[h_1(w),\dots,h_n(w)]$  de la siguiente manera

$$H(w,t) := t \begin{bmatrix} f_1(w) \\ \vdots \\ f_n(w) \end{bmatrix} + (1-t) \begin{bmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_n(w) \end{bmatrix} \tag{11}$$

donde  $t$  es un parámetro arbitrario dado en el intervalo  $[0,1]$ . De esta manera se tienen dos condiciones extremas

$$\left. \begin{aligned} H(w,0) &= g(w) \\ H(w,1) &= f(w) \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

las cuales representan la base del método de homotopía. Es decir, dos aplicaciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$  se consideran homotópicas si existe otra aplicación, por supuesto también continua,  $H: X \times [0,1] \rightarrow Y$ . La idea fundamental del método consiste en resolver  $H(w,t)=0$  en lugar de  $f(w)=0$  considerando para ello pequeñas variaciones del parámetro  $t$  y recurriendo al método clásico de Newton-Raphson para su solución y es así que las iteraciones correspondientes se ejecutan de acuerdo a la expresión:

$$w_{m+1} = w_m - J(w_m)^{-1} H(w_m, t) \tag{13}$$

donde

$$J(w_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial h_1(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial h_1(w)}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n(w)}{\partial w_1} & \frac{\partial h_n(w)}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial h_n(w)}{\partial w_n} \end{bmatrix} \tag{14}$$

es la matriz Jacobiana del sistema modificado. Por supuesto, a fin de evitar caer en divergencia, el valor del sistema inicial de la función auxiliar de homotopía  $g(w)$  debe seleccionarse de tal manera que  $\det(J(w_{iter})) \neq 0$ . Para información más detallada de esta sección se sugiere al lector consultar las referencias [19-21].

### III. RESULTADOS: APLICACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se ejemplifica la aplicación del método con un caso de estudio. La geometría de las plataformas es tal que la base del manipulador es un poliedro cuyos vértices vienen dados, en el sistema de referencia fijo  $O_{-}XYZ$ , por las siguientes coordenadas:

$$A_1 = (-1, 0, 0), A_2 = (-0.5, -1, 0.5), A_3 = (0.4, -0.9, -0.3), A_4 = (1.2, 0, 0), A_5 = (0.7, 0.5, -0.3) \text{ y } A_6 = (-0.5, 0.8, 0).$$

Más aún, los parámetros  $\alpha_i, b_i$  y  $g_i$  que definen a los vectores de posición  $\vec{b}_i$ , consulte la Ec. (1), se proporcionan en la Tabla I.

TABLA I  
PARÁMETROS DE LOS VECTORES  $\vec{b}_i$

$i$ -ésimo vector	$\alpha_i$	$b_i$	$g_i$
1	-0.85	0.15	0
2	-0.6	-0.9	0.5
3	0.5	-1	-0.3
4	1.1	-0.1	0
5	0.7	0.6	-0.3
6	-0.45	0.85	0

Como información final, considere que en la configuración instantánea de la plataforma móvil, las longitudes de las extremidades del manipulador vienen dadas por:

$$L_1 = 1.465, L_2 = 1.506, L_3 = 1.556, L_4 = 1.456, L_5 = 1.553 \text{ y } L_6 = 1.451$$

Con estos datos se desean determinar cuáles son las configuraciones reales que la plataforma Gough-Stewart puede adoptar. Las ecuaciones de clausura se obtienen de la siguiente manera. Considerando la notación de los vectores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  y  $\vec{r}_{o/O}$ , seis ecuaciones cuadráticas se determinan con base en la expresión (2), aplicando el correspondiente producto interno, como:

$$f_1 = w_{10}^2 - 1.7w_{10}w_1 + .3w_{10}w_4 + 2w_{10} + .7225w_1^2 - .255w_1w_4 - 1.7w_1 + 0.225e - 1w_4^2 + .3w_4 - 1.1475 + w_{11}^2 - 1.7w_{11}w_2 + .3w_{11}w_3 + .7225w_2^2 - .255w_2w_3 + 0.225e - 1w_3^2 + w_{12}^2 - 1.7w_{12}w_3 + .3w_{12}w_6 + .7225w_3^2 - .255w_3w_6 + 0.225e - 1w_6^2$$

