

On Maximum Likelihood Estimation of Continuous-Time Oscillators Modelled as Continuous-Time Autoregressive System

M. Coronel, K. González, P. Escárate, R. Carvajal, *Member, IEEE*, and J. Agüero, *Member, IEEE*

Abstract—In this paper, we address the problem of identifying a continuous-time oscillator. We use a continuous-time autoregressive model to represent the oscillators. We assume that only discrete-time measurements are available, from which we obtain the oscillator equivalent discrete-time model in terms of the continuous-time model parameters. We identify the model using the Maximum Likelihood method.

Index Terms—Oscillators identification, continuous-time model, Maximum Likelihood, Adaptive Optics, Vibrations.

I. INTRODUCCIÓN

EL estudio de los osciladores continuos ha adquirido importancia en los últimos años debido a su utilización para el análisis de diferentes fenómenos físicos, químicos, eléctricos y biológicos, entre otros [1]–[4]. Entre estos sistemas existen los osciladores armónicos, que han sido tema de interés recurrente en diversas áreas de investigación, tales como Física [5], Matemática [6] e Identificación de Sistemas [7]–[9].

Un gran número de sistemas físicos pueden aproximarse como osciladores armónicos [4]. En [8] y [9] se demostró la utilidad de los osciladores alimentados por ruido para modelar las vibraciones en los sistemas de Óptica Adaptativa (AO), ya que dichos modelos se utilizan para implementar estrategias de control [10], [11] y así mitigar los efectos de las vibraciones, tema de creciente importancia en muchos observatorios astronómicos [12], [13].

La estimación de los sistemas en tiempo continuo, utilizando datos muestreados, fue estudiado anteriormente en [14]–[17], donde la estimación se realiza a través de modelos aproximados. La estimación de estos sistemas tiene diversas aplicaciones como biotecnología [18], identificación de sistemas no lineales [19], identificación a lazo cerrado [20], entre otros. Recientemente se ha utilizado el método de Máxima Verosimilitud (ML) para la estimación de los parámetros de sistemas continuos [7], [21]–[23]. En particular en [7] se presenta la estimación de parámetros de un modelo estocástico

usando una aproximación numérica de la función de verosimilitud y la discretización de la misma, obteniendo mejores resultados al utilizar la discretización de los estimadores correspondientes al problema de tiempo continuo.

Por otra parte, en [23] se muestra la identificación de parámetros de un modelo autorregresivo de media móvil de tiempo-continuo (CARMA). La estimación de los parámetros se realiza a partir de los datos muestreados en tiempo discreto y del modelo de innovaciones [24] en función de los parámetros del sistema en tiempo continuo. En [23], la función de verosimilitud es optimizada utilizando métodos de Newton [25] y realizando una aproximación numérica de la derivada de la función de verosimilitud.

En este artículo se presenta el modelado y la estimación de los parámetros de osciladores armónicos continuos utilizando sistemas autoregresivo continuo (CAR) y la discretización en función de los parámetros del sistema en tiempo continuo. Para la estimación se propone utilizar la técnica de Máxima Verosimilitud (ML), por sus propiedades estadísticas tales como consistencia y eficiencia asintótica [24], [26]. La implementación se realiza mediante la descomposición del error de predicción a través del filtro de Kalman y la optimización de la función de verosimilitud a través del método de Cuasi-Newton BFGS [25], utilizando, a diferencia de lo presentado en [23], la expresión exacta para el gradiente de la función de máxima verosimilitud. Se presentan dos ejemplos numéricos: en el primero se estiman los parámetros de un oscilador armónico y en el segundo se estiman los parámetros de la combinación lineal de dos osciladores.

La estructura del artículo es la siguiente: en la sección II se presenta el modelo en tiempo continuo del sistema de interés, su representación en espacios de estado y su modelo equivalente en tiempo discreto. En la sección III se presenta el método de Máxima Verosimilitud, el cual es utilizado para la estimación de los parámetros. En la sección IV se presentan simulaciones y resultados numéricos. Finalmente en la sección V se presentan las conclusiones.

La notación que se utilizará en el presente trabajo se define a continuación: A^T denota la matriz transpuesta de A , e^A representa a la matriz exponencial de la matriz A . Se utiliza el siguiente vector columna para representar una sub-secuencia de la señal x_t , $x_{k:j} = [x_k^T \ x_{k+1}^T \ \cdots \ x_j^T]^T$. θ_0 denota el valor verdadero del parámetro θ y $\hat{\theta}$ denota una estimación de θ_0 . $\hat{\theta}^{(m)}$ denota la estimación de θ_0 en la m -ésima iteración. $\mathbb{E}\{\cdot\}$ denota el operador esperanza. $\mathbb{E}\{x|y\}$ denota el valor esperado de la variable aleatoria x dado la variable aleatoria y .

M. Coronel, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, maria.coronelm@sansano.usm.cl.

K. González, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, karen.gonzalez@alumnos.usm.cl.

P. Escárate, Instituto de Electricidad y Electrónica, Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Austral, Valdivia, Chile, pedro.escarate@uach.cl.

R. Carvajal, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, rodrigo.carvajalg@usm.cl.

J.C. Agüero, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, juan.aguero@usm.cl.

II. MODELO DEL SISTEMA

En sistemas estocásticos el ruido continuo $\omega(t)$ es un proceso de Wiener o un proceso de movimiento Browniano, el cual tiene incrementos estacionarios independientes, es decir incrementos Gaussianos, por lo que el proceso estocástico definido por la derivada de un proceso de Wiener, $\dot{\omega}(t)$, tiene una distribución Gaussiana [27]. La ecuación diferencial que modela un oscilador armónico con ruido externo está dada por [3, pag.4]:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \zeta(t) + 2\gamma \frac{d}{dt} \zeta(t) + \alpha^2 \zeta(t) = \dot{\omega}(t). \quad (1)$$

Sin pérdida de generalidad, se puede re-escribir de forma exacta la ecuación diferencial dada en (1) utilizando el operador $p = \frac{d}{dt}$ [26], [28]. Considerando un oscilador armónico sin coeficiente de amortiguamiento ($\gamma = 0$) y normalizado ($m = 1$), se obtiene:

$$p^2 \zeta(t) + \alpha^2 \zeta(t) = \dot{\omega}(t) \Rightarrow \zeta(t) = \frac{1}{p^2 + \alpha^2} \dot{\omega}(t). \quad (2)$$

En este artículo el sistema de interés es modelado como una combinación lineal de osciladores sin amortiguamiento, por lo que el sistema está dado por:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p^2 + \alpha_i^2} \dot{\omega}(t), \quad (3)$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema, α_i denota la frecuencia de oscilación expresada en [rad/s], $\omega(t)$ es un proceso de Wiener, y así $\dot{\omega}(t)$ es un proceso Gaussiano de media cero y varianza $\mathbb{E}\{\dot{\omega}^2(t)\} = \sigma^2 \delta(t)$, donde δ corresponde al operador delta de Dirac.

Si se tiene que $\sigma^2 = 1$, entonces la magnitud de cada pico del espectro de potencia de la señal $y(t)$ en (3) se puede obtener definiendo β_i como la ganancia del oscilador. Es decir:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{p^2 + \alpha_i^2} \dot{\omega}(t), \quad \text{con } \beta_i > 0. \quad (4)$$

A. Modelo en Espacio de Estado Equivalente

A modo de obtener un modelo en espacio de estado equivalente del modelo en (4), se parametrizan las matrices de estado en función de las frecuencias de oscilación y de su magnitud. Por lo tanto, el modelo en espacio de estado equivalente está dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \kappa \dot{\omega}(t), \quad (5)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (6)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\kappa \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times 2n}$ tienen la siguiente estructura:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_n^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & | & 0 & \beta_2 & | & \cdots & | & 0 & \beta_n \end{bmatrix}^T, \quad (8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 & | & \cdots & | & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

donde en (8) y (9) la línea vertical representa la separación entre duplas de elementos, correspondiente a cada término de la suma en (4). Como se observa en (9), C es independiente de los parámetros $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$, donde $\vec{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n]^T$ y $\vec{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_n]^T$. Finalmente, el vector de parámetros a estimar está dado por $\theta = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}^T & \vec{\beta}^T \end{bmatrix}^T$.

Típicamente se supone que el estado inicial del sistema en espacio de estado tiene una distribución Gaussiana de media μ_0 y covarianza Σ_0 y que es independiente de $\dot{\omega}(t)$, ver [23] y sus referencias.

B. Modelo Equivalente en Tiempo-Discreto

Para un intervalo de muestreo $\Delta = t_{k+1} - t_k$ constante y positivo, se obtiene que el modelo de oscilaciones en tiempo-discreto equivalente es [17]:

$$x(t_{k+1}) = e^{A\Delta} x(t_k) + v(t_k), \quad (10)$$

$$y(t_k) = Cx(t_k), \quad (11)$$

donde

$$v(t_k) = \int_0^\Delta e^{A\eta} \kappa \dot{\omega}(t_{k+1} - \eta) d\eta, \quad (12)$$

es ruido blanco de media cero y varianza Q_d .

Las matrices $e^{A\Delta}$ y Q_d se pueden calcular eficientemente a partir de una matriz exponencial extendida (ver Apéndice A).

III. MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Un método ampliamente utilizado en muchos de los problemas de estimación es el método de Máxima Verosimilitud (ML) [24], [26], en el cual el problema de estimación se puede escribir como el siguiente problema de optimización:

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\theta} L_N(\theta), \quad (13)$$

donde $L_N(\theta)$ es la función de verosimilitud que se obtiene a partir del modelo del sistema y las mediciones. A modo de simplificar los cálculos, se define la función log-verosimilitud:

$$\ell_N(\theta) = \log [L_N(\theta)]. \quad (14)$$

Dado que $\log[\cdot]$ es una función monótona, el problema de optimización puede ser re-escrito como el siguiente problema de minimización:

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \min_{\theta} -\ell_N(\theta). \quad (15)$$

La función log-verosimilitud se puede calcular mediante la descomposición del error de predicción [26] a través del filtro de Kalman [23], [29]. Como:

$$\ell_N(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_k^2(\theta)}{\Lambda_k(\theta)} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \log [\Lambda_k(\theta)], \quad (16)$$

donde el error de predicción ε_k se define como

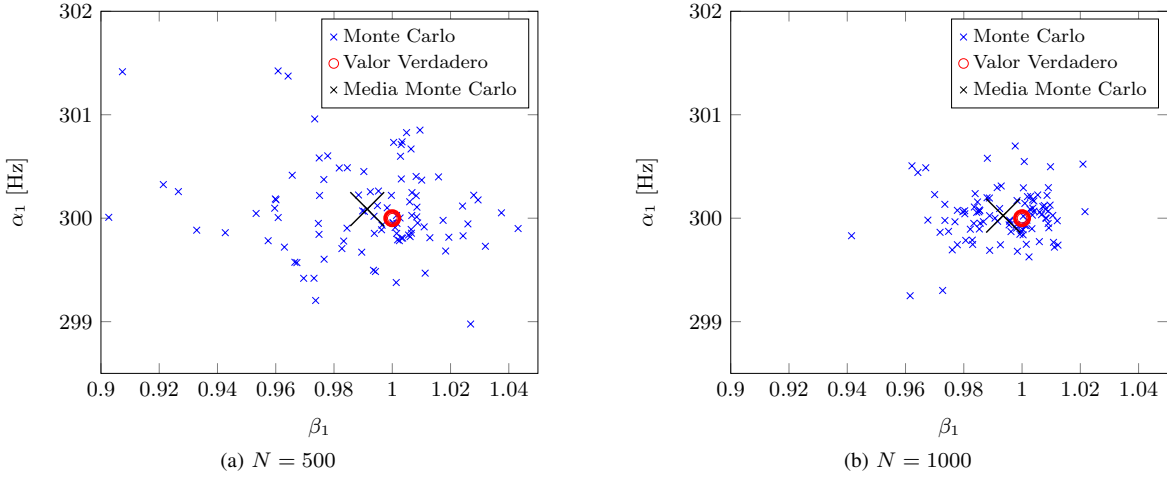


Fig. 1. Estimación de $\theta = [\alpha \beta]^T$ para 100 realizaciones de Monte Carlo, utilizando (a) $N = 500$ y (b) $N = 1000$ muestras de la señal de salida y_k

$$\varepsilon_k(\theta) = y_k - \mathbb{E}\{y_k | y_{0:k-1}, \theta\}, \quad (17)$$

$$= y_k - C\hat{x}_{k|k-1}, \quad (18)$$

con media cero y varianza

$$\Lambda_k(\theta) = \mathbb{E}\{\varepsilon_k^2 | y_{0:k-1}, \theta\}, \quad (19)$$

$$= C\Sigma_{k|k-1}C^T. \quad (20)$$

Además, dado que se consideró que el estado inicial tiene una distribución Gaussiana, y_0 se distribuye de manera normal con media $\hat{y}_{0|-1}(\theta)$ y varianza $\Sigma_{0|-1}(\theta)$.

Note que en este caso la función log-verosimilitud (14) es no convexa, por lo que es necesario resolver el problema de minimización en (15) a través de métodos numéricos. En la optimización de funciones no convexas se encuentran generalmente máximos locales [9], [23], por cuanto se requiere que la inicialización sea cercana al máximo global. Dado lo anterior se utilizará la técnica de Cuasi-Newton BFGS [25], donde no se requiere calcular la inversa de la matriz Hessiana de manera exacta, sino que se aproxima numéricamente. De esta manera, la estimación del parámetro θ se actualiza iterativamente como:

$$\hat{\theta}^{(m+1)} = \hat{\theta}^{(m)} - \mu^{(m)} S^{(m)} \nabla \ell(\theta) |_{\theta=\hat{\theta}^{(m)}}, \quad (21)$$

donde $\nabla \ell(\theta)$ corresponde al vector gradiente de $\ell(\theta)$ y $S^{(m)}$ es una matriz que aproxima la inversa de la matriz Hessiana $\nabla^2 \ell(\theta) |_{\theta=\hat{\theta}^{(m)}}$, mientras que $\mu^{(m)}$ corresponde al paso de la m -ésima iteración [25].

Observación: Los métodos de Cuasi-Newton resultan típicamente en más iteraciones que el método de Newton, pero cada iteración con un menor costo computacional. Dentro de los métodos de Cuasi-Newton más populares se encuentran BFGS [25] y Barzilai-Borwein [30]. ∇

El vector gradiente de $\ell(\theta)$ se calcula como:

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta_j} = - \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_k}{\Lambda_k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta_j} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\Lambda_k} - \frac{\varepsilon_k^2}{\Lambda_k^2} \right) \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \theta_j}, \quad (22)$$

con $j = 1, 2, \dots, n$, donde θ_j denota a la j -ésima componente

del vector de parámetros θ . Los términos $\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta_j}$ y $\frac{\partial \Lambda_k}{\partial \theta_j}$ están dados por:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta_j} = -C \frac{\partial \hat{x}_{k|k-1}}{\partial \theta_j}, \quad \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \theta_j} = C \frac{\partial \Sigma_{k|k-1}}{\partial \theta_j} C^T. \quad (23)$$

Note que $\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \theta_j}$ y $\frac{\partial \Lambda_k}{\partial \theta_j}$ dependen de las derivadas del estado y la varianza estimada (proveniente del filtro de Kalman) respecto al vector de parámetros θ . Los detalles de los cálculos correspondientes se encuentran en el Apéndice B.

IV. EJEMPLO NUMÉRICO

A. Ejemplo 1

En este ejemplo, se considera un oscilador en tiempo continuo modelado como:

$$y(t) = \frac{\beta}{p^2 + \alpha^2} \dot{\omega}(t), \quad (24)$$

donde el proceso $\dot{\omega}(t)$ es de media cero y tiene un espectro de potencia $\sigma^2 = 1$. El vector de parámetros a identificar es $\theta = [\alpha \beta]^T$.

Los datos simulados se generan con los siguientes parámetros: $\alpha = 2\pi 300$ [rad/s], $\beta = 1$ y periodo de muestreo $\Delta = 1$ [ms]. La simulación se realizó con $N = 500$ y $N = 1000$ muestras de y_k . La estimación de la frecuencia se realizó en [Hz], ya que el estimador de Máxima Verosimilitud es invariante ante transformaciones en el espacio de los parámetros [31].

Como ya se mencionó es necesaria una buena inicialización, ya que se está utilizando un algoritmo de optimización local. Dado que es tan importante la inicialización y se está trabajando con osciladores, se utilizará como punto de partida para el algoritmo de optimización la frecuencia correspondiente al máximo de la densidad espectral de potencia (PSD) de la señal $y_{0:N-1}$. La PSD se obtiene a partir de la transformada rápida de Fourier de los datos y su valor está expresado en [Hz], para la inicialización de la ganancia se realizaron distintas pruebas con valores cercanos al valor verdadero, aquí se reporta lo obtenido para un $\beta^0 = 0.8$.

El algoritmo de optimización fue implementado a través de la función `fminunc` de Matlab, con la opción

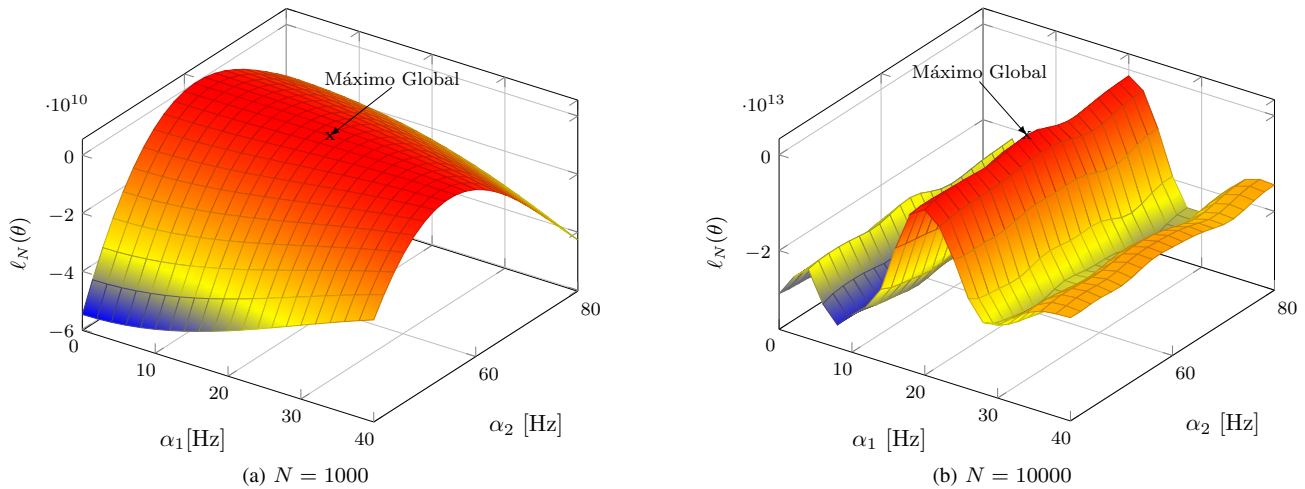


Fig. 2. Gráfico de la Función de Verosimilitud de vibraciones generadas por dos osciladores con $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = 0.1$, utilizando $N = 1000$ y $N = 10000$ muestras de la señal de salida y_k .

TABLA I

ESTIMACIONES AL REALIZAR VARIACIONES EN LA INICIALIZACIÓN DE α .

$\% \alpha^0$	$\hat{\alpha}$ [Hz]	$\hat{\beta}$
-25	299.9731 \pm 0.1861	0.9954 \pm 0.0135
0	300.0116 \pm 0.1797	0.9940 \pm 0.0136
+25	299.9589 \pm 0.1751	0.9935 \pm 0.0158

TABLA II

ESTIMACIONES AL REALIZAR VARIACIONES EN LA INICIALIZACIÓN DE β .

$\% \beta^0$	$\hat{\alpha}$ [Hz]	$\hat{\beta}$
-20	300.0444 \pm 0.2530	1.6127 \pm 0.1346
0	300.0116 \pm 0.1797	0.9940 \pm 0.0136
+20	299.9833 \pm 0.1730	1.0115 \pm 0.0367

'Algorithm', 'quasi-Newton', el cual utiliza el método BFGS.

En la Fig. 1 se presentan los resultados de la simulación de 100 realizaciones de Monte Carlo. En dicha Fig. se observa claramente que se obtiene una buena estimación de los parámetros. Esto se debe a que la inicialización fue cercana a los valores reales de los parámetros. Se puede apreciar, además, que los resultados de la estimación son mejores con $N = 1000$ muestras, obteniendo una menor desviación estándar en ambos parámetros. Finalmente, se realizó un análisis de sensibilidad en torno a la inicialización, utilizando $N = 1000$, cuyos resultados se presentan en las Tablas I y II. En la Tabla I se muestran las estimaciones al realizar variaciones en la inicialización de la frecuencia de $\pm 25\%$ del valor obtenido con la PSD, donde se puede observar como, a pesar de la variación, las estimaciones son muy buenas. En la Tabla II se presentan las estimaciones al realizar variaciones en la inicialización de la ganancia de $\pm 20\%$, observándose que las estimaciones de α siguen siendo muy cercanas al valor verdadero. Sin embargo, las estimaciones de β no son tan precisas, por lo que se puede concluir que el método propuesto es más sensible a la inicialización de la ganancia del oscilador.

B. Ejemplo 2

En este ejemplo se considera un sistema con dos osciladores

$$y(t) = \left[\frac{\beta_1}{p^2 + \alpha_1^2} + \frac{\beta_2}{p^2 + \alpha_2^2} \right] \dot{\omega}(t), \quad (25)$$

donde el proceso $\dot{\omega}(t)$ es de media cero y espectro de potencia $\sigma^2 = 1$. El vector de parámetros a identificar es $\theta = [\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2]^T$.

Los datos simulados se generan con los siguientes parámetros: $\alpha_1 = 2\pi 20$ [rad/s], $\alpha_2 = 2\pi 60$ [rad/s], $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 0.1$, periodo de muestreo $\Delta = 10$ [μ s].

En este ejemplo, se analiza la función de log-verosimilitud considerando $N = 1000$ y $N = 10000$, como se muestra en la Fig. 2. En dicha Fig. se observa la presencia de máximos locales, haciendo necesaria una buena inicialización. En esta Fig. se puede observar también cómo al aumentar la cantidad de muestras se acentuó más el máximo global. En la Tabla III se presentan los resultados de la simulación de 100 realizaciones de Monte Carlo, utilizando $N = 10000$, para la inicialización de la frecuencia se utilizó el valor de la PSD y para la ganancia se probaron diferentes valores y aquí se reporta lo obtenido con $\beta_1^0 = 2.2$ y $\beta_2^0 = 0.3$. Se puede apreciar que se obtiene una buena estimación tanto para las frecuencias como para las ganancias.

En la Fig. 3 se presenta la densidad espectral de potencia para este ejemplo, la cual emula el comportamiento de la PSD de la señal de vibraciones en [11, Fig. 6], cuyos datos fueron obtenidos durante la campaña de observación 2014b dirigida por el equipo MagAO de la Universidad de Arizona en la noche del 31 de octubre de 2014, en el Telescopio Clay en el Observatorio Las Campanas. Note que lo presentado en la

TABLA III

ESTADÍSTICAS DE LA ESTIMACIÓN DEL EJEMPLO 2

	$\hat{\alpha}$ [Hz]	$\hat{\beta}$
$i = 1$	19.82 \pm 1.834	1.99 \pm 0.011
$i = 2$	59.00 \pm 0.764	0.09 \pm 0.012

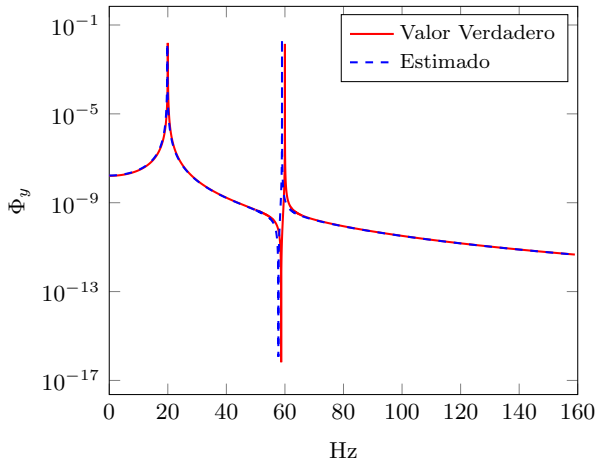


Fig. 3. Densidad espectral de potencia de los dos osciladores presentado en el ejemplo 2.

Fig. 3 corresponde solo a los dos picos mas importantes de frecuencia (20 y 60) Hz. Adicionalmente en esta Fig. también se presenta la densidad espectral de potencia promedio de las estimaciones obtenidas, observándose como ambas coinciden, lo que confirma que es una buena estimación.

V. CONCLUSIONES

En este artículo, se utilizó el método de Máxima Verosimilitud para identificar los parámetros de los modelos de los osciladores en tiempo continuo a partir de muestras en tiempo discreto. El sistema se expresó como modelo de espacio de estado en tiempo-continuo muestreado uniformemente. La función log-verosimilitud se calculó mediante la descomposición del error de predicción a través del filtro de Kalman, mientras que los parámetros fueron estimados localmente utilizando técnicas de cuasi-Newton y la expresión exacta de la derivada de la función de máxima verosimilitud.

Se evidenció que la estimación de los parámetros depende de la cantidad de muestras seleccionadas, mejorando al aumentar.

Se mostró la presencia de mínimos locales en la función de log-verosimilitud, por lo que es necesario una buena inicialización del algoritmo de optimización, al utilizar técnicas numéricas de optimización local. Para futuros trabajos se propone utilizar métodos de optimización global, con lo que se puede inicializar la optimización en cualquier valor arbitrario. Además, se puede extender el análisis a osciladores armónicos con amortiguamiento.

APÉNDICE A

CÁLCULO DE LAS MATRICES $e^{A\Delta}$ Y Q_d DEL MODELO EN TIEMPO-DISCRETO.

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \dot{v}(t) \quad (26)$$

con $\mathbb{E}\{\dot{v}(t)\dot{v}(r)\} = Q_c\delta(t-r)$. El sistema muestreado con tiempo de muestreo Δ , está dado por:

$$x_{k+1} = e^{A\Delta}x_k + v_k \quad (27)$$

donde la matriz $e^{A\Delta}$ y la matriz de covarianza de v_k se obtienen con el método presentado en [16], [32]. En dicho método se realiza de forma eficiente y compacta el cálculo de integrales que incluyen la matriz exponencial. A partir de la siguiente matriz exponencial extendida

$$\exp\left\{\begin{bmatrix} -A & Q_c \\ 0 & A^T \end{bmatrix}\Delta\right\} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

se puede obtener simultáneamente tanto la matriz $e^{A\Delta}$ como la matriz de varianza del ruido v_k del modelo en tiempo discreto:

$$e^{A\Delta} = P_{22}^T; \quad Q_d = \int_0^\Delta e^{A\eta}Q_c e^{A^T\eta}d\eta = P_{22}^T P_{12}. \quad (29)$$

APÉNDICE B

CÁLCULO DE DERIVADAS NECESARIAS PARA OBTENER EL GRADIENTE DE LA FUNCIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.

- Derivadas de la etapa de predicción del Filtro de Kalman respecto a los parámetros a estimar

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_k}{\partial \theta_j} &= \frac{\partial \Sigma_{k|k-1}}{\partial \theta_j} C^T \left(C \Sigma_{k|k-1} C^T \right)^{-1} \\ &\quad - \Sigma_{k|k-1} C^T \left(C \Sigma_{k|k-1} C^T \right)^{-2} \left(C \frac{\partial \Sigma_{k|k-1}}{\partial \theta_j} C^T \right) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \hat{x}_{k|k}}{\partial \theta_j} = \frac{\partial \hat{x}_{k|k-1}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial K_k}{\partial \theta_j} (y_k - C \hat{x}_{k|k-1}) - K_k C \frac{\partial \hat{x}_{k|k-1}}{\partial \theta_j} \quad (31)$$

$$\frac{\Sigma_{k|k}}{\partial \theta_j} = (I - K_k C) \frac{\Sigma_{k|k-1}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial K_k}{\partial \theta_j} C \Sigma_{k|k-1} \quad (32)$$

- Derivadas de la etapa de corrección del Filtro de Kalman respecto a los parámetros a estimar

$$\frac{\partial \hat{x}_{k+1|k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial A_d}{\partial \alpha_i} \hat{x}_{k|k} + A_d \frac{\partial \hat{x}_{k|k}}{\partial \alpha_i} \quad (33)$$

$$\frac{\Sigma_{k+1|k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial A_d}{\partial \alpha_i} \Sigma_{k|k} A_d^T + A_d \frac{\partial \Sigma_{k|k}}{\partial \alpha_i} A_d^T + A_d \Sigma_{k|k} \frac{\partial A_d^T}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial Q_d}{\partial \alpha_i} \quad (34)$$

$$\frac{\partial \hat{x}_{k+1|k}}{\partial \beta_i} = A_d \frac{\partial \hat{x}_{k|k}}{\partial \beta_i} \quad (35)$$

$$\frac{\Sigma_{k+1|k}}{\partial \beta_i} = A_d \frac{\partial \Sigma_{k|k}}{\partial \beta_i} A_d^T + \frac{\partial Q_d}{\partial \beta_i} \quad (36)$$

- Derivadas de la matriz de varianza Q_d respecto a los parámetros a estimar

$$\frac{\partial Q_d}{\partial \alpha_i} = \int_0^\Delta \left(\frac{\partial e^{A\eta}}{\partial \alpha_i} Q_c e^{A^T\eta} + e^{A\eta} Q_c \frac{\partial e^{A^T\eta}}{\partial \alpha_i} \right) d\eta \quad (37)$$

$$\frac{\partial Q_d}{\partial \beta_i} = \int_0^\Delta e^{A\eta} \frac{\partial Q_c}{\partial \beta_i} e^{A^T\eta} d\eta \quad (38)$$

- Derivadas de la matriz $e^{A\Delta}$ respecto al parámetro α_i

$$\frac{\partial e^{A\Delta}}{\partial \alpha_i} = \Delta e^{A\Delta} \frac{\partial A}{\partial \alpha_i} \quad (39)$$

AGRADECIMIENTOS

El trabajo de M. Coronel fue patrocinado por el programa CONICYT-PFCHA/ Doctorado Nacional/2017-21170804, Chile. El trabajo de K. González fue financiado por el Programa de Incentivos a la Iniciación Científica (PIIC) de la Dirección de Postgrado y Programas de la Universidad

Técnica Federico Santa María No. 033/2017. El trabajo de R. Carvajal y J. C. Agüero fue parcialmente financiado por FONDECYT, Chile a través del proyecto No. 1181158. P. Escárate agradece al Núcleo Milenio de Formación Planetaria - NPF. Este trabajo fue parcialmente financiado por el Centro Avanzado de Ingeniería Eléctrica y Electrónica (AC3E, Proyecto Basal FB0008), Chile.

REFERENCIAS

- [1] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, 1970.
- [2] M. Moshinsky and Y. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood Academic Publishers ed.
- [3] M. Gitterman, *The Noisy Oscillator*. World Scientific, 2005.
- [4] L. Meirovitch, *Fundamentals of Vibrations*. McGraw-Hill, 2001.
- [5] M. Gitterman, "New stochastic equation for a harmonic oscillator: Brownian motion with adhesion," *J. Phys.: Conf. Ser.* 248, no. 012049, 2010.
- [6] N. Lin and S. Lototsky, "Undamped harmonic oscillator driven by additive gaussian white noise: A statistical analysis," *Communications on Stochastic Analysis*, vol. 5, no. 1, pp. 233–250, 2011.
- [7] A. Prior and P. de Oliveira, "Parameter estimation of a two regime stochastic differential model for a bilinear oscillator subjected to random loads," in *Proc. of the 9th International Conference on Structural Dynamics.*, 2014, pp. 2845–2852.
- [8] P. Escárate, M. Coronel, K. González, R. Carvajal, and J. Agüero, "Vibration model identification using the maximum likelihood method," 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1117/12.2314080>
- [9] K. González, M. Coronel, R. Carvajal, P. Escárate, and J. Agüero, "Maximum likelihood identification of a continuous-time oscillator utilizing sampled data," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 15, pp. 712–717, 2018.
- [10] P. Escárate, J. Agüero, S. Zuñiga, and J. Marchioni, "Model predictive control for laser beam shaping," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, no. 4, pp. 626–631, Apr. 2017.
- [11] P. Escárate, R. Carvajal, L. Close, J. Males, K. Morzinski, and J. C. Agüero, "Minimum variance control for mitigation of vibrations in adaptive optics systems," *Applied Optics*, vol. 56, no. 19, pp. 5388–5397, July 2017.
- [12] G. Jakob and J. L. Lizon, "Vibration specifications for vlt instruments," 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1117/12.2054475>
- [13] S. Zuñiga, J. Garcés, L. M. Close, J. R. Males, K. M. Morzinski, P. Escárate, and M. Castro, "Vibrations in MagAO: analysis of on-sky data and future challenges in vibrations mitigation," in *Imaging and Applied Optics 2015*. Optical Society of America, 2015.
- [14] B. Wahlberg, "Limit results for sampled systems," *International Journal of Control*, vol. 48, no. 3, pp. 1267–1283, 1988.
- [15] H. Garnier and L. W. (Eds.), *Identification of continuous-time models from sampled data*, 1st ed., ser. Advances in industrial control. Springer-Verlag London, 2008.
- [16] L. Ljung and A. Wills, "Issues in sampling and estimating continuous-time models with stochastic disturbances," *Automatica*, vol. 46, no. 5, pp. 925–931, 2010.
- [17] G. C. Goodwin, J. C. Agüero, M. E. Cea-Garrido, M. E. Salgado, and J. I. Yuz, "Sampling and sampled-data models: The interface between the continuous world and digital algorithms," *IEEE Control Systems*, vol. 33, no. 5, pp. 34–53, Oct 2013.
- [18] W. Piña, V. Feliu, and R. Rivas, "Direct continuous-time system identification of the purification process of the nimotuzumab, a humanized monoclonal antibody," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 1, pp. 31–37, January 2018.
- [19] D. S. Carrasco, L. Ljung, G. C. Goodwin, and J. C. Agüero, "On the accuracy of parameter estimation for continuous time nonlinear systems from sampled data," in *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Dec 2011, pp. 4308–4311.
- [20] F. Chen, M. Gilson, J. C. Agüero, H. Garnier, and J. Schorsch, "Closed-loop identification of continuous-time systems from non-uniformly sampled data," in *2014 European Control Conference (ECC)*, June 2014, pp. 19–24.
- [21] J. I. Yuz, J. Alfaro, J. C. Agüero, and G. C. Goodwin, "Identification of continuous-time state-space models from non-uniform fast-sampled data," *IET Control Theory Applications*, vol. 5, no. 7, pp. 842–855, May 2011.
- [22] H. Kirshner, S. Maggio, and M. Unser, "A sampling theory approach for continuous arma identification," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 10, pp. 4620–4634, Oct. 2011.
- [23] F. Chen, J. C. Agüero, M. Gilson, H. Garnier, and T. Liu, "EM-based identification of continuous-time ARMA models from irregularly sampled data," *Automatica*, vol. 77, no. 3, pp. 293–301, 2017.
- [24] T. Söderström, *Discrete-Time Stochastic Systems: Estimation and Control*, 2nd ed. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [25] R. Fletcher, *Practical methods of optimization*. Vol 1:Unconstrained Optimization: John Wiley & Sons, 1980.
- [26] L. Ljung, *System Identification: Theory for User*, 2nd ed. Prentice Hall, 1999.
- [27] K. Åström, *Introduction to Stochastic Control Theory*. Academic Press, 1970.
- [28] K. Aljanaideh and D. Bernstein, "Initial conditions in time-and frequency-domain system identification," *IEEE Control Systems Magazine*, no. 1, pp. 80–93, 2018.
- [29] J. Agüero, J. Y. W. Tang, R. Delgado, and G. Goodwin, "Dual time-frequency domain system identification," *Automatica*, vol. 48, no. 12, pp. 3031–3041, 2012.
- [30] J. Barzilai and J. Borwein, "Two-point step size gradient methods," *Numer. Anal.*, vol. 8, no. 1, pp. 141–148, 1988.
- [31] Y. Pawitan, *In All Likelihood Statistical Modelling and Inference Using Likelihood*, 2nd ed. Oxford New York: Clarendon Press Oxford, 2001.
- [32] C. F. Van Loan, "Computing integrals involving the matrix exponential," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 3, pp. 395–404, June 1978.

María Coronel nació en Venezuela. Obtuvo título de Ingeniero Electrónico de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, y el grado de MS.c en Automatización e Instrumentación de la Universidad de Los Andes (Venezuela). Desde el 2009 es profesora de la Escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Los Andes, Venezuela. Actualmente, es estudiante del Doctorado en Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. Sus áreas de investigación son modelado e identificación de sistemas, sistemas de control no lineal e instrumentación.

Karen González nació en Calama, Chile. Recibió el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Técnica Federico Santa María (UTFSM), Valparaíso, Chile. Sus áreas de interés incluyen identificación de sistemas, control automático e Instrumentación Astronómica.

Pedro Escárate nació en Chile. Obtuvo el grado de MS.c en Ciencias de la Ingeniería y el grado de Doctor en Ciencias de la Ingeniería con mención en Ingeniería Eléctrica, en la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Chile. En 2007-2008, fue investigador en el Istituto di Struttura della Materia, Italia, en 2012-2016 fue Investigador en el Departamento de Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María (UTFSM), en 2016-2018 fue investigador en el Large Binocular Telescope Observatory, Tucson, Arizona. Actualmente es académico en el Instituto de Electricidad y Electrónica, Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Universidad Austral, Valdivia, Chile. Sus áreas de interés son identificación de sistemas, control automático e Instrumentación Astronómica.

Rodrigo Carvajal nació en Valparaíso Chile. Recibió el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de MS.c en Ciencias de la Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Recibió el grado de doctor (PhD) de la Universidad de Newcastle (Australia) en el año 2013. El Dr. Carvajal es investigador del Departamento de Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María desde el año 2012. Sus áreas de interés son sistemas de comunicaciones, procesamiento de señales e identificación de sistemas.

Juan C. Agüero nació en Osorno, Chile. Obtuvo el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de MS.c en Ingeniería de la Universidad Técnica Federico Santa María (Chile), el grado de doctor (PhD) de la Universidad de Newcastle, Australia. El Dr. Agüero obtuvo experiencia industrial en los años 1997 y 1998 en la industria minera del cobre en la mina El Teniente, Codelco (Chile). En 2006-2014 fue investigador de la Escuela de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación de la Universidad de Newcastle, Australia. Actualmente es académico del Departamento de Ingeniería Electrónica en la Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. Sus áreas de interés son identificación de sistemas, control y procesamiento de señales.