

# Analysis of Controllability, Observability and Stabilization for a Class of Systems Described by Takagi-Sugeno Fuzzy Models by Means of Fuzzy Pole Assignment

T. Hernández, A. Grande, J. Rodríguez, L. Páramo, R. Tapia, and J. Meda, *Member, IEEE*

**Abstract**—The present work is concerned to solve the problem of nonlinear robotic control systems on the basis of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. In addition, controllability and observability studies for T-S fuzzy model systems are considered for Single-Input Single-Output (SISO) and Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) systems. In particular, the robust pole assignment approach is extended to the fuzzy field. This approach is used to design fuzzy stabilizers and fuzzy observers directly on the overall T-S fuzzy system. The latter one is the representation of the nonlinear robotic system, which is linearized around certain operation regions. The suggested method is considered for either SISO or MIMO systems. Furthermore, the method allows inducing an arbitrary behavior into the fuzzy plant in a relatively easy way. Two examples are used to verify the effectiveness of the proposed approach. The results are compared with the well-known Parallel Distributed Compensation (PDC) method, which is designed on the basis of Linear Matrix Inequalities (LMIs).

**Index Terms**—Takagi-Sugeno Fuzzy Model, Fuzzy Control Systems, Fuzzy Controllability, Fuzzy Observability, Robust Pole Assignment.

## I. INTRODUCCIÓN

LOS sistemas robóticos adquieren cada vez más importancia en muchos campos de la ciencia, la industria e incluso en el hogar (robots domésticos). Esta tendencia impulsa la búsqueda de métodos prácticos de control [1] que sean más robustos [2] y que garanticen el desempeño de estos sistemas.

En un número considerable de casos los sistemas robóticos están descritos por modelos no lineales, complejos y de gran interés en diferentes áreas de aplicación [3], [4], [5] y [6].

Afortunadamente, el modelado difuso Takagi-Sugeno (T-S) permite aproximar la dinámica no lineal mediante la combinación de subsistemas lineales locales. En consecuencia, es posible simplificar el análisis y diseño de los controladores. Muchos de estos resultados se encuentran publicados en [1], [7], [8], [9], [10], [11], [12] y [13].

T. Hernández, Universidad Politécnica de Pachuca, México, tonatiuh@upp.edu.mx.

A. Grande, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, agrandem1500@alumno.ipn.mx.

J. Rodríguez, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, jrvalsonica@hotmail.com.

L. A. Páramo, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, paramo\_lualb@hotmail.com.

R. Tapia, Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de león, México, rtapiah@conacyt.mx.

J. A. Meda, SEPI-ESIME Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, jmedac@ipn.mx.

En [14] particularmente, se presenta el análisis de estabilidad con base en el método directo de Lyapunov, donde se propone una función candidata y se establece un criterio de estabilidad local en los parámetros del sistema, finalmente el principio de invariancia de LaSalle se utiliza para garantizar la estabilidad asintótica. Como es de esperar, uno de los principales problemas en el diseño del control difuso es el de asegurar la estabilidad global y robusta del sistema bajo la influencia de la señal de control. Otros enfoques de estabilidad difusa se pueden encontrar en trabajos como [15], [16],[17], [18], [19] y [20].

Entre los métodos de estabilidad difusa existentes, se tiene un resultado particularmente interesante, debido a su simplicidad para estabilizar modelos difusos tipo T-S, conocido como compensador paralelo distribuido (PDC, Parallel Distributed Compensator). La idea principal del método PDC es diseñar de forma distribuida cada regla de control, compensando cada regla del modelo difuso T-S, además, se obtiene una condición de estabilidad con base en el enfoque de Lyapunov y se expresa en términos de un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI) [21]. Por lo tanto, el diseño del estabilizador difuso se reduce al problema de la búsqueda numérica de una matriz común de Lyapunov y un conjunto de ganancias locales que satisfagan las desigualdades antes mencionadas [13].

Sin embargo, el PDC es en general, un método conservador y las condiciones de equilibrio no se pueden imponer fácilmente, (véase el ejemplo 2). El lector puede consultar, [14], [22], [23], [18], [24], [25] y [26] y sus referencias, donde se estudian enfoques más relajados de estabilidad difusa.

Es importante mencionar que en [27], se muestra un método para estabilizar una clase de sistemas difusos T-S en términos de la fórmula de Ackermann, la idea principal es ubicar de forma deseada un conjunto de valores propios difusos y construir el polinomio característico, además, mediante el teorema de Cayley-Hamilton y la matriz de controlabilidad se calcula el vector de ganancias para el estabilizador difuso no lineal, asimismo, en [27] se propone el diseño de un observador difuso tipo T-S bajo el mismo enfoque. Sin embargo, esta técnica tiene la desventaja que sólo se pueden aplicar a sistemas de una sola entrada. En [10], la inclusión de nuevas funciones de interpolación permite diseñar observadores y controladores difusos mientras se mantienen los valores propios definidos en los subsistemas lineales locales.

Motivados por extender la asignación de valores propios a los sistemas difusos con varias entradas, este trabajo propone un método alternativo para estabilizar una clase de sistemas difusos tipo T-S a través de la consideración de algunas propiedades del sistema en lazo cerrado. El enfoque dado en el presente trabajo es válido tanto para sistemas SISO como para sistemas de múltiples entradas MIMO. Además, se muestran estudios de controlabilidad y de observabilidad con el fin de verificar a priori la existencia del estabilizador difuso.

Las contribuciones de este trabajo se pueden resumir de la siguiente manera:

- Un enfoque práctico, a través de la asignación de polos, para lograr la estabilización arbitraria de los sistemas difusos T-S, tanto para sistemas SISO como MIMO.
- El análisis de las condiciones de existencia de un estabilizador difuso general, para todo  $t \geq 0$ , tomando en cuenta, como máximo, dos reglas difusas activadas en el mismo instante.
- Un algoritmo de fácil implementación en software matemático como Matlab o Mathematica.
- Un análisis de controlabilidad y observabilidad para sistemas difusos T-S del tipo SISO como MIMO.