$$f_2 = .25w_9^2 + .25w_8^2 + .25w_7^2 + .5w_7 + 1.00w_8 - .5w_9 - .77 + w_{12}^2 + w_{11}^2 - 1.8w_{12}w_6 + 1.08w_3w_6 - 1.2w_{12}w_3 - 1.8w_{11}w_5 + 1.08w_2w_5 - 1.2w_{11}w_2 - 1.8w_{10}w_4 + 1.08w_1w_4 - 1.2w_{10}w_1 + w_{10}^2 + .36w_3^2 + .81w_6^2 - 1.0w_{12} + .6w_3 + .9w_6 + .81w_5^2 + 2.w_{11} - 1.2w_2 - 1.8w_5 + .36w_2^2 + .81w_4^2 + .36w_1^2 - .9w_4 + 1.0w_{10} - .6w_1 - .9w_6w_9 + w_{12}w_9 - .6w_3w_9 - .6w_2w_8 - .9w_5w_8 - .9w_4w_7 + w_{11}w_8 + w_{10}w_7 - .6w_1w_7$$

$$f_3 = w_{12}^2 + w_{11}^2 + .24w_7 - 2w_{12}w_6 - 2w_{11}w_5 - w_2w_5 - w_1w_4 + .25w_3^2 + w_6^2 + .6w_{12} + .3w_3 - .6w_6 + w_5^2 + 1.8w_{11} + .9w_2 - 1.8w_5 + .25w_2^2 + w_4^2 + .8w_4 - .4w_1 - w_3w_6 + w_{12}w_3 + w_{11}w_2 + w_{10}w_1 - 2w_{10}w_4 - .6w_{10}w_7 - .3w_1w_7 + .6w_4w_7 - .6w_{11}w_8 - .3w_2w_8 + .6w_5w_8 - .6w_{12}w_9 - .3w_3w_9 + .60w_6w_9 - 1.3625 + .25w_1^2 - .8w_{10} - .54w_8 - .18w_9 + w_{10}^2 + 0.9e - 1w_7^2 + 0.9e - 1w_8^2 + 0.9e - 1w_9^2$$

$$f_4 = w_{10}^2 + 2.2w_{10}w_1 - .2w_{10}w_4 - 2.4w_{10} + 1.21w_1^2 - .22w_1w_4 - 2.64w_1 + 0.1e - 1w_4^2 + .24w_4 - .6825 + w_{11}^2 + 2.2w_{11}w_2 - .2w_{11}w_5 + 1.21w_2^2 - .22w_2w_5 + 0.1e - 1w_5^2 + w_{12}^2 + 2.2w_{12}w_3 - .2w_{12}w_6 + 1.21w_3^2 - .22w_3w_6 + 0.1e - 1w_6^2$$

$$f_5 = w_{12}^2 + w_{11}^2 + .42w_7 + 1.2w_{12}w_6 + 1.2w_{11}w_5 + .84w_2w_5 + .84w_1w_4 + .49w_3^2 + .36w_6^2 + .6w_{12} + .42w_3 + .36w_6 + .36w_5^2 - w_{11} - .7w_2 - .6w_5 + .49w_2^2 + .36w_4^2 - .84w_4 - .98w_1 + .84w_3w_6 + 1.4w_{12}w_3 + 1.4w_{11}w_2 + 1.4w_{10}w_1 + 1.2w_{10}w_4 - .6w_{10}w_7 - .42w_1w_7 - .36w_4w_7 - .6w_{11}w_8 - .42w_2w_8 - .36w_5w_8 - .6w_{12}w_9 - .42w_3w_9 - .36w_6w_9 - 1.5825 + .49w_1^2 - 1.4w_{10} + .3w_8 - .18w_9 + w_{10}^2 + 0.9e - 1w_7^2 + 0.9e - 1w_8^2 + 0.9e - 1w_9^2$$

$$f_6 = w_{12}^2 + w_{11}^2 - 1.2175 + 1.7w_{12}w_6 + 1.7w_{11}w_5 - .765w_2w_5 - .765w_1w_4 + .2025w_3^2 + .7225w_6^2 + .7225w_5^2 - 1.6w_{11} + .72w_2 - 1.36w_5 + .2025w_2^2 + .7225w_4^2 + .85w_4 - .450w_1 - .765w_3w_6 - .9w_{12}w_3 - .9w_{11}w_2 - .9w_{10}w_1 + 1.7w_{10}w_4 + .2025w_1^2 + w_{10} + w_{10}^2$$

Por otra parte, la aplicación de las expresiones (3) conduce a

$$\left. \begin{aligned} f_7 &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 - 1, \\ f_8 &= w_4^2 + w_5^2 + w_6^2 - 1, \\ f_9 &= w_7^2 + w_8^2 + w_9^2 - 1 \end{aligned} \right\}$$

Finalmente, de las expresiones (4) tres ecuaciones complementarias se deducen como

$$\left. \begin{aligned} f_{10} &= w_7 - w_2w_6 + w_3w_5, \\ f_{11} &= w_8 - w_3w_4 + w_1w_6, \\ f_{12} &= w_9 - w_1w_5 + w_2w_4 \end{aligned} \right\}$$

Como siguiente paso, la función auxiliar de homotopía  $g(w)$  se selecciona tal y como se sugiere en la expresión (8). Una vez cubiertos estos pasos, se procede a la solución de la función múltiple de homotopía resultante  $H(w,t) := [h_1(w), \dots, h_n(w)]$  aplicando el método de Newton-Raphson. Una solución de las variables  $w_i$  se proporciona en la Tabla II.

Es de destacar que con los valores  $w_i$  de la Tabla II, las funciones  $f_i$  evaluadas resultaron ser:

$$f_1 = 1.438 \cdot 10^{-9}, f_2 = 2.91 \cdot 10^{-9}, f_3 = -4.9 \cdot 10^{-10},$$

$$f_4 = -6.90 \cdot 10^{-10}, f_5 = -1.05 \cdot 10^{-9}, f_6 = 1.9 \cdot 10^{-9},$$

$$f_7 = 0, f_8 = 0, f_9 = 0,$$

$$f_{10} = -1 \cdot 10^{-10}, f_{11} = -1 \cdot 10^{-10}, f_{12} = -1 \cdot 10^{-10}$$

y con ello se demuestra la exactitud del método.

TABLA II  
UNA SOLUCIÓN DEL ANÁLISIS DE POSICIÓN DIRECTO

$w_i$	Valor inicial	Valor final
$w_1$	0.8	0.7399030881
$w_2$	0.25	0.6553034124
$w_3$	0.5	-0.1520554442
$w_4$	-0.75	-0.5690660299
$w_5$	0.5	0.7302439146
$w_6$	0.5	0.3780313201
$w_7$	0.25	0.3587627768
$w_8$	0.0	-0.1931769532
$w_9$	1.0	0.9132206387
$w_{10}$	0.5	0.4982152198
$w_{11}$	0.25	0.5272215275
$w_{12}$	1.0	1.049597284

Para complementar la información de la Tabla II, las coordenadas de los puntos  $B_i$ , así como las longitudes  $L_i$  de las extremidades, de acuerdo a los valores  $w_i$  allí indicados resultan ser:

$$B_1 = (-0.216, 0.079, 1.235), B_2 = (0.745, -0.619, 1.257),$$

$$B_3 = (1.329, 0.182, 0.321), B_4 = (1.369, 1.175, 0.844),$$

$$B_5 = (0.567, 1.482, 0.896), B_6 = (-0.318, 0.853, 1.439),$$

$$L_1 = 1.465, L_2 = 1.506, L_3 = 1.556, L_4 = 1.456, L_5 = 1.553 \text{ y}$$

$$L_6 = 1.451$$

Por otra parte, cambiando el sistema inicial de valores supuestos se pudieron determinar seis diferentes poses de la plataforma móvil las cuales se proporcionan en la Tabla III.

