




Integral Action and Reduced-Order Observer-Based Control for a Magnetic Levitation System

Cuauhtémoc Guerrero , Marcos A. González-Olvera , and Carlos M. Ortiz-Cervantes 

Abstract—This paper presents the experimental implementation and validation of a single-sensor control architecture for a nonlinear magnetic levitation system based on well-established linear control techniques. The main contribution is the practical demonstration that accurate levitation control can be achieved using only position measurement, thereby simplifying the sensing hardware and reducing implementation costs compared to traditional multi-sensor approaches. An integral action is incorporated into the linear quadratic regulator (LQR) framework to ensure zero steady-state error under step-type reference variations. The complete closed-loop system stability is guaranteed by the separation principle between the controller and the observer dynamics. The proposed design was experimentally validated on a Quanser Magnetic Levitation platform, achieving a low steady-state position error and current estimation error. The experimental results on a Quanser platform demonstrate the practical feasibility of the single-sensor architecture, achieving position errors below 0.35 mm and confirming that classical LQR and reduced-order observer techniques can be effectively integrated for cost-effective magnetic levitation control.

Link to graphical and video abstracts, and to code:
<https://latam.ieee9.org/index.php/transactions/article/view/10363>

Index Terms—Magnetic Levitation, Feedback Control, State Observer, Nonlinear Systems.

I. INTRODUCCIÓN

LOS sistemas de levitación magnética (*maglev*, por sus siglas iniciales en inglés) han sido ampliamente reconocidos y utilizados como modelos de referencia debido a su inestabilidad inherente y los retos de control que presentan. Estos sistemas permiten mantener materiales ferromagnéticos suspendidos en el aire mediante fuerzas electromagnéticas, eliminando problemas de fricción y reduciendo el desgaste del material. Gracias a estas propiedades, los sistemas *maglev* han encontrado aplicaciones en diversas áreas, como el transporte terrestre, donde han servido como base para el desarrollo de trenes magnéticos [1, 2], tanto para baja y media velocidad [3], así como en los de alta velocidad [4, 5]. Además, se emplean en sistemas de aislamiento de vibraciones para dispositivos

The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Adriana Téllez (*Corresponding author: Marcos Angel Gonzalez-Olvera*).

The authors would like to thank Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) for supporting this work through project UACM-CCYT-2023-IMP-05.

C. Guerrero, and Marcos Angel Gonzalez-Olvera are with Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Ciudad de México, México (e-mails: cuauhtemoc.guerrero@uacm.edu.mx, and marcos.angel.gonzalez@uacm.edu.mx).

C. M. Ortiz-Cervantes is a student in Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Ciudad de México, México (e-mail: micxiu.ortiz@estudiante.uacm.edu.mx).

sensibles y en el posicionamiento preciso de placas durante procesos de fotolitografía [6].

El control eficiente de estos sistemas es crítico debido a su no linealidad y la inestabilidad de sus puntos de equilibrio. Estas características han llevado a que los sistemas *maglev* sean utilizados como plataformas experimentales para evaluar enfoques de control avanzados, tanto lineales como no lineales. Entre las estrategias clásicas destacan los controladores Proporcional-Integral-Derivativo (PID), que suelen requerir un conocimiento preciso de los parámetros del sistema y emplean técnicas de retroalimentación basadas en modelos linealizados [7]. Sin embargo, estas aproximaciones enfrentan limitaciones en escenarios con alta incertidumbre paramétrica o perturbaciones significativas [8].

Diversos estudios han explorado enfoques alternativos que buscan mejorar la robustez frente a estas limitaciones. Por ejemplo, los controladores basados en modos deslizantes (*sliding mode control*, *SMC*) han demostrado ser efectivos en el manejo de no linealidades e incertidumbres [9], mientras que técnicas híbridas como la combinación de redes neuronales de funciones de base radial (*RBF*) y controladores *SMC* han mostrado mejoras significativas en precisión y estabilidad [10] o en la fusión de una *RBF* en un controlador adaptable no lineal para estabilizar el entrehierro de un vehículo *maglev* [11]. En el ámbito de los controladores robustos, se han desarrollado esquemas adaptativos con optimización por algoritmos de enjambre de partículas para aplicaciones específicas, como sistemas de transporte *maglev* [12], así como controladores robustos no lineales diseñados mediante técnicas de *backstepping* [13].

En un enfoque más reciente, se han propuesto métodos que integran observadores de estados con controladores adaptativos para compensar problemas de medición y estimación de parámetros. Por ejemplo, los controladores Generalizados Proporcional-Integral (GPI) han sido combinados con esquemas de identificación de parámetros en línea para simplificar el modelado eléctrico [14], mientras que técnicas de control basadas en pasividad han incluido la variación de inductancia del electroimán para mejorar la precisión del modelo [15]. Sin embargo, muchos de estos métodos dependen de un conocimiento detallado de los parámetros del sistema, lo que limita su aplicabilidad en sistemas que muestren incertidumbre o dinámicas no modeladas.

Uno de los principales desafíos en el control de sistemas electromecánicos como los *maglev* es la reconstrucción precisa de variables no medibles, como la velocidad y la corriente. Las técnicas convencionales, como diferenciadores de alta ganancia, enfrentan problemas relacionados con fenómenos de so-

bresalto y robustez limitada [16]. Las técnicas de convergencia en tiempo finito, como los diferenciadores exactos robustos de primer orden [17], ofrecen soluciones prometedoras, aunque su implementación puede ser compleja e ineficiente. En este sentido, en [18] se propone emplear un derivador basado en un diferenciador por modos deslizantes, pero su inclusión no está considerada en el análisis de estabilidad en lazo cerrado. Otro desafío de los sistemas maglev, es el retraso de tiempo, el cual en exceso puede provocar inestabilidad, por lo que para sobrellevar esta situación en [19] integran un predictor Smith con un control PID.

Por lo tanto, en este trabajo se propone la integración y validación experimental de técnicas lineales establecidas, como el observador de orden reducido y LQR con acción integral, en una arquitectura de un solo sensor. La contribución principal permite validar experimentalmente que el control efectivo puede lograrse usando únicamente medición de posición, simplificando los requerimientos de hardware. La propuesta reduce la necesidad de sensores adicionales, simplificando el sistema y mejorando su aplicabilidad en entornos prácticos. La contribución principal del presente trabajo es de aplicación de ingeniería de control utilizando sólo una señal de retroalimentación, lo cual se puede verificar con los resultados obtenidos mediante simulaciones y experimentos, ya que demuestran la efectividad del diseño propuesto, validando su potencial para aplicaciones en control avanzado.

II. SISTEMA LