

# Hurst Exponent with ARIMA and Simple Exponential Smoothing for Measuring Persistency of M3-Competition Series

M. Ponce, J. Frausto, G. Castilla, J. González, J. Pérez, and J. Terán

**Abstract**—The Hurst exponent is a metric used to evaluate whether a time series exhibits long-term memory, and it is used to identify its complexity. Besides, forecasting methods are tested using time series from Makridakis competition. Additionally, Exponential Smoothing is among the best forecasting methods of this competition, and ARIMA is one of the most used for many applications. Nevertheless, the quality of using the Hurst exponent in Makridakis M3-Competition for measuring how well Simple Exponential Smoothing and ARIMA are adapted to a specific time series is unknown. In this work, we show the impact of applying the Hurst exponent using the complete set of series from the M3-Competition. We used k-means as clustering algorithm for the 3003 Hurst exponent values of these series, improving the visualization of all of the data to identify a relationship between Hurst exponent with MAPE and sMAPE forecasting error of the Simple Exponential Smoothing and ARIMA. Finally, the experimentation shows that Hurst exponent and MAPE for the tested methods are inversely related in most of the cases and that there is a trend between them.

**Index Terms**—Hurst Exponent, Exponential Smoothing, MAPE, Makridakis, M3-Competition.

## I. INTRODUCCIÓN

HOY en día, los pronósticos de series de tiempo juegan un papel importante en diversas áreas de la ingeniería, como lo es en energías renovables, no renovables, redes de computadoras y series de tiempo financieras [1][2][3]. Entre los métodos clásicos para pronóstico más exitosos se encuentra el SES (Simple Exponential Smoothing) [4] y ARIMA [5]. Los investigadores han abordado el análisis de diferentes tipos de series de tiempo, donde uno de los principales problemas a resolver consiste en encontrar el mejor método de pronóstico para una serie determinada.

Las series de tiempo poseen características tales como tendencia, temporalidad, periodicidad, curtosis, sesgo y exponente de Hurst [6].

M. Ponce, TecNM/Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, México, mirna\_poncef@hotmail.com.

J. Frausto, TecNM/ Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, México, juan.frausto@itcm.edu.mx.

G. Castilla, TecNM/Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, México, gpe\_cas@yahoo.com.mx.

J. González, TecNM/ Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, México, jjgonzalezbarbosa@hotmail.com.

J. Pérez, TecNM/Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico, México, jpo\_cenidet@yahoo.com.mx.

J. Terán, Universidad Autónoma de Tamaulipas, México, david\_teran01@yahoo.com.mx.

De acuerdo a la literatura, uno de los atributos de las series de tiempo ampliamente utilizado, es el exponente de Hurst [7][8] el cual es usado para medir la persistencia, y cuyo rango se mide en el intervalo de cero a uno [9]. Sin embargo, también se han reportado valores mayores a la unidad [10][11]. Cuando el valor de ese exponente es cercano a uno, significa que la serie es persistente y por lo tanto se considera que es posible realizar una buena predicción [9].

El exponente de Hurst tiene sus orígenes desde el año 1827, cuando Robert Brown presenta un modelo conocido ahora como movimiento browniano para estudiar el comportamiento de un fluido de partículas suspendidas. Este modelo se caracteriza por presentar un comportamiento de caminata aleatoria [12]. Posteriormente, en 1951, a través de estudios en el área de hidrología, Harold Hurst desarrolló el exponente que lleva su nombre y que permite medir la memoria de largo plazo de series de tiempo; uno de sus estudios populares fue sobre series de tiempo del río Nilo; su investigación mostró que las series estudiadas tenían una fuerte autocorrelación [13].

En 1969, Mandelbrot y Wallis presentaron una investigación sobre la aplicación del análisis del rango escalado en las series de tiempo, donde se determina el exponente de Hurst como una medida fractal [14]. En dicha investigación, se constata que, dependiendo del valor de ese exponente, algunas series de tiempo tienen memoria infinita. Sin embargo, fue hasta 1991, que Mandelbrot formalizó la Hipótesis de Mercados Fractales (FMH) y su aplicación en pronósticos de series financieras; a partir de entonces surgieron investigaciones que aplican este nuevo enfoque en esa área [15]. La hipótesis FMH es una variante relacionada con la Hipótesis de Mercados Eficientes [16]. FMH aborda la variabilidad de activos financieros, y señala que los mercados tienen estructuras fractales, y se asocian con el movimiento fraccional browniano. Además, el análisis del exponente de Hurst comenzó a tener aplicación en series de tiempo de activos de energía, incluyendo petróleo crudo, gas natural, petróleo para calefacción, gasolina sin plomo y propano [1].

El interés en el estudio del exponente de Hurst ha sido motivado por la gran cantidad de aplicaciones en los que es importante identificar la propiedad de persistencia y su relación con la facilidad de realizar el pronóstico con métodos clásicos como los mencionados anteriormente. Adicionalmente, dichos métodos tienen una amplia aplicación principalmente en problemas de energía, y en mercados financieros.

En el pronóstico de series de tiempo, se ha incorporado el concepto de la complejidad de la serie, la cual es dependiente de las características de las series de tiempo antes mencionadas y del método empleado para pronosticarla [8]. Para medir la

complejidad en series de tiempo, se ha propuesto el uso del exponente de Hurst mediante técnicas de dimensión Fractal [8]. Por otra parte, es común evaluar el desempeño de los algoritmos de pronóstico usando como referencia el conjunto de series de Makridakis como M3-Competition [17]. Hasta el momento, no se ha reportado la evaluación de la persistencia de esas series utilizando el exponente de Hurst. Además, en la literatura, no se cuenta con un estudio de éstas, donde se relacione la eficiencia de los métodos de pronóstico SES y ARIMA con el exponente de Hurst.

Este artículo investiga una relación entre el exponente de Hurst que permite evaluar la persistencia de series de tiempo y la medida de error conocida como MAPE (de sus siglas en inglés, Mean Absolute Percentage Error) y sMAPE (de sus siglas en inglés, symmetric Mean Absolute Percentage Error) de los métodos de pronóstico SES y ARIMA aplicados a las mismas series. En este trabajo se realiza un estudio de las 3003 series de M3-Competition aplicando esos métodos de pronóstico y su relación con los valores del exponente de Hurst utilizando el algoritmo k-means creando grupos con los datos. El artículo se organiza de la siguiente manera. La sección II contiene el planteamiento del problema. En la sección III se muestra la solución propuesta a través de una metodología de tres etapas. La sección IV presenta los resultados de la experimentación realizada, la descripción del conjunto de datos y las técnicas utilizadas, además de los resultados obtenidos. Por último, la sección V plantea las conclusiones y trabajos futuros.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema del pronóstico de series de tiempo se puede describir como sigue:

Sea un proceso estocástico cuyas observaciones pueden ser descritas por una serie de tiempo definida por la secuencia  $S = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, S_{n+1}, \dots, S_{m-1}, \dots, S_m)$  donde cada  $S_i$  es un número real definido como una observación en el periodo  $1 \leq i \leq m$ , para toda  $i \in \mathbb{Z}^+$  y los índices definidos por  $i$  son monótonamente crecientes, es decir, el valor de  $i$  es creciente hacia la derecha. Los valores  $S_i$  son observaciones conocidas en el momento presente hasta la observación  $i \leq n$ , mientras que las observaciones  $S_{n+1}, \dots, S_m$  serán conocidas en el futuro para los periodos  $n+1, \dots, m-1, m$ .

El problema de pronóstico busca estimar los valores de  $S_{n+1}, \dots, S_m$ ; a las estimaciones correspondientes se le asignan las variables  $\hat{S}_{n+1}, \dots, \hat{S}_m$  de tal forma que el error en la estimación de los valores verdaderos  $S_{n+1}, \dots, S_m$  ocurridos en el futuro sea mínimo.

Existen varias medidas de error, en este artículo utilizamos las medidas de error MAPE y sMAPE. El problema de pronóstico que se aborda en este artículo utiliza las series de la literatura conocidas como M3-Competition de Makridakis. Se han abordado diferentes enfoques, de los cuales SES y ARIMA son comúnmente utilizados para problemas de energía y problemas de series financieras. No obstante, la utilización de un tipo de método como los anteriores depende de la persistencia de la serie y de su complejidad; donde la persistencia es una propiedad que es determinada por el exponente de Hurst y es una de las características de las series de tiempo. Por su parte, la complejidad de una serie de tiempo

ante un determinado método de pronóstico depende del error que pudiera presentarse al aplicar dicho método.

El problema que se plantea resolver en este artículo es determinar la persistencia y la complejidad de las series M3-Competition ante los métodos de pronóstico SES y ARIMA. Se hace notar que este problema se ha resuelto para otras series de tiempo y otros métodos [18]. Adicionalmente, se busca determinar si existe una relación entre las medidas de error MAPE y sMAPE de los métodos de pronóstico SES y ARIMA para M3-Competition y la característica que determina la persistencia de la serie.

## III. SOLUCIÓN PROPUESTA

En este trabajo se presenta un enfoque para calcular el exponente de Hurst y por lo tanto la persistencia de las series de tiempo de M3-Competition. Por otro lado, se obtienen los valores del MAPE y sMAPE haciendo uso de los métodos clásicos de pronóstico SES y ARIMA. La metodología propuesta busca determinar la relación entre el exponente de Hurst y el error de pronóstico de cada serie. Se estima que la alta persistencia de una serie es un indicador de la alta facilidad de realizar un buen pronóstico. Por el contrario, la baja persistencia debiera estar asociada con la complejidad de dichas series [8]. En síntesis, la metodología consta de las tres etapas que aparecen embebidas en las Fig. 1 y 2, las cuales, se describen a continuación:

*Primera etapa:* Calcular el exponente de Hurst para cada serie y asociarlo a una categoría de complejidad. Esto se realiza calculando la medida de error de cada uno de los métodos de pronóstico aplicados y asociarlo a la medida de complejidad establecida.

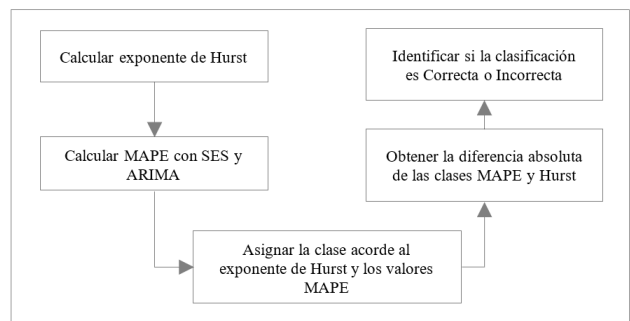


Fig. 1. Primera etapa de la metodología utilizada.

*Segunda etapa:* Aplicar un método de agrupamiento para identificar la relación entre el error de pronóstico MAPE de cada método y el exponente de Hurst.

*Tercera etapa:* Realizar un análisis gráfico para determinar si existe tendencia para las series analizadas. En este caso se consideraron cuatro tipos de series: anual, cuatrimestral, mensual y otros (en inglés, Year, Quarter, Month and Other).

El resto de esta sección contiene los conceptos y métodos relacionados con la metodología propuesta, la cual se visualiza en las Fig. 1 y 2.

### A. Exponente de Hurst

Existe una variedad de métodos que permiten calcular el exponente de Hurst, se revisaron entre otros el método de

Rango Reescalado (R/S) [15] y el proceso ARFIMA (Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average) desarrollado por Granger & Joyeux [19], establecida por Hosking [20] y utilizado por Hyndman [21] cuyo software se utiliza en este artículo. Estos dos exponentes de Hurst se denominarán en los sucesivo simplemente H y H-ARFIMA respectivamente.

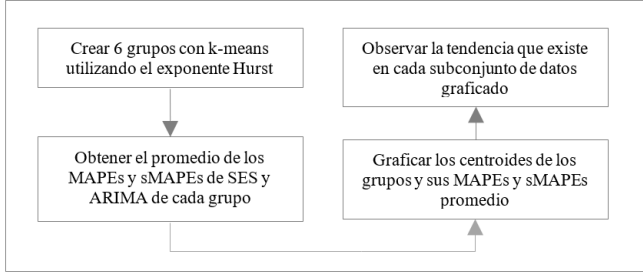


Fig. 2. Segunda y tercera etapa de la metodología propuesta.

Las características que se atribuyen a cada serie, dependiendo del valor del exponente de Hurst (H), son las que se señalan en la Tabla I. Se hace notar que conforme H es cercano a la unidad, las series son más persistentes, de forma que debieran ser menos complejas [15].

TABLA I  
INTERPRETACIÓN DE LOS VALORES DEL EXPONENTE DE HURST

0.0 < H < 0.5	Series anti-persistentes, tienen una tendencia de reversión a la media.
H = 0.5	Series de caminata aleatoria, los eventos son aleatorios y no hay correlación.
0.5 < H < 1.0	Series de tiempo persistentes.
H = 1.0	Series deterministas.
Otros valores	Es posible encontrar otros valores, pero no se han estudiado este tipo de series.

Como se señaló anteriormente, el exponente de Hurst permite evaluar la persistencia de series de tiempo [13]. En este trabajo se usa el método de Rango Reescalado (R/S) de Peters [15] mediante los siguientes pasos:

*Paso uno:* Dividir la serie de tiempo en intervalos conformando particiones como se muestra en la Fig. 3.

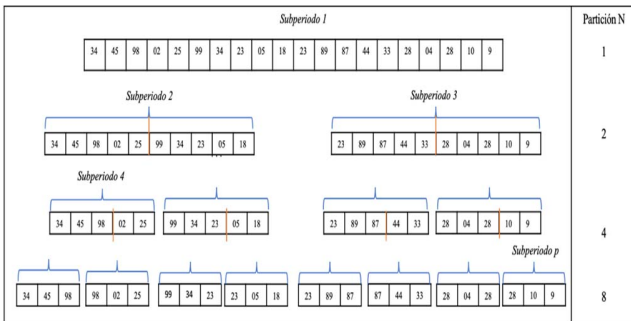


Fig. 3. Paso uno para el cálculo del exponente de Hurst.

*Paso dos:* Obtención del rango reescalado de cada partición en el paso uno tal como se muestra en la Fig. 4.

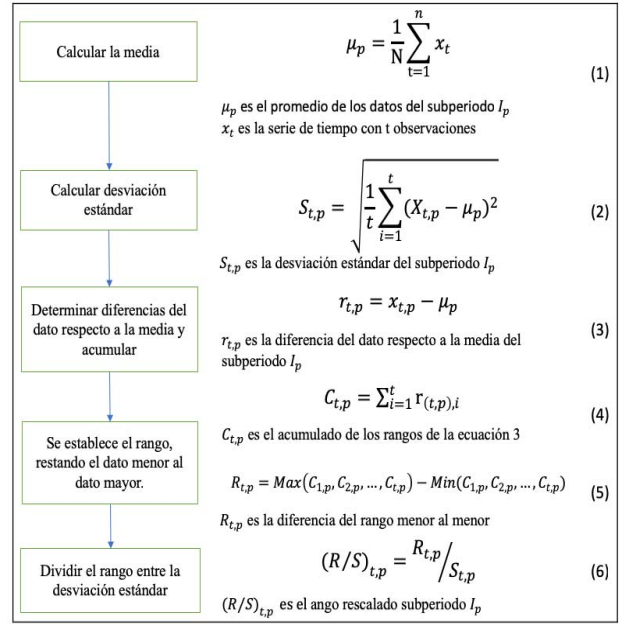


Fig. 4. Cálculo del Rango reescalado (R/S) de cada partición.

Se calcula el rango reescalado con el promedio de todos los rangos (R/S) para cada valor de N.

Posteriormente, el exponente de Hurst será calculado despejando H de la ecuación (7) [14].

$$(R/S)_t = (\alpha * N)^H \tag{7}$$

donde:

- $(R/S)_t$  = rango reescalado de toda la serie
- N = número de observaciones
- $\alpha$  = constante entre el rango de 0 a 1
- H = exponente de Hurst

Tomando logarítmicos de (7); se obtiene la ecuación (8) donde H corresponde a la pendiente. Finalmente, la regresión con el mejor ajuste será el exponente de Hurst estimado.

$$\log_{10}(R/S)_N = H \log_{10}(N) + \log_{10}(\alpha) \tag{8}$$

### B. Métodos de Pronóstico SES Y ARIMA

El método SES o Suavizamiento Exponencial tuvo su origen en los trabajos de Brown [22], Holt [23] y Winters [24]. SES se basa en promediar (suavizar) los valores pasados de una manera exponencial decreciente:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_t \tag{9}$$

donde

- $\hat{Y}_{t+1}$  = nuevo valor suavizado o valor del pronóstico.
- $\alpha$  = constante de suavización o peso (0 <  $\alpha$  < 1)
- $Y_t$  = nueva observación (o valor real) en el periodo t
- $\hat{Y}_t$  = último valor suavizado o pronóstico del periodo t

Por su parte, el método ARIMA se basa en modelos autorregresivos (AR) y promedios móviles (MA), también

conocidos como ARMA. El componente AR es una combinación de valores que se observan de la serie, mientras que el componente MA es una combinación de los términos con ruido blanco no observables. El modelo ARIMA es una variante del método ARMA el cual elimina la no estacionalidad a través de la diferencia de los datos [25]. La metodología para identificar, ajustar y verificar los modelos ARIMA se propuso por Box y Jenkins [26].

### C. Algoritmo K-means

Dentro de los algoritmos de agrupamiento, existe una amplia categorización, sin embargo, en la clasificación de métodos de agrupamiento por particionamiento [27], el algoritmo k-means es uno de los más usados [28][29] debido a su simpleza y eficiencia [30]. El cual intenta encontrar una partición de  $n$  observaciones en  $k$  grupos, de manera que cada observación pertenezca al grupo cuyo centro geométrico este más cercano.

El algoritmo trata de minimizar la varianza total del conjunto de observaciones. En este trabajo, se aplica k-means como sigue: a) se determinan los valores del exponente de Hurst para los conjuntos de series M3 de Makridakis publicados en [31]; b) se determina el mejor número  $k$  de grupos con el método Elbow [32] y por experimentación; c) se identifican las series de tiempo de cada grupo, y se calculan para ellas las medidas de error MAPE y sMAPE promedio para cada grupo; d) se grafican los puntos que corresponden a los valores promedio de MAPE y sMAPE calculados con los centroides del exponente de Hurst de cada grupo. Las gráficas obtenidas por este procedimiento se utilizan para realizar un análisis cualitativo de la relación entre MAPE, sMAPE y Hurst.

## IV. RESULTADOS

Esta sección pretende evaluar la complejidad del conjunto de series de M3 de Makridakis mediante la relación existente entre los errores de pronóstico MAPE y sMAPE de SES y ARIMA con el exponente de Hurst de cada una de las series. Para ello se realizaron dos experimentos:

### Experimento 1. Prueba de persistencia.

Se establecen los niveles de complejidad de las series de tiempo en términos del exponente de Hurst y el error de pronóstico.

### Experimento 2. Relación H-MAPE y H-sMAPE grupal.

Se agrupan las series de tiempo de acuerdo con el valor del exponente Hurst utilizando agrupamiento y se relaciona en cada grupo usando el MAPE y sMAPE.

### A. Conjunto de Datos

El conjunto de datos fue obtenido de M3-Competition que contiene un total de 3003 series de tiempo agrupadas en cuatro subconjuntos: Year, Quarter, Month y Other. La Tabla II muestra los conjuntos de datos incluyendo el tamaño de cada grupo.

En el experimento 2, antes de realizar agrupamientos, se detectaron valores atípicos (en inglés, outliers), considerando outliers aquellos valores fuera del rango  $\mu \pm 3\sigma$ , es decir alejados del promedio del conjunto de datos ( $\mu$ ) por tres veces la desviación estándar ( $\sigma$ ). Se eliminaron un total de: 8 series en el subconjunto Year, 3 en el Quarter, 2 en el Month y 2 en el subconjunto Other.

TABLA II  
DISTRIBUCIÓN DE LAS SERIES DE TIEMPO DE  
M3-COMPETITION

Year		Quarter	
Total: 645		Total: 756	
MICRO	146	MICRO	204
INDUSTRY	102	INDUSTRY	83
DEMOGRAPHIC	245	DEMOGRAPHIC	57
MACRO	83	MACRO	336
FINANCE	58	FINANCE	76
OTHER	11		
Month		Other	
Total: 1428		Total: 174	
MICRO	474	MICRO	4
INDUSTRY	334	INDUSTRY	0
DEMOGRAPHIC	111	DEMOGRAPHIC	0
MACRO	312	MACRO	0
FINANCE	145	FINANCE	29
OTHER	52	OTHER	141

### B. Experimento 1: Prueba de Persistencia

En esta sección se realiza una comparación de los exponentes de Hurst: H usando R/S y el que utiliza H-ARFIMA contra la medida de error MAPE calculado con los métodos SES y ARIMA. Con base en que es posible utilizar el exponente de Hurst como indicador de la complejidad de una serie [8][33], se calcula este exponente a cada una de las series de tiempo para clasificarlas de acuerdo con su complejidad. Para esto, se analizaron los valores del exponente de Hurst y el error de pronóstico MAPE de cada método; dichos valores se categorizan en los niveles de complejidad propuestos de forma empírica en las Tabla III y Tabla IV.

TABLA III  
ASIGNACIÓN DE CLASES HURST (MÉTODO R/S)  
Y MAPE CON SES

Descripción de la Clase	Exponente Hurst	Clase Hurst	MAPE	Clase MAPE
MUY DÍFICIL	0.000 - 0.299	1	Más de 100	1
DÍFICIL	0.300 - 0.499	2	70.00 - 99.99	2
REGULAR	0.500 - 0.799	3	40.00 - 69.99	3
FÁCIL	0.800 - 0.900	4	10.00 - 39.99	4
MUY FÁCIL	0.910 - 1.09	5	05.00 - 9.99	5
EXTREMADAMENTE FÁCIL	Mayor a 1.100	6	0.00 - 4.99	6

TABLA IV  
ASIGNACIÓN DE CLASES HURST (MÉTODO ARFIMA)  
Y MAPE CON SES

Descripción de la Clase	Exponente Hurst	Clase Hurst	MAPE	Clase MAPE
MUY DÍFICIL	0.000 - 0.299	1	Más de 100	1
DÍFICIL	0.300 - 0.499	2	70.00 - 99.99	2
REGULAR	0.500 - 0.799	3	40.00 - 69.99	3
FÁCIL	0.800 - 0.900	4	10.00 - 39.99	4
MUY FÁCIL	0.910 - 0.949	5	05.00 - 9.99	5
EXTREMADAMENTE FÁCIL	0.950 - 1.000	6	0.00 - 4.99	6

La diferencia entre las tablas III y IV está en los dos últimos renglones debido a que el cálculo del exponente de Hurst con el método R/S permite obtener valores mayores a la unidad, mientras que el del proceso ARFIMA solo obtiene valores en el rango  $0.5 < H < 1$  dada la naturaleza del proceso [34].