TABLA III  
SOLUCIONES REALES DEL ANÁLISIS DE POSICIÓN DIRECTO

Solución	$\vec{r}_{o/O}$	$\hat{w}$
1	(0.498, 0.527, 1.049)	(0.358, -0.193, 0.913)
2	(-1.047, -0.609, 0.787)	(0.382, 0.449, 0.807)
3	(0.549, 0.662, 0.890)	(0.490, -0.229, 0.840)
4	(0.808, -1.066, -0.252)	(0.392, 0.653, 0.647)
5	(1.146, -0.746, -0.019)	(-0.431, -0.593, 0.679)
6	(-1.129, 0.856, 0.231)	(0.156, -0.427, 0.890)

En este punto surge una pregunta natural: ¿existen más soluciones reales que las obtenidas con el método propuesto? Para responder a esta interrogante se recurrió al programa de computadora de acceso gratuito PHCpack desarrollado por el Dr. Verschelde [22]. Con dicho programa se generaron 80 soluciones: 12 reales y 68 imaginarias. Sin embargo, de las 12 soluciones reales seis de éstas son soluciones repetidas y por lo tanto en realidad solo se pueden considerar 6 soluciones reales lo cual valida el número de soluciones obtenidas con el método de Newton-homotopía.

Como prueba de lo anterior, en la Tabla IV se indican los 80 posibles valores de la variable  $w_j$ .

TABLA IV  
LAS 80 SOLUCIONES DE W1 OBTENIDAS CON EL PROGRAMA DE  
COMPUTADORA PHCPACK [20]

Soluciones		
1,2	1.0296+.14536*i	1.0296-.14536*i
3,4	.94329-.41135*i	1.1525+.31628e-1*i
<b>5,6</b>	<b>.73990-.22566e-16*i</b>	<b>.73990+.38137e-18*i</b>
<b>7,8</b>	<b>.98434+.16037e-1*i</b>	<b>.90141+.23844e-18*i</b>
9,10	.97288-.18507*i	1.2691+.72863e-1*i
11,12	.92904-.12816*i	1.1525-.31628e-1*i
13,14	.98123+.75421e-2*i	1.1127-.38157*i
15,16	1.0690-.26889*i	1.9897-.29915*i
<b>17,18</b>	<b>1.9897-.29915*i</b>	<b>.71035+.15904e-17*i</b>
19,20	1.1006-.57009*i	1.6889+.16239*i
21,22	1.0296-.14536*i	.98434+.16037e-1*i
23,24	1.4736+.20325*i	1.1153-.82971e-1*i
<b>25,26</b>	<b>1.2691+.72863e-1*i</b>	<b>.82055+.27168e-16*i</b>
<b>27,28</b>	<b>.90141-.37466e-17*i</b>	1.0690-.26889*i
29,30	1.1153+.82971e-1*i	1.1006+.57009*i
<b>31,32</b>	<b>.71035+.18082e-18*i</b>	1.0690+.26889*i
33,34	1.6010+.41826e-2*i	.97288+.18507*i
<b>35,36</b>	<b>.89790-.22063e-18*i</b>	<b>.82055-.51446e-18*i</b>
<b>37,38</b>	<b>.98123+.75421e-2*i</b>	<b>.98147-.14216e-20*i</b>
39,40	1.1006-.57009*i	.97288+.18507*i
41,42	1.9897+.29915*i	1.2691+.72863e-1*i
43,44	1.1525+.31628e-1*i	1.1153+.82971e-1*i
45,46	1.1127+.38157*i	1.1127+.38157*i
47,48	1.6889+.16239*i	.98434-.16037e-1*i
49,50	1.1006+.57009*i	1.0296+.14536*i
51,52	1.6889-.16239*i	.94329-.41135*i
53,54	.92904-.12816*i	1.6010-.41826e-2*i
55,56	1.6889-.16239*i	1.4736+.20325*i
57,58	1.1127-.38157*i	1.1833+.12113*i
59,60	1.6010+.41826e-2*i	1.4736-.20325*i
<b>61,62</b>	<b>.89790+.12448e-20*i</b>	<b>.98147+.11675e-19*i</b>
63,64	.92904+.12816*i	.94329+.41135*i
65,66	.98123+.75421e-2*i	1.1153-.82971e-1*i
67,68	.92904+.12816*i	1.4736-.20325*i
69,70	1.1525-.31628e-1*i	1.1833+.12113*i
71,72	1.1833-.12113*i	1.6010-.41826e-2*i
73,74	.97288-.18507*i	1.9897+.29915*i
75,76	1.1833-.12113*i	1.2691-.72863e-1*i
77,78	.98123-.75421e-2*i	.94329+.41135*i
79,80	1.0690+.26889*i	.98434-.16037e-1*i

Como muestra la Tabla IV, en efecto se tienen soluciones repetidas. Por ejemplo, las soluciones 5 y 6 prácticamente son las mismas.