## II. EL MODELO DIFUSO TIPO T-S

Considere el sistema no lineal definido por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t)), \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado de la planta, y  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada. Tomohiro Takagi y Michio Sugeno propusieron un modelo difuso compuesto por un conjunto de subsistemas lineales “mezclados” adecuadamente por sentencias del tipo SI-ENTONCES capaces de relacionar el conocimiento físico, características lingüísticas y las propiedades del sistema. Este modelo representa con éxito un sistema no lineal, al menos dentro de una región predefinida del espacio de fase [28],[11]

### Modelo

Regla  $i$ :

SI  $z_1(t)$  es  $M_1^i$  y  $\dots$  y  $z_p(t)$  es  $M_p^i$ ,

$$\text{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) &= C_i x(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r. \tag{2}$$

donde  $r$  es el número de reglas difusas del modelo;  $p$  es el número de conjuntos difusos; las reglas  $M_j^i$  con  $i = 1, 2, \dots, r$ , y  $j = 1, 2, \dots, p$ , están definidas a partir del conocimiento previo de la dinámica del sistema;  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ .

Entonces, dado un par  $(x(t), u(t))$  la dinámica del sistema difuso se infiere de la siguiente forma [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados de la planta,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es la señal de entrada al sistema,  $h_i(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , es el peso normalizado de cada regla, el cual depende de la

función de membresía para la variable premisa  $z_j$  en  $M_j^i$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , es decir,

$$\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)), \quad h_i(z(t)) = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(t))}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0, \tag{5}$$

para toda  $t$ , donde  $M_j^i(z_j(t))$  es el valor de la función de membresía de  $z_j(t)$  en  $M_j^i$  con  $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]$  como una función de  $x(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  y  $j = 1, 2, \dots, p$ .

A partir de (1) el sistema difuso se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t), \\ y(t) &= C(x(t))x(t), \end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned} A(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i, \quad B(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) B_i, \\ C(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i. \end{aligned}$$

En las siguientes secciones, se analizará la controlabilidad y observabilidad de los modelos difusos T-S mediante la extensión de algunos resultados conocidos para sistemas lineales variantes en el tiempo.

## III. ANÁLISIS DE CONTROLABILIDAD PARA SISTEMAS DIFUSOS

Para los sistemas lineales invariantes en el tiempo las condiciones de controlabilidad se exponen en el siguiente teorema [29].

**Teorema 1.** *Un sistema lineal es definido como*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{7}$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices constantes de dimensión  $n \times n$ ,  $n \times m$  y  $q \times n$ , respectivamente; se dice que el sistema es controlable si y sólo si la matriz de controlabilidad  $C$ , definida como

$$C = [ B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B ], \tag{8}$$

tiene rango pleno, es decir, igual a  $n$ .

*Proof.* Ver [30]. □

Por otra parte, en [30] se dan las condiciones de controlabilidad para sistemas lineales variantes en el tiempo, definidos como  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $A(t)$  y  $B(t)$  son continuamente diferenciables hasta  $n - 1$ .

Sean las matrices  $C_i(t)$  donde

$$\begin{aligned} C_1(t) &= B(t), \\ C_k(t) &= A(t)C_{k-1}(t) - \dot{C}_{k-1}(t), \end{aligned}$$

para todo  $k = 2, \dots, n$ .

**Teorema 2.** *Un sistema lineal variante en el tiempo [31] es controlable en  $[t_0, t_1]$  si y solo si existe un punto  $\tau \in [t_0, t_1]$ , en el cual la matriz*

$$\mathbf{C}(t) = [ \mathbf{C}_1(t) \quad \dots \quad \mathbf{C}_n(t) ], \quad (9)$$

tiene rango pleno igual a  $n$ .

Es importante mencionar que (9) equivale a  $\mathbf{C}(t) = [ B(t) \quad A(t)B(t) \quad A^2(t)B(t) \quad \dots \quad A^{n-1}(t)B(t) ]$ , cuando el sistema se considera como lentamente variante en el tiempo [10], [32].

*Proof.* La comprobación se obtiene directamente del Teorema 1  $\square$

#### A. Controlabilidad de Sistemas Difusos

Los resultados anteriores se pueden extender a sistemas difusos verificando el rango de la matriz de controlabilidad definida como:

$$\mathbf{C}(x(t)) = [ \zeta_0(t) \quad \zeta_1(t) \quad \dots \quad \zeta_n(t) ] \quad (10)$$

donde  $\zeta_0(t) = B(x(t))$  y  $\zeta_j(t) = A(x(t))\zeta_{j-1}(t) - \dot{\zeta}_{j-1}(t)$ , además, cuando el sistema difuso varía lentamente en el tiempo [10], [32], dicha matriz toma la siguiente forma:

$$\mathbf{C}(x(t)) = [ B(x(t)) \quad A(x(t))B(x(t)) \quad A^2(x(t))B(x(t)) \\ \dots \quad A^{n-1}(x(t))B(x(t)) ] \quad (11)$$

Para garantizar la controlabilidad de (6), es necesario tomar en cuenta  $r - 1$  regiones de interpolación difusas y construir, para cada región, una matriz  $\mathbf{C}_i(x(t))$  correspondiente.

Entonces, el análisis de controlabilidad de dos subsistemas adyacentes, se puede verificar por medio de la existencia de  $n$  columnas linealmente independientes de la matriz  $\mathbf{C}_i(x(t))$ , teniendo en cuenta que  $h_i(z(t)) + h_j(z(t)) = 1, \forall i, j = 1, \dots, r$ , y que las regiones de interpolación difusas cumplan  $h_i \cap h_j \neq 0$ .

Este procedimiento se simplifica cuando un máximo de dos reglas difusas se activan en el mismo instante de tiempo para cualquier  $t \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ . Por lo tanto, considerando  $h_i(z(t)) = 1 - h_j(z(t))$  la matriz de controlabilidad difusa  $\mathbf{C}_i(x(t))$  para la región de interpolación definida por las reglas de  $i$  y  $j$ , solamente dependerá del valor de la función de membresía  $h_j(z(t))$ . Entonces, (6) será controlable si las  $r - 1$  matrices de controlabilidad, que se definen en las regiones de interpolación difusas correspondientes, tienen rango pleno para  $h_j(z(t)) \in [0, 1]$ .

Del análisis anterior, se formula el siguiente teorema.

**Teorema 3.** *Un modelo difuso T-S de la forma (6) con no más de dos reglas difusas activadas al mismo instante para cualquier  $t \geq 0$  y  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ , es controlable si las  $r - 1$  matrices de controlabilidad correspondientes a la región de interpolación difusa, definidas por (11), tienen rango pleno.*

*Proof.* La comprobación se obtiene directamente del Teorema 1 y 2  $\square$

**Observación 1.** *Un conjunto de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente independientes si la ecuación:  $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$  se cumple únicamente para  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son constantes. El procedimiento para verificar la independencia lineal para todo  $t \geq 0$  se puede determinar por la solución de un conjunto de ecuaciones con  $c_1, c_2, \dots, c_n$  y posiblemente  $h_j(z(t))$  incógnitas. Sin embargo, cuando aparezca el término  $h_j(z(t))$  será necesario verificar que  $h_j(z(t)) \in [0, 1]$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Observación 2.** *Se dice que un sistema es observable si es posible conocer el estado inicial  $x(t_0)$  a partir de la observación de la salida  $y(t)$  y teniendo conocimiento de la entrada  $u(t)$  para un tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$  [33]–[35]. En [27] se define la observabilidad para sistemas difusos de una sola entrada y múltiples salidas. Por otra parte, por el principio de dualidad es posible definir la observabilidad del sistema (6) mediante el cambio del par de matrices  $(A(x(t)), B(x(t)))$  por  $(A(x(t))^T, C(x(t))^T)$  con el mismo análisis ya mencionado*

#### IV. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DEL ESTABILIZADOR DIFUSO PARA SISTEMAS MIMO

En esta sección se investigan las condiciones de existencia del estabilizador difuso para sistemas difusos T-S con una sola entrada y con múltiples entradas. En [36], [2] y [37] se estudian los sistemas multivariables lineales invariantes en el tiempo y se discuten los problemas acerca de la asignación de polos por retroalimentación de estados y la asignación robusta. La asignación de polos por retroalimentación de estados (problema 1) se formula de la siguiente manera: Dadas las matrices reales  $(A, B)$ , de orden  $(n \times n, n \times m)$ , respectivamente, y un conjunto cerrado de  $n$  números complejos,  $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ , bajo la conjugación compleja, encontrar una matriz  $K$  real de  $m \times n$ , tal que los valores propios de  $A + BK$  sean  $\lambda_l$ , con  $l = 1, 2, \dots, n$ . Mientras que la asignación robusta de polos (problema 2) se enuncia como: Dada  $(A, B)$  y  $L$  (como en el problema 1), encontrar una matriz real  $F$  y una matriz  $X$  no singular que satisfagan  $(A + BK)X = X\Lambda$ , donde  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ .

En el presente trabajo, el problema 1 puede ser visto como un sistema no lineal descrito de la forma (6) con matrices difusas  $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , reales para todo  $t$ , y un conjunto de números complejos:  $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  cerrado bajo la conjugación compleja, y buscar una matriz difusa  $K(x(t))$  real para todo  $t$ , de manera que los valores propios de  $A(x(t)) + B(x(t))K(x(t))$  sean  $\lambda_l$  para todo  $l = 1, 2, \dots, n$  [19].

Por otro lado, el problema 2 puede ser visto como sigue: Dadas las matrices  $A(x(t)), B(x(t))$  y  $L$ , definidas como en el problema anterior, se debe encontrar una matriz  $X(x(t))$  no singular y una matriz  $K(x(t))$ , ambas reales, para todo  $t$  que satisfagan

$$[A(x(t)) + B(x(t))K(x(t))]X(x(t)) = X(x(t))\Lambda, \quad (12)$$

donde  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . sí y solo si

$$X_1^T(x(t))[A(x(t))X(x(t)) - X(x(t))\Lambda] = 0 \quad (13)$$

donde  $U_1(x(t))$  se obtiene de la descomposición de  $B(x(t))$ , es decir,  $B(x(t)) = \{U_0(x(t)) U_1(x(t))\} \begin{Bmatrix} Z(x(t)) \\ 0 \end{Bmatrix}$ , alternativamente, la descomposición **QR** [38] se puede utilizar para obtener  $U_1(x(t))$ . Por lo tanto, con base en la asignación de polos, la matriz  $X(x(t))$ , no singular y real para todo  $t$ , se construye para garantizar la existencia del estabilizador del sistema (6). En otras palabras, el sistema difuso T-S (6) es controlable si es posible encontrar dicha matriz.

Es importante mencionar que el enfoque propuesto puede aplicarse a modelos difusos T-S con más de dos reglas, con la restricción de que, como máximo, solo dos reglas estén activas al mismo tiempo, ver Fig. 6b.

Ciertamente, la existencia del estabilizador para el sistema difuso general T-S, con un máximo de dos funciones de membresía activadas al mismo tiempo, se puede determinar mediante la verificación de la singularidad de la matrices  $X_i(x(t))$ , para todo  $i = 1, \dots, r-1$  regiones de interpolación difusas, de manera similar a la dada en [39]. La existencia del estabilizador difuso para dos subsistemas adyacentes puede analizar a través del determinante de  $X_i(x(t))$ , teniendo en cuenta que  $h_i(z(t)) + h_j(x(t)) = 1$ , para todo  $i, j = 1, \dots, r$ , y que las regiones de interpolación difusas cumplen  $h_i \cap h_j \neq 0$

Por lo tanto, considerando  $h_i(z(t)) = 1 - h_j(z(t))$ , la matriz  $X(x(t))$  para la región de interpolación definida por las reglas  $i$  y  $j$  dependerá solo del valor de la función de membresía  $h_j(z(t))$ . Luego,  $X(x(t))$  será no singular en la región difusa en cuestión, si al resolver  $\det(X(x(t))) = 0$  para  $h_j(z(t)) \in [0, 1]$  no se encuentran raíces en el intervalo  $[0, 1]$ . Es decir, las raíces  $h_j(x(t))$  de  $\det(X(t)) = 0$  fuera del intervalo  $[0, 1]$  no implican singularidad en  $X(x(t))$  ya que en los modelos T-S se cumple que  $h_j(z(t)) \in [0, 1]$ , con  $j = 1, \dots, r$ .

Por último, la construcción de  $X(x(t))$ , de ser posible, se obtiene a partir de  $\mathcal{N}\{U_1^T(x(t))(A(x(t)) - \lambda_1 I)\}$  para cada una de las  $r-1$  regiones de interpolación donde  $\mathcal{N}\{M\}$  indica el espacio nulo [38].

**Observación 3.** Tenga en cuenta que las matrices dadas  $A(x(t))$ ,  $B(x(t))$ ,  $K(x(t))$  y la matriz no singular  $X(x(t))$ , deben satisfacer  $(A(x(t)) + B(x(t))K(x(t))X(x(t))) = X(x(t))\Lambda$ , con el propósito de asegurar la existencia del estabilizador.

## V. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DIFUSA A TRAVÉS DE LA ASIGNACIÓN ROBUSTA DE POLOS

En esta sección se propone un estabilizador difuso para sistemas tipo T-S mediante la localización arbitraria de polos difusos en lazo cerrado dentro del plano complejo. La idea consiste en combinar el enfoque de asignación de polos [38] y el modelo difuso TS descrito en (6) de la siguiente forma:

**Algoritmo 1.** Compensador por asignación de polos.

- Calcular la descomposición de la matriz de entrada  $B(x(t))$  con el fin de determinar  $U_0(x(t))$ ,  $U_1(x(t))$  y  $Z(x(t))$ .
- Construir, de ser posible  $X(x(t))$  mediante la selección de  $n$  vectores linealmente independientes de  $\mathcal{N}\{U_1^T(x(t))(A(x(t)) - \lambda_1 I)\}$ .

- La ganancia  $K(x(t))$  se calcula a partir de  $K(x(t)) = Z^{-1}(x(t))U_0^T(x(t))(X(x(t))\Lambda X^{-1}(x(t)) - A(x(t)))$ ,
- Finalmente, el estabilizador difuso no lineal será definido por  $u(t) = K(x(t))x(t)$  para el sistema en lazo cerrado definido como  $\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t)$ , ver Fig.1

**Observación 4.** Es importante mencionar que este método puede aplicarse a sistemas difusos T-S con más de dos reglas, ver el ejemplo 2. Sin embargo, como se ha explicado antes, este enfoque requiere que a lo menos dos reglas se activen simultáneamente, con el fin de garantizar la no singularidad de  $X(x(t))$  dentro de las regiones de interpolación por medio del  $\det(X(x(t)))$  [39].

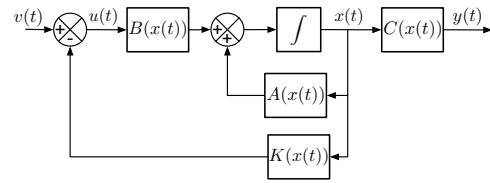


Fig. 1. Sistema difuso con retroalimentación de estado.

**Observación 5.** Es importante mencionar que la observabilidad del sistema puede analizarse de forma similar al estabilizador, es decir, verificar el rango completo de la matriz de observabilidad difusa, con la diferencia de que ahora para obtener  $K(x_e(t))$  las matrices  $(A(x(t)))^T$ ,  $C(x(t))^T$  se usan [38] ver Fig.2

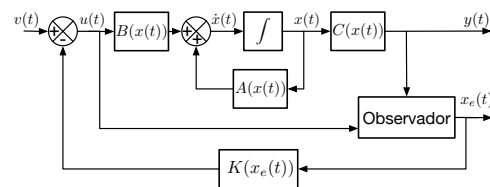


Fig. 2. Sistema difuso con observador y retroalimentación.

## VI. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan dos sistemas mecatrónicos con el fin de ilustrar la aplicación del enfoque propuesto.

1) *Péndulo invertido sobre un carro:* Se considera el problema de la estabilización del péndulo invertido en un carro representado en la Fig.3a. Las ecuaciones de movimiento para este sistema son las siguientes [11]:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (14)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{a}{4/3l - aml \cos^2(x_1(t))}, \quad (15)$$

con  $a = g(x_1(t)) - amlx_2^2(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t))u(t)$  donde  $x_1(t)$  denota el ángulo (en radianes) del péndulo desde el eje vertical y  $x_2(t)$  es la velocidad angular;  $g = 9.8m/s^2$  es la constante de gravedad,  $m$  es la masa del péndulo,  $M$  es la masa del carro,  $2l$  es la longitud del péndulo, y  $u$  es la fuerza aplicada al carro (en Newtons); y  $a = 1/(m + M)$ . Se

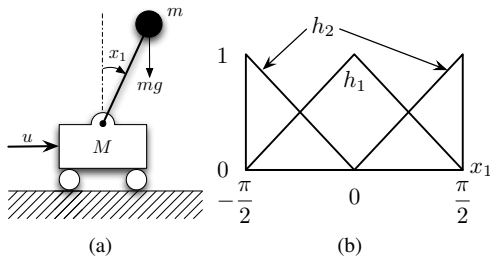


Fig. 3. a) Péndulo invertido y b) Funciones de membresía del modelo difuso de dos reglas.

consideraron los siguientes valores de los parámetros:  $m = 1.0\text{kg}$ ,  $M = 4.0\text{kg}$ ,  $2l = 1.0\text{m}$ . El objetivo es estabilizar el sistema desde una condición inicial dentro del rango de  $x_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Con este fin, un modelo difuso que representa la dinámica no lineal es:

Regla-1 SI  $x_1(t)$  es aproximadamente 0,

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t),$$

Regla-2 SI  $x_1(t)$  es aproximadamente  $\pm\pi/2$  ( $|x_1| < \pi/2$ ),

$$\text{ENTONCES } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t),$$

Con

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix},$$

donde  $\beta = \cos(88^\circ\pi/180)$ . Para aplicar el algoritmo propuesto, la representación del sistema difuso de forma general como en (6) es necesaria, por lo que  $A(x(t))$  y  $B(x(t))$  son:

$$A(x_1(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 17.2941h_1(x_1(t)) + 9.3600h_2(x_1(t)) & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(x_1(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1765 + h_1(x_1(t)) - 0.00523h_2(x_1(t)) \end{bmatrix}.$$

Con el fin de analizar la controlabilidad del sistema difuso completo, es necesario que al menos dos reglas estén activadas al mismo tiempo. Entonces, aplicando (11) la matriz de controlabilidad difusa está definida como

$$C(x(t)) = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix},$$

donde  $c_{1,1} = 0$ ,  $c_{1,2} = -0.1712h_1x_1(x_1(t)) - 0.005236$ ,  $c_{2,1} = -0.1712h_1x_1(x_1(t)) - 0.005236$  y  $c_{2,2} = 0$ , además, aplicando la ecuación de independencia lineal a esta matriz se tiene  $c_{1,1}[-\pi/2, \pi/2] = 0$ ,  $c_{2,1}[-\pi/2, \pi/2] = 0$ ,  $h_1(x_1(t)) = -0.0306$ . Como se puede observar, la matriz contiene  $n$  vectores linealmente independientes y el valor correspondiente para  $h_1(x_1(t))$  no afecta al análisis de controlabilidad ya que no pertenece al conjunto  $[0 \ 1]$ . Tenga en cuenta que el valor de  $h_1(x_1(t))$  se obtiene substituyendo directamente el valor de  $x_1$  en la función de membresía. Por lo tanto, el sistema es difuso controlable.

Por otra parte, y de acuerdo al algoritmo propuesto tenemos:

- 1) Calcular la descomposición de  $B(x(t))$
- 2) La matriz  $X(x(t))$  resultante (constante) está dada por

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con  $\det(X) = -0.5$ .

- 3) Escoger los valores propios para  $A(x(t)) + B(x(t))K(x(t))$  como  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$ , es decir  $\Lambda = \text{diag}\{-1 \ -2\}$ , además, considerar que  $h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$ .
- 4) El estabilizador difuso  $u(t) = K(x_1(t))$  se aplica al sistema con condiciones iniciales  $x(0) = [1/36\pi \ 0]^T$ .

La Fig.4a muestra el comportamiento asintótico del sistema difuso correspondiente a los vectores propios elegidos; por otra parte, en la Fig.4b se muestra la señal de control responsable de dicho comportamiento.

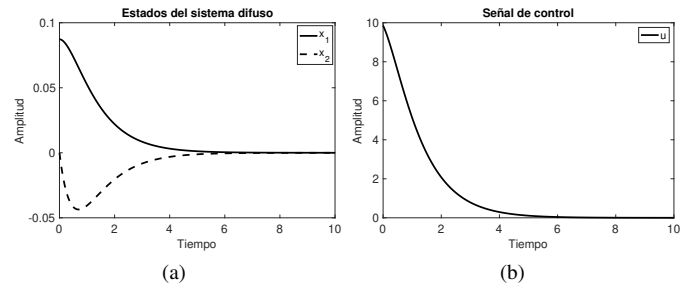


Fig. 4. a) Estados y b) Señal de control del modelo difuso de dos reglas con el controlador propuesto.

Para asegurar la efectividad del controlador propuesto, éste se aplica directamente al sistema no lineal definido en (14), obteniendo un resultado favorable en el comportamiento de dicho sistema, ver Fig. 5.

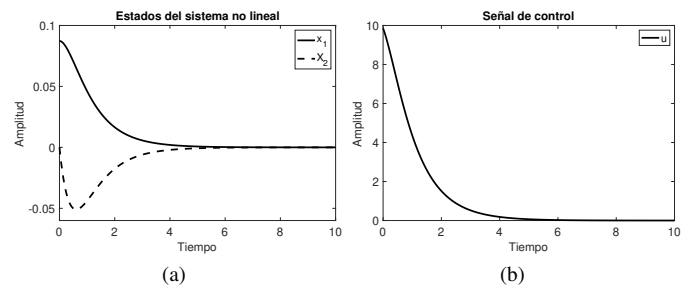


Fig. 5. a) Estados y b) Señal de control del modelo no lineal con el controlador propuesto.

Es importante mencionar que el sistema cuenta con una matriz de entrada de la forma  $B(x_1(t)) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , lo que implica una matriz  $X(x_1(t))$  única, reduciendo el problema considerablemente. Sin embargo, para sistemas con múltiples entradas  $C(x(t))$  es una matriz rectangular y la matriz  $X(x(t))$  no es única como se muestra en el ejercicio siguiente.

#### A. Brazo Robótico de Dos Grados de Libertad

Considere el problema de estabilizar un robot planar de dos grados de libertad mostrado en la Fig.6. La ecuación de

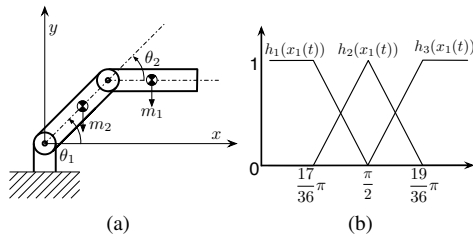


Fig. 6. a) Modelo de brazo robot de 2-DOF y b) Funciones de membresía del sistema robótico.

movimiento (Euler-Lagrange) para este sistema esta descrita por

$$\tau(t) = D(\theta)\ddot{\theta}(t) + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta),$$

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{11} \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_2(\theta_2)l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2(\theta_2)l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2}m_2(\theta_2)l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}, \quad c(\theta) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix},$$

con  $d_{11} = \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2l^2 + m_2 \cos(\theta_2)l^2$ ,  $d_{12} = \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 \cos(\theta_2)$ ,  $d_{21} = \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 \cos(\theta_2)$ ,  $d_{22} = \frac{1}{3}m_2l^2$ ,  $c_{11} = \frac{1}{2}m_1gl \cos(\theta_1) + \frac{1}{2}m_2gl \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2gl \cos(\theta_1)$ ,  $c_{21} = \frac{1}{2}m_2gl \cos(\theta_1 + \theta_2)$ , además,  $\theta_1 = x_1(t)$  denota el ángulo en radianes entre el eslabón rígido y el eje horizontal;  $\theta_2 = x_2(t)$  es ángulo también en radianes entre el eslabón externo respecto al primer eslabón;  $g = 9.8m/s^2$  es la constante de gravedad;  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los eslabones;  $l = l_1 = l_2$  son las longitudes de los eslabones, y  $(u_1, u_2)$  son los torques de entrada en  $[N \cdot m]$ . Para este caso los valores de los parámetros son:  $m_1 = 0.4kg$ ,  $m_2 = 0.3kg$  y  $l = 0.5m$ .

El modelo difuso que representa la dinámica no lineal alrededor de la posición vertical es:

- Regla-1 **SI**  $x_1(t)$  es aproximadamente  $(17/36)\pi$ ,  
ENTONCES  $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$ .
- Regla-2 **SI**  $x_1(t)$  es aproximadamente  $\pi/2$ ,  
ENTONCES  $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$ ,
- Regla-3 **SI**  $x_1(t)$  es aproximadamente  $(19/36)\pi$ ,  
ENTONCES  $\dot{x}(t) = A_3x(t) + B_3u(t)$ ,

Con las funciones de membresía representadas en la Fig. 6b. Por lo que el sistema difuso estará descrito como:  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}$ , con  $A_1 = A_3$  y  $B_1 = B_3$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25.58 & -20.93 & 0 & 0 \\ -34.39 & 81.65 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 25.89 & -20.93 & 0 & 0 \\ -34.31 & 82.40 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 19.04 & -47.50 \\ -47.50 & 158.48 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 19.20 & -48 \\ -48 & 160 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema difuso de forma general puede ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 = h_1(x_1(t))A_1(3, 1) + \dots + h_3(x_1(t))A_3(3, 1),$$

$$\alpha_2 = h_1(x_1(t))A_1(3, 2) + \dots + h_3(x_1(t))A_3(3, 2),$$

$$\alpha_3 = h_1(x_1(t))A_1(4, 1) + \dots + h_3(x_1(t))A_3(4, 1),$$

$$\alpha_4 = h_1(x_1(t))A_1(4, 2) + \dots + h_3(x_1(t))A_3(4, 2),$$

$$b_1 = h_1(x_1(t))B_1(3, 1) + \dots + h_3(x_1(t))B_3(3, 1),$$

$$b_2 = h_1(x_1(t))B_1(3, 2) + \dots + h_3(x_1(t))B_3(3, 2),$$

$$b_3 = h_1(x_1(t))B_1(4, 1) + \dots + h_3(x_1(t))B_3(4, 1),$$

$$b_4 = h_1(x_1(t))B_1(4, 2) + \dots + h_3(x_1(t))B_3(4, 2).$$

Además, se consideran dos regiones, donde solo dos funciones de membresía se activan al mismo tiempo, es decir,  $x_1 \in [17/36\pi \quad \pi/2]$  y  $x_1 \in [\pi/2 \quad 19/36\pi]$  y debido a que el sistema es simétrico. Entonces, las matrices de controlabilidad de estas regiones son iguales y el análisis de una implica el análisis de la región completa. Considerando  $h_1(x_1(t)) = 1 - h_2(x_1(t))$ , la matriz de controlabilidad está definida como:

$$C(x_1(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{1,3} & c_{1,4} & 0 & 0 & c_{1,7} & c_{1,8} \\ 0 & 0 & c_{2,3} & c_{2,4} & 0 & 0 & c_{2,7} & c_{2,8} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & 0 & 0 & c_{3,5} & c_{3,6} & 0 & 0 \\ c_{4,1} & c_{4,2} & 0 & 0 & c_{4,5} & c_{4,6} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde

$c_{3,1} = c_{1,3} = 0.1562h_2(x_1(t)) + 19.0437$ ,  $c_{1,4} = c_{3,2} = c_{2,3} = c_{1,4} = -0.4992h_2(x_1(t)) - 47.5007$ ,  $c_{2,4} = c_{4,2} = -1.5193h_2(x_1(t)) + 158.4806$ ,  $c_{3,5} = 0.1742h_2^2(x_1(t)) + 32.32h_2(x_1(t)) + 1482.0$ ,  $c_{4,5} = -0.518h_2^2(x_1(t)) - 99.26h_2(x_1(t)) - 4533.0$ ,  $c_{3,6} = -0.5374h_2^2(x_1(t)) - 99.24h_2(x_1(t)) - 4535.0$ ,  $c_{4,6} = 1.598h_2^2(x_1(t)) + 303.7h_2(x_1(t)) + 14588.0$ . Ahora bien, aplicando la ecuación de independencia lineal para los vectores de la matriz  $C(x(t))$  se obtiene  $c_1 = 0$ ;  $c_2 = 0$ ;  $c_3 = 0$ ;  $c_4 = 0$ ;  $c_5 = 0$ ;  $c_6 = 0$  y  $h_2(x_1(t)) = \alpha$ , donde  $\alpha$  puede tomar cualquier valor. Por lo tanto, el sistema es difuso controlable.

Para desarrollar un controlador ubicando polos y bajo el algoritmo 1, descomponer  $B(x(t))$  y a partir del espacio nulo escogemos un conjunto de vectores linealmente independientes y se genera la siguiente matriz  $X(x(t))$ :

$$X(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.833 & 0 \\ 0 & -0.666 & 0 & -0.769 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

además,  $\det(X) = -0.017$ . Luego, es posible obtener un estabilizador, ubicando polos de  $A(x_1(t)) + B(x_1(t))K(x_1(t))$  en  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1.5$ ,  $\lambda_3 = -1.2$  y  $\lambda_4 = -1.3$ , es decir,  $\Lambda = \text{diag}\{-1, -1.5, -1.2, -1.3\}$ , por lo tanto el cálculo del estabilizador estará dado por la ecuación:

$$K(x_1(t)) = Z^{-1}(x_1(t))U_0^T(x_1(t))[X(x_1(t))\Lambda X^{-1}(x_1(t)) - A(x_1(t))]$$

La Fig. 7 muestra los resultados aplicando la señal de control obtenida. Como se puede observar el método propuesto con el estabilizador difuso se comporta de forma favorable, vale la pena mencionar que diferente ubicación de polos favorece el decaimiento de los estados a la referencia. Sin embargo, como es de esperar, hay un incremento significativo en

la señal de control, en la Fig.8 se muestra el comportamiento del sistema difuso con diferente asignación de polos.

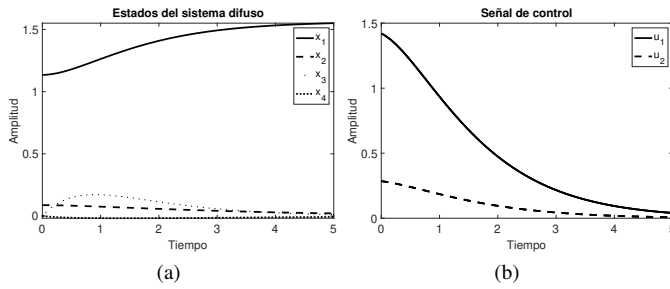


Fig. 7. a) Estados y b) control del sistema robótico bajo el controlador propuesto.

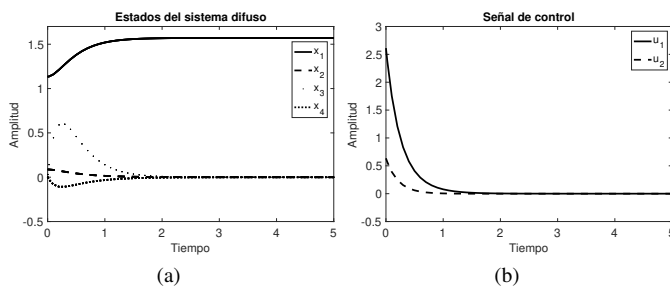


Fig. 8. a) Estados y b) control del sistema robótico bajo el controlador propuesto con diferente ubicación de polos  $\Lambda = \text{diag}[-3 \ -3 \ -5 \ -5]$ .

Finalmente, el método propuesto se compara con el estabilizador difuso obtenido directamente del PDC [29] definido por:  $u(t) = \sum_{i=1}^3 h_1(z(t))K_i x(t)$ , con:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.5778 & -7.0529 & 5.9867 & -20.5403 \\ -0.0669 & -2.6374 & 2.4155 & -6.1616 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.1906 & -4.9893 & 3.9908 & -13.7633 \\ -0.3114 & -2.0197 & 1.6081 & -4.1337 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.5778 & -7.0529 & 5.9867 & -20.5403 \\ -0.0669 & -2.6374 & 2.4155 & -6.1616 \end{bmatrix}.$$

Los resultados de la simulación con base en la aproximación del PDC se muestran en la Fig.9. Como se puede observar, al menos para este ejemplo, el método propuesto se comporta de manera suave respecto al mostrado por la aproximación con base en el PDC, además, este comportamiento se puede modificar ubicando polos de manera estratégica como se muestra en la Fig. 8.

## VII. CONCLUSIÓN

Se ha presentado la propiedad de controlabilidad difusa y el diseño de un estabilizador difuso para sistemas de tiempo continuo, con base en la combinación de modelado difuso T-S y la asignación de polos. La ventaja principal de este enfoque es su simplicidad relativa para verificar la propiedad controlabilidad difusa de estos sistemas, y una vez que esta propiedad se verifica, el estabilizador difuso se calcula fácilmente. Además, este enfoque permite imponer trayectorias arbitrarias para el

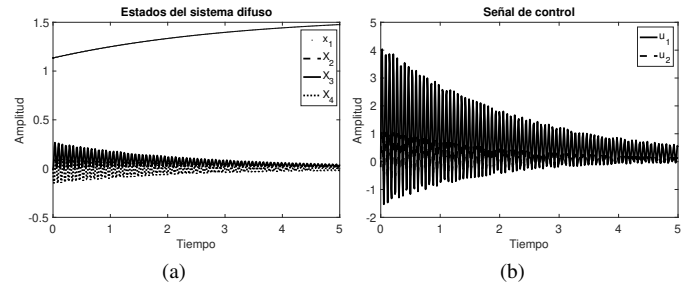


Fig. 9. a) Estados y b) control del sistema robótico bajo el controlador PDC.

equilibrio del sistema difuso por medio de la elección de valores propios difusos adecuados. Es importante mencionar que el enfoque es válido para sistemas de una sola entrada y múltiples entradas, la cual, es una ventaja significativa, en términos de implementación, cuando se compara con el enfoque dado en [27]. Dos ejemplos numéricos se utilizaron para ilustrar la validez del enfoque propuesto, incluso en los casos en que existen más de dos reglas difusas. Finalmente, a través del presente trabajo se propone un enfoque alternativo para encontrar el estabilizador difuso en sistemas tipo T-S en general; evitando cálculos complejos como los implicados en el enfoque de LMI, el método dado ofrece una forma sencilla de diseñar una ganancia difusa  $K(x(t))$  que, de existir, se obtiene por medio de software matemático como Matlab o Mathematica, al menos para modelos difusos T-S que cumplan con la observación 3.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la contribución del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo otorgado a través de la beca SNI (Sistema Nacional de Investigadores); y por el Instituto Politécnico Nacional (IPN) mediante las becas EDI (Estimulo al Desempeño de Investigadores), COFAA (Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas) y BEIFI (Beca de Estímulo Institucional de Formación de Investigadores).

## REFERENCIAS

- [1] L.-X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1997.
- [2] J. A. H. Riveros and G. R. Piedrahita, "Control for coupled process by collaborative set points movement over mimo systems," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 12, pp. 4663–4673, Dec 2016.
- [3] F. G. Rossomando and C. M. Soria, "Adaptive neural sliding mode control in discrete time for a scara robot arm," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 6, pp. 2556–2564, June 2016.
- [4] J. d. J. Rubio, P. Cruz, L. A. Paramo, J. A. Meda, D. Mujica, and R. S. Ortigoza, "Pid anti-vibration control of a robotic arm," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 7, pp. 3144–3150, July 2016.
- [5] K. Tanaka, T. Kosaki, and H. Wang, "Backing control problem of a mobile robot with multiple trailers: fuzzy modeling and lmi-based design," *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, vol. 28, no. 3, pp. 329–337, Aug 1998.
- [6] F. J. Torres, G. V. Guerrero, C. D. García, J. F. Gomez, M. Adam, and R. F. Escobar, "Master-slave synchronization of robot manipulators driven by induction motors," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 9, pp. 3986–3991, Sep. 2016.

- [7] I. Abdelmalek, N. Goléa, and M. Laid Hadjili, "A new fuzzy Lyapunov approach to non-quadratic stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy models," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 17, no. 1, 2007.
- [8] M. Biglarbegian, A. Sadeghian, and W. Melek, "On the accessibility/controllability of fuzzy control systems," *Information Sciences*, vol. 202, no. 0, pp. 58 – 72, 2012. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025512002290>
- [9] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [10] J. A. Meda-Campaña, A. Grande-Meza, J. de Jesús Rubio, R. Tapia-Herrera, T. Hernández-Cortés, A. V. Curtidor-López, L. A. Páramo-Carranza, and I. O. Cázares-Ramírez, "Design of stabilizers and observers for a class of multivariable t-s fuzzy models on the basis of new interpolation functions," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 26, no. 5, pp. 2649–2662, Oct 2018.
- [11] K. Tanaka and H. O. Wang, *Fuzzy Control Systems Design and Analysis. A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [12] T. Hernández-Cortés, D. E. Rivera-Arreola, and J. A. Meda-Campaña, "Sincronización de sistemas caóticos descritos por modelos t-s usando propiedades de regulación y observabilidad difusa," in *Revista del Diseño Innovativo*, vol. 1. ECORFAN-Taiwan, 2017, pp. 53–65.
- [13] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin, "Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model," *Proc. FUZZ-IFES*, pp. 531–538, 1995.
- [14] J. Kasac, B. Novakovic, D. Majetic, and D. Brezak, "Stability analysis of fuzzy robot control without fuzzy rule base," in *Neural Networks, 2003. Proceedings of the International Joint Conference on*, vol. 1, July 2003, pp. 310–315 vol.1.
- [15] Y.-Y. Cao and P. M. Frank, "Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear takagi-sugeno fuzzy models," *Fuzzy sets and systems*, vol. 124, pp. 213–229, 2001.
- [16] Z. Chen, Z. Li, and C. L. P. Chen, "Disturbance observer-based fuzzy control of uncertain mimo mechanical systems with input nonlinearities and its application to robotic exoskeleton," *IEEE Transactions on Cybernetics*, vol. 47, no. 4, pp. 984–994, April 2017.
- [17] B.-C. Ding, H.-X. Sun, and Y.-E. Qiao, "Stability analysis of T-S fuzzy control systems based on parameter-dependent Lyapunov function," *Acta Automatica Sinica*, vol. 31, no. 4, July 2005.
- [18] A. Schwung, T. Gussner, and J. Adamy, "Stability analysis of recurrent fuzzy systems: A hybrid system and SOS approach," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 19, no. 3, pp. 423–431, 2011.
- [19] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy sets Syst.*, vol. 45, no. 2, pp. 135–156, 1992.
- [20] J. Yoneyama, "Stability and stabilization of fuzzy time-delay systems," in *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*, Melbourne, Australia, 2004, pp. 1508–1515.
- [21] G. Shuli, H. Lina, and F. Xianjia, "Fuzzy observer and fuzzy controller design for a class of uncertain non-linear systems," *IET Control Theory Applications*, vol. 10, no. 5, pp. 517–525, 2016.
- [22] S. Pradeep and S. S. K., "Some recent results on the stability of linear time varying systems," *Sādhanā*, vol. 13, no. 3, 1988.
- [23] A. Sala and C. Ariño, "Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, vol. 37, no. 3, June 2007.
- [24] J. Xu, Y.-H. Chen, and H. Y. Guo, "On the foundations of fuzzy dynamical system theory : Controllability and observability," in *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 16, December 2014.
- [25] S. Zhou, G. Feng, J. Lam, and S. Xu, "Robust  $H_\infty$  control for discrete-time fuzzy systems via basis-dependent Lyapunov functions," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 174, pp. 197–217, 2005.
- [26] S. Zhou, J. Lam, and W. X. Zheng, "Control Design for Fuzzy Systems Based on Relaxed Nonquadratic Stability and  $H_\infty$  Performance Conditions," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 188–199, April 2007.
- [27] A. G. Meza, T. H. Cortes, A. V. C. Lopez, L. A. P. Carranza, R. T. Herrera, I. O. C. Ramirez, and J. A. M. Campana, "Analysis of fuzzy observability property for a class of ts fuzzy models," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, no. 4, pp. 595–602, April 2017.
- [28] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116–132, 1985.
- [29] K. Balachandran, V. Govindaraj, L. Rodríguez-Germá, and J. J. Trujillo, "Stabilizability of fractional dynamical systems," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 17, no. 2, pp. 511–531, Jun 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2478/s13540-014-0183-3>
- [30] V. N. Afanas'ev, V. B. Kolmanovskii, and V. R. Nosov, *Mathematical Theory Of Control Systems Design*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [31] V. Solo, "On the stability of slowly time-varying linear systems," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 7, pp. 331–350, 1994.
- [32] J. Meda-Campaña, J. Rodríguez-Valdez, T. Hernández-Cortés, R. Tapia-Herrera, and V. Nosov, "Analysis of the fuzzy controllability property and stabilization for a class of TS fuzzy models," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. PP, no. 99, p. On line, 2014.
- [33] T. Fang and J. Sun, "Controllability and observability of complex [r]-matrix time-varying impulsive systems," *Advances in Difference Equations*, vol. 2013, no. 1, p. 129, May 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-129>
- [34] V. Govindaraj and R. K. George, "Functional approach to observability and controllability of linear fractional dynamical systems," *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, vol. 15, no. 2, pp. 111–129, Jul 2017. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1080/1726037X.2017.1390191>
- [35] T. Rao, G. Kumar, C. Vasavi, and M. Murty, "Observability of fuzzy difference control systems," *International Journal of Chemical Sciences*, vol. 14, no. 4, pp. 2516–2526, 2016.
- [36] N. Dini, M. B. Menhaj, and A. Suratgar, "On the observability of a class of takagi-sugeno fuzzy systems," *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, vol. 3, no. 17, pp. 41–55, July 2013.
- [37] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, 2nd ed. New York: Springer, 1979.
- [38] J. Kautsky, N. Nichols, and P. Van-Dooren, "Robust pole assignment in linear state feedback," *International Journal Control*, vol. 41, no. 5, pp. 1129–1155, 1985.
- [39] G. Golub and C. Van Loan, *Matrix Computations*, 2nd ed. Baltimore: Hopkins University Press, 1989.