Esta clasificación permite determinar si la caracterización de la complejidad es *correcta* o *incorrecta* para cada una de las 3003 series. Determinar si una serie se clasifica de manera correcta, significa que tanto el exponente de Hurst como el MAPE coinciden en la misma categoría de complejidad. Nótese que cuando H es cercano a la unidad, la serie es altamente persistente, de forma que debiera ser simple su pronóstico; en consecuencia, el MAPE obtenido por los métodos SES y ARIMA debiera ser pequeño; la situación inversa se presenta en valores de H cercanos a cero, ya que esto indica que la serie es anti-persistente y por lo tanto la determinación del pronóstico debiera ser difícil. Para obtener el valor de clasificación *correcto* o *incorrecto* para cada serie, se determinan los valores de ambas variables (H y MAPE), de forma que la serie se clasifica según la categoría correspondiente como se ilustra en el ejemplo de la Tabla V.

TABLA V  
EJEMPLO DE CLASIFICACIÓN. LOS DATOS SON SOLO ILUSTRATIVOS

Nombre de la Serie	Hurst	MAPE	Clasificación		Resultados
			Hurst	MAPE	
N 1-20	0.9421	12.8730	MUY FACIL	FACIL	CORRECTO: 0.8
N 2-20	0.7221	10.8669	RÉGULAR	FACIL	CORRECTO: 0.8
N 7-20	1.3445	8.3011	EXTREMADA MENTE FACIL	MUY FACIL	CORRECTO: 0.8
N 24-20	1.1748	11.7918	EXTREMADA MENTE FACIL	FACIL	INCORRECTO: 0.0
N1856-20	0.001	75.2	MUY DIFICIL	MUY DIFICIL	CORRECTO: 1.0
N 678-45	0.15	0.58	RÉGULAR	EXTREMADA MENTE FACIL	INCORRECTO: 0.0

Se calculan las diferencias absolutas entre los valores de la clase de acuerdo con el MAPE y el exponente de Hurst. El valor resultante de la clasificación es cero cuando ambas características clasifican en el mismo nivel, y es uno cuando hay diferencia de solo un nivel entre las dos clases. Se hace notar que solo se asigna clasificación *correcta* cuando la diferencia entre niveles es de cero o uno.

La Tabla VI muestra los resultados obtenidos para la clasificación antes descrita para todas las series M3 de Makridakis. La primera columna indica el valor de la clasificación: I para *incorrecta* y C para *correcta*, la siguiente columna presenta el número de series clasificadas en cada valor de clase y la última es el porcentaje de clasificación para cada valor de clase.

TABLA VI  
PORCENTAJES DE CLASIFICACIÓN PARA HURST (MÉTODO R/S) Y MAPE CON SES

	YEAR 645 series		QUARTER 756 series	
	#	%	#	%
I - Incorrecta C - Correcta	I	121 18.75	I	129 17.06
	C	523 81.08	C	615 82.93
	MONTH 1428 series		OTHER 174 series	
	#	%	#	%
I - Incorrecta C - Correcta	I	235 16.50	I	14 8.04
	C	1193 83.77	C	160 91.95

Es importante señalar que en los cálculos del exponente Hurst, 1490 de las 3003 series de M3 presentaron valores mayores a

uno. En la literatura también se documenta estos casos atípicos del exponente de Hurst [10][11]. Para considerar estos casos se incluyó una categoría que corresponde a valores de Hurst mayores a uno, la cual se observa al final de la Tabla III. De acuerdo con los resultados de la Tabla VI, los porcentajes de clasificación *correcta* van del 81 al 91%, con valores menores para las series *Year* y *Quarter*, mientras que se tiene una mejor evaluación para las series *Month* y *Other*. Dados los altos porcentajes de evaluación obtenidos para las 3003 series de tiempo probadas, mediante esta experimentación se puede observar que H mide correctamente la persistencia en la mayoría de los casos.

Por otro lado, la tabla VII muestra los resultados obtenidos con el exponente H-ARFIMA y el MAPE obtenido del pronóstico del SES.

TABLA VII  
PORCENTAJES DE CLASIFICACIÓN PARA HURST (MÉTODO ARFIMA) Y MAPE CON SES

	YEAR 645 series		QUARTER 756 series	
	#	%	#	%
I - Incorrecta C - Correcta	I	317 49.15	I	221 29.23
	C	328 50.85	C	535 70.77
	MONTH 1428 series		OTHER 174 series	
	#	%	#	%
I - Incorrecta C - Correcta	I	470 33.00	I	38 21.84
	C	958 67.00	C	136 78.16

Al comparar los resultados de la Tabla VI y Tabla VII, podemos observar que se tienen mejores resultados al utilizar el exponente de Hurst con el método tradicional R/S.

C. Experimento 2: Relación H-MAPE y H-sMAPE grupal

Este experimento toma cada subconjunto (Year, Quarter, Month y Other) del conjunto de series de M3 y en cada uno de ellos realiza una agrupación utilizando el algoritmo k-means con el valor de H (método R/S y proceso H-ARFIMA) de cada serie. En cada subconjunto se obtiene el promedio del valor MAPE y sMAPE de cada grupo y para cada método de pronóstico. De acuerdo con el método Elbow [32] el número de grupos adecuado fue entre tres y seis y finalmente el utilizado fue de seis. Las Fig. 5, 6, 7 y 8 muestran los resultados del algoritmo k-means para los 6 grupos creados. En estas gráficas se puede observar la relación entre el MAPE y sMAPE con el exponente de Hurst (método R/S) para las series estudiadas correspondientes a los cuatro subconjuntos.

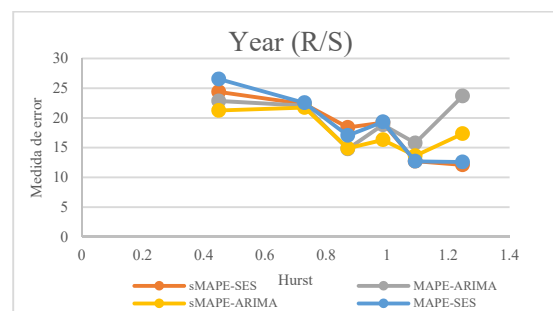


Fig. 5. MAPE y sMAPE con el Hurst (método R/S) promedio para los Centroides de las series *Year* aplicando el algoritmo k-means.

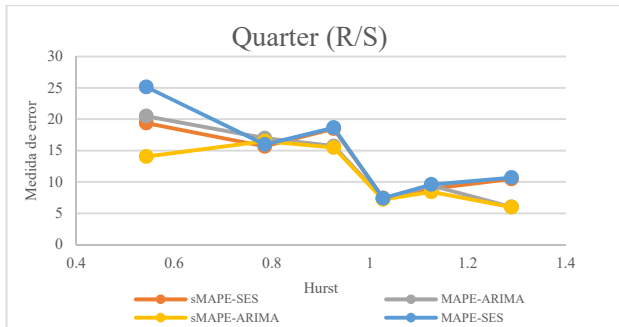


Fig. 6. MAPE y sMAPE con Hurst (método R/S) promedio para los Centroides del subconjunto *Quarter* aplicando el algoritmo k-means.

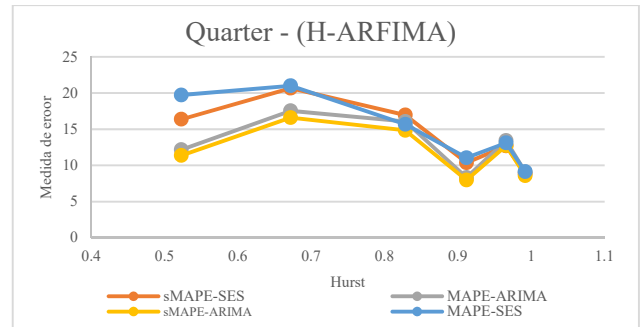


Fig. 10. MAPE y sMAPE con Hurst (ARFIMA) promedio para los Centroides del subconjunto *Quarter* aplicando el algoritmo k-means.

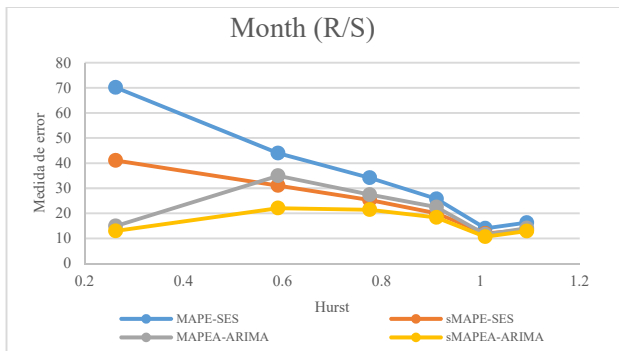


Fig. 7. MAPE y sMAPE con Hurst (método R/S) promedio para los Centroides del subconjunto *Month* aplicando el algoritmo k-means.

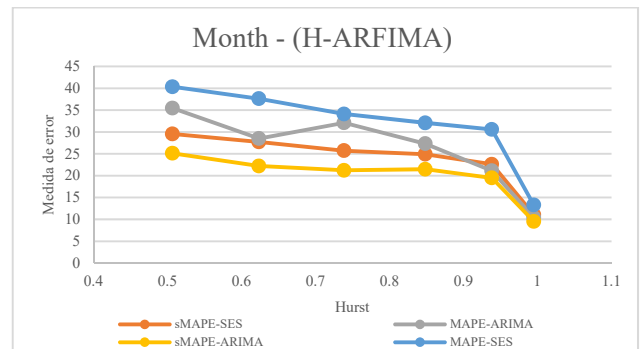


Fig. 11. MAPE y sMAPE con Hurst (ARFIMA) promedio para los Centroides del subconjunto *Month* aplicando el algoritmo k-means.

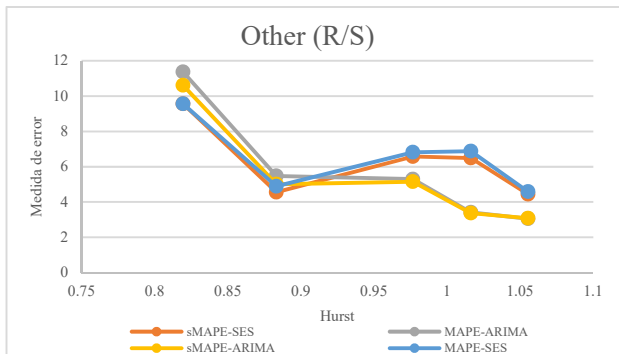


Fig. 8. MAPE y sMAPE con Hurst (método R/S) promedio para los Centroides del subconjunto *Other* aplicando el algoritmo k-means.

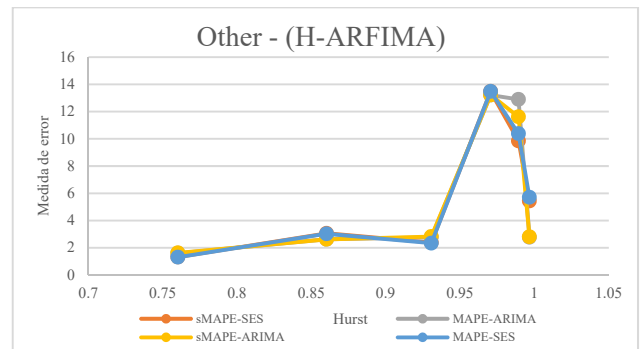


Fig. 12. MAPE y sMAPE con Hurst (ARFIMA) promedio para los Centroides del subconjunto *Other* aplicando el algoritmo k-means.

Las Fig. 9, 10, 11 y 12 muestran los resultados de los grupos realizados con el exponente de Hurst (ARFIMA) y los errores MAPE y sMAPE en cada uno de los cuatro subconjuntos de datos.

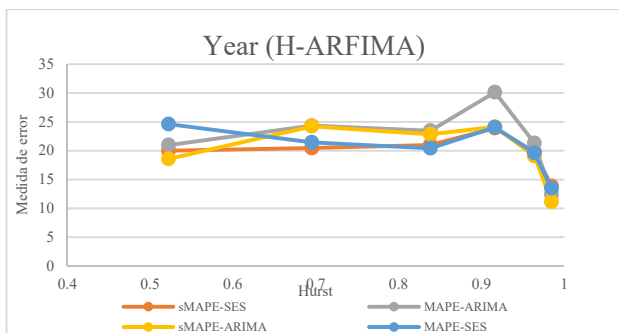


Fig. 9. MAPE y sMAPE con Hurst (ARFIMA) promedio para los Centroides del subconjunto *Other* aplicando el algoritmo k-means.

#### D. Análisis de los Resultados

En la primera experimentación se obtuvieron altos porcentajes de clasificación *correctos* como se puede apreciar en la Tabla VI, utilizando el exponente de Hurst calculado con el método R/S, aunque a un gran número de series se les calculó el exponente de Hurst con un valor mayor a uno.

La segunda experimentación realizada, muestra una tendencia negativa en la relación entre el exponente de Hurst (R/S) y el valor MAPE y sMAPE para los métodos SES y ARIMA (Fig. 5, 6, 7 y 8), también es posible observar que cerca del valor 0.9 del exponente Hurst se eleva el error promedio de MAPE y sMAPE en tres de los cuatro subconjuntos. Otra característica que se puede observar es una tendencia descendente para el MAPE, desde H mayor a cero hasta la unidad y dicha tendencia del MAPE se invierte cuando el valor del exponente de Hurst es mayor a uno. Este patrón es notorio para los subconjuntos

*Year*, *Quarter* y *Month*, mientras que para el subconjunto *Other* tal comportamiento no se presenta.

Las dos medidas de error que se consideraron muestran patrones similares, aunque se puede observar que el sMAPE se mantiene más estable durante la experimentación.

Se puede también observar que conforme el valor del exponente Hurst es cercano a cero, el MAPE es mayor para los dos métodos de pronóstico. De tal forma que se presenta una fuerte correlación inversa entre H y MAPE, para los valores de H menores a 1. En contraste, para valores de H mayores a uno, esa situación no se presenta.

Por otro lado, la experimentación realizada con el exponente de H-ARFIMA) utilizado por el reconocido autor Hyndman (Fig. 9,10,11 y 12); esas figuras muestran que para el conjunto de datos M3 no existe relación lineal de H-ARFIMA con MAPE o sMAPE.

## V. CONCLUSIONES

Este artículo realizó una evaluación de las 3003 series de la competencia M3 de Makridakis, evaluando la efectividad del exponente de Hurst para medir la persistencia de las series. Aplicando el algoritmo k-means se crearon grupos cuyos valores de MAPE y sMAPE promedio indican una tendencia en tres de los cuatro subconjuntos probados. La tendencia observada muestra que las medidas de error MAPE y sMAPE con el exponente de Hurst tienen una fuerte correlación negativa, de tal manera que conforme uno incrementa el otro decrementa. Esta relación se mantiene de manera general para  $H < 1$ ; sin embargo, hay excepciones, en particular para un valor de Hurst cercano a 0.9, donde los valores de MAPE y sMAPE se incrementan en lugar de reducirse, en los tres subconjuntos cuando H crece en la vecindad de dicho valor. Dicha relación inversa de MAPE y sMAPE con el exponente de Hurst se cumple en general para todas las series excepto las del subconjunto *Other*. Por lo tanto, se puede comprobar que para el conjunto M3, cuando una serie tiene un valor de Hurst cercano a cero, esta se puede considerar de baja persistencia, produciendo un valor de MAPE y sMAPE elevado. Por el contrario, conforme el valor de Hurst crece, aproximando su valor a la unidad, la serie es persistente y el valor de MAPE y sMAPE disminuye. Finalmente, se puede concluir que el exponente de Hurst es una medida de persistencia adecuada para la mayoría de las series de M3 utilizando el método (R/S) clásico y mostrado en este artículo. Como un trabajo futuro se plantea realizar un análisis similar con diversas características de las series de tiempo.

## REFERENCIAS

- [1] A. Serletis y A. A. Rosenberg, "The Hurst exponent in energy futures prices", *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 380, núm. 1–2, pp. 325–332, 2007.
- [2] T. Graves, R. Gramacy, N. Watkins, y C. Franzke, "A brief history of long memory: Hurst, Mandelbrot and the road to ARFIMA, 1951–1980", *Entropy*, vol. 19, núm. 9, pp. 1–40, 2017.
- [3] R. Weron, "Electricity price forecasting: A review of the state-of-the-art with a look into the future", *Int. J. Forecast.*, vol. 30, núm. 4, pp. 1030–1081, 2014.
- [4] L. F. Tratar, "Demand forecasting with four-parameter exponential smoothing", *Int. J. Prod. Econ. J.*, vol. 181, pp. 162–173, 2016.
- [5] P. G. Zhang, "Time series forecasting using a hybrid ARIMA and neural network model", *Neurocomputing*, vol. 50, núm. February, pp. 159–175, 2003.
- [6] X. Wang, K. Smith, y R. Hyndman, "Characteristic-based clustering for time series data", *Data Min. Knowl. Discov.*, vol. 13, núm. 3, pp. 335–364, 2006.
- [7] A. Tierra, M. Luna, A. Staller, C. Pilapanta, R. Romero, y L. Porras, "Hurst Coefficient Estimation by Rescaled Range and Wavelet of the ENU Coordinates Time Series in GNSS Network", *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 16, núm. 4, pp. 1064–1069, 2018.
- [8] L. Tang, H. Lv, F. Yang, y L. Yu, "Complexity testing techniques for time series data: A comprehensive literature review", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 81, pp. 117–135, 2015.
- [9] V. Lakshina y A. Silaev, "The Application of Fractals in Financial Time Series Modelling", vol. 100, núm. 100, 2012.
- [10] F. Serinaldi, "Use and misuse of some Hurst parameter estimators applied to stationary and non-stationary financial time series", *Phys. A Stat. Mech. its Appl.*, vol. 389, núm. 14, pp. 2770–2781, 2010.
- [11] Z. Wang, D. Guo, X. Li, y Y. Fei, "Estimating hurst exponent with wavelet packet", *2006 7th Int. Conf. Comput. Ind. Des. Concept. Des. CAIDC*, 2006.
- [12] R. Brown, "Microscopical observations", *Philos. Mag. Ser. 2*, vol. 4, núm. 21, pp. 161–173, 1828.
- [13] H. H. E., "Long-Term Storage Capacity of Reservoirs", *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, vol. 116, pp. 770–799, 1951.
- [14] Y. Heights, "Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence", *Water Resour. Res.*, vol. 5, núm. 5, pp. 967–988, 1969.
- [15] E. E. Peters, *Chaos and order in the capital markets: a new view of cycles, prices, and market volatility*. Wiley, 1996.
- [16] E. F. Fama, "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *J. Finance*, vol. 32, núm. Papers and Proceedings of the Thirty-Fifth Annual Meeting of the American Finance Association, pp. 261–275, 1970.
- [17] S. Makridakis, "The M3-Competition: results, conclusions and implications", vol. 16, pp. 451–476, 2000.
- [18] W. Z. Y. Chin Wen Cheong, Zaidi Isa, Abu Hassan Shaari Mohd Nor, "Adjusted Hurst exponent evaluations for equity and energy markets", *J. Stat. Manag. Syst.*, vol. 18, núm. 1 & 2, pp. 189–202, 2015.
- [19] C. W. J. Granger y R. Joyeux, "An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing", *J. Time Ser. Anal.*, vol. 1, núm. 1, pp. 15–29, 1980.
- [20] J. R. Hosking, "Fractional differencing", *Biometrika*, vol. 68, núm. 1, pp. 165–176, 1981.
- [21] X. Wang, K. Smith-Miles, y R. Hyndman, "Rule induction for forecasting method selection: Meta-learning the characteristics of univariate time series", *Neurocomputing*, vol. 72, núm. 10–12, pp. 2581–2594, 2009.
- [22] R. G. Brown, "Statistical forecasting for inventory control", *McGraw-Hill, New York*, p. 1959, 1959.
- [23] C. C. Holt, "Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages", *Int. J. Forecast.*, vol. 20, núm. 1, pp. 5–10, 2004.
- [24] P. R. Winters, "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages", *Manage. Sci.*, vol. 6, núm. 3, pp. 324–342, 1960.
- [25] P. Brockwell y R. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*. 2002.
- [26] G. M. L. George E. P. Box, G. Wily M. Jenkins, Gregory C. Reinsel, *Time Series Analysis Forecasting and Control*. 2016.
- [27] S. Bhardwaj, "Data Mining Clustering Techniques – A Review", núm. June, 2017.
- [28] L. A. Albores y M. López, "Classification of User Interactive Interfaces with K-modes", *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 13, núm. 7, pp. 2308–2313, 2015.
- [29] B. Liu, *Web Data Mining: Exploring Hyperlinks, Contents, and Usage Data*. 2011.
- [30] A. K. Jain, "Data clustering: 50 years beyond K-means", *Pattern Recognit. Lett.*, vol. 31, núm. 8, pp. 651–666, 2010.
- [31] International Institute of Forecasters, "M3-Competition - International Institute of Forecasters", 2017. [En línea]. Disponible en: <https://forecasters.org/resources/time-series-data/m3-competition/>. [Consultado: 06-mar-2018].
- [32] R. S. Tsay, *Analysis of Financial Time Series: Third Edition*. 2010.
- [33] L. TANG, L. YU, F. LIU, y W. XU, "An Integrated Data Characteristic Testing Scheme for Complex Time Series Data Exploration", *Int. J. Inf. Technol. Decis. Mak.*, vol. 12, núm. 03, pp. 491–521, 2013.
- [34] K. Liu, Y. Chen, y X. Zhang, "An Evaluation of ARFIMA (Autoregressive Fractional Integral Moving Average) Programs", *Axioms*, vol. 6, núm. 4, p. 16, 2017.



**Mirna Patricia Ponce Flores.** Maestra en Ciencias Computacionales del ITCM y Profesora con más de 10 años de experiencia en el área de computación, realiza investigación en el área de optimización inteligente, minería de datos y pronósticos financieros.



**Jesús David Terán Villanueva.** Es profesor e investigador en la Universidad Autónoma de Tamaulipas a nivel posgrado donde realiza investigación en optimización y sistemas inteligentes. Obtuvo su Doctorado en Ciencias Computacionales en el Instituto Tecnológico de Tijuana. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Sus áreas de interés son: Inteligencia Artificial, Redes Neuronales, Sistemas Difusos y Algoritmos Metaheurísticos de Optimización.



**Juan Frausto Solís.** Obtuvo el grado de Doctor por el Instituto Nacional Politécnico de Grenoble, Francia. Es profesor en el TecNM/ITCM desde 2015. Fue profesor en el ITESM y otras universidades. Tiene mas de 100 publicaciones y ha sido director y asesor de mas de 80 tesis de doctorado y maestría. Es miembro del SNI nivel 2. Sus áreas de

investigación principales son Algoritmia y Optimización con aplicaciones en las áreas de pronóstico, energía y problemas de decisión.



**Guadalupe Castilla Valdez.** Obtuvo el grado de Doctora en Ciencias en Computación por el Instituto Tecnológico de Tijuana en Baja California. Forma parte del cuerpo académico de Posgrado en el Instituto Tecnológico de Ciudad Madero en el área de Ciencias de la Computación. Sus áreas de interés incluyen Algoritmia, Optimización y Sistemas Inteligentes.



**Juan Javier González Barbosa.** Obtuvo el grado de Doctor en Ciencias Computacionales por el Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico en Cuernavaca, México, en el año 2006. Sus áreas de investigación son: Metaheurísticas, Optimización y Aprendizaje Automático.



**Joaquín Pérez Ortega.** Profesor del Departamento de Ciencias Computacionales del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. Recibió el grado de Doctor en Ciencias Computacionales (1999) por parte del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel

II. Entre sus áreas de investigación principales son Algoritmia, Optimización, Minería de datos e Ingeniería de Software.