Finalmente, cabe mencionar que cuando se aplica el método de Newton-Raphson por sí solo, es muy común el pensar en una solución única y con ciertas restricciones de convergencia [23]. En esta sección se muestra cómo una combinación del método de homotopía y el de Newton-Raphson amplían la posibilidad de encontrar más soluciones con el simple hecho de cambiar el sistema inicial de valores propuestos, eso sin mencionar la gran ventaja que representa el no tener limitaciones en la selección de la función auxiliar de homotopía  $g(w)$ .

En resumen, el método de Newton-homotopía es un recurso matemático que permite determinar todas las soluciones reales de un sistema de ecuaciones no-lineales.

#### IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta un método que permite resolver el análisis directo de posición de un manipulador paralelo tipo Gough-Stewart. A diferencia de la mayoría de las contribuciones relacionadas con el tema, la presente investigación es aplicable a manipuladores compuestos de plataformas planas y tridimensionales, es decir, la plataforma móvil y la base pueden ser poliedros. Las ecuaciones de clausura se formulan de acuerdo a una base ortonormal de tres vectores unitarios ubicados en la plataforma móvil y un vector de posición que relaciona la ubicación de la plataforma móvil con respecto a la base. Lo anterior conlleva, en el caso general, a un sistema de ecuaciones no-lineales con doce variables por determinar. Dicho sistema es reducible a uno de nueve variables en el caso de la plataforma móvil plana. Posteriormente, el sistema de ecuaciones no-lineales se resuelve de forma efectiva por medio de una combinación del método de homotopía y el de Newton-Raphson. El método se ilustra por medio de un ejemplo numérico el cual consiste en determinar todas las configuraciones reales que el manipulador puede alcanzar dado un conjunto de longitudes de las extremidades. El método permite determinar un total de seis soluciones reales. Finalmente, los resultados se comprobaron utilizando otra alternativa como lo es la obtención de la solución completa del ejemplo numérico por medio del programa de computadora de acceso gratuito PHCPack [20].

#### AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México por su valioso apoyo a través de su Sistema Nacional de Investigadores.

#### REFERENCIAS

- [1] V.E. Gough, "Contribution to discussion of papers on research in automobile stability," in: *Proceedings of the Automobile Division of the Institution of Mechanical Engineers*, New York, NY, 1957, pp. 392-394.
- [2] V.E. Gough, V.E. and S.G. Whitehall, "Universal tyre test machine," in: *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, 1962, pp. 117-137.
- [3] D. Stewart, "A platform with six degrees of freedom," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 180, no. 1, pp. 371-386, 1965.
- [4] D. Stewart, "A platform with six degrees of freedom: a new form of mechanical linkage which enables a platform to move simultaneously in all six degrees of freedom developed by Elliot-automation," *Aircr. Eng. Aerosp. Tec.*, vol. 38, no. 4, pp. 30-35, 1966.
- [5] J. Gallardo-Alvarado, *J. Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- [6] J.C. Faugere, and D. Lazard, "Combinatorial classes of parallel manipulators," *Mech. Mach. Theory*, vol. 30, no. 6, pp. 765-776, 1995.
- [7] D. Lazard, "On the representation of rigid-body motions and its applications to generalized platforms," in *Computational Kinematics*, J. Angeles, P. Kovac, and G. Hommel, G. (eds.), , Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 1993, pp. 175-181.
- [8] B. Mourrain, "The 40 generic positions of a parallel robot," in: *Proceedings of ISSAC '93*, Kiev, ACM Press, 1993, pp. 173-182.
- [9] M. Raghavan, "The Stewart platform of general geometry has 40 configurations," *ASME J. Mech. Des.*, vol. 115, pp. 277-282, 1993.
- [10] D. Gan, Q. Liao, J.S. Dai, and L.D. Seneviratne, "Forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism using Gröbner bases," *Mech. and Mach. Theory*, vol. 44, pp. 1640-1647, 2009.

- [11] M.L. Husty, "An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms," *Mech. Mach. Theory*, vol. 31, no. 4, pp. 365-379, 1996.
- [12] C. Innocenti, "Forward kinematics in polynomial form of the general Stewart platform," *ASME J. Mech. Des.*, vol. 123, no. 2, pp. 254-260, 2001.
- [13] L. Rolland, "Certified solving of the forward kinematics problem with an exact algebraic method for the general parallel manipulator," *Adv. Robot.*, vol. 19, pp. 995-1025, 2005.
- [14] C.W. Wampler, "Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using Soma coordinates," *Mech. Mach. Theory*, vol. 31, no. 3, pp. 331-337, 1996.
- [15] X.L. Yang, H.T. Wu, Y. Li, and B. Chen, "A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation," *Mech. Mach. Theory*, vol. 107, pp. 27-36, 2017.
- [16] T.-Y. Lee, and J.-K. Shim, "Forward kinematics of the general 6-6 Stewart platform using algebraic elimination," *Mech. Mach. Theory*, vol. 36, no. 9, pp. 1073-1085, 2001.
- [17] W. Zhou, W. Chen, H. Liu, and X. Li, "A new forward kinematic algorithm for a general Stewart platform," *Mech. Mach. Theory*, vol. 87, pp. 177-190, 2015.
- [18] F. Wei, S. Wei, Y. Zhang, and Q. Liao, "Algebraic solution for the forward displacement analysis of the general 6-6 Stewart mechanism," *Chinese J. Mech. Eng.*, vol. 29, no. 1, pp. 58-62, 2016.
- [19] T.-M. Wu, "A study of convergence on the Newton-homotopy continuation method," *Appl. Math. Comput.*, vol. 168, pp. 1169-1174, 2005.
- [20] T.-M. Wu, "The inverse kinematics problem of spatial 4P3R robot manipulator by the homotopy continuation method with an adjustable auxiliary homotopy function," *Nonlinear Analysis*, vol. 64, pp. 2373-2380, 2006.
- [21] A. Baskar, and S. Bandyopadhyay, "An algorithm to compute the finite roots of large systems of polynomial equations arising in kinematic synthesis," *Mech. Mach. Theory*, vol. 133, pp. 493-513, 2019.
- [22] J. Verschelde, "Algorithm 795: PHCpack: a general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation," *ACM Trans. Math. Soft.*, vol. 25, no. 2, pp. 251-276, 1999.
- [23] M.A. Garcia-Murillo, J. Gallardo-Alvarado, R. Rodriguez-Castro, and L.A. Alcaraz-Caracheo, "A new four-degrees-of-freedom parallel manipulator," *IEEE Lat. Am. T.*, vol. 15, no. 5, pp. 928-934, 2017.



**Luis A. Alcaraz** Obtuvo el título de Ingeniero Mecánico y el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica ambos en el Instituto Tecnológico de Celaya, TecNM, México, en los años 2003 y 2006, respectivamente. Es Doctor en Ciencias en Ingeniería Mecánica por el Instituto Politécnico Nacional, grado que obtuvo en el 2012.

El Dr. Alcaraz es actualmente profesor de tiempo completo en el Departamento de Ingeniería Mecatrónica del Instituto Tecnológico de Celaya y miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) de México. Sus áreas de interés son el diseño de máquinas y el comportamiento mecánico de materiales.



**Jaime Gallardo** Obtuvo el título de Ingeniero Industrial Mecánico y el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería Mecánica ambos en el Instituto Tecnológico de Celaya, TecNM, México, en los años 1985 y 1988 respectivamente. Es Doctor en Ciencias en Ingeniería Eléctrica por el Instituto Tecnológico de La Laguna, TecNM, México; grado que

obtuvo en el año 1999.

El Dr. Gallardo es profesor de tiempo completo en el Departamento de Ingeniería Mecánica del Instituto Tecnológico de Celaya y miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) de México. Sus áreas de interés comprenden cinemática y dinámica del cuerpo rígido con aplicaciones en manipuladores robóticos, álgebras de Lie y teoría de tornillos. Es editor asociado de la revista *Mathematical Problems in Engineering*, autor/coautor de más de cincuenta artículos en revistas JCR y autor del libro "Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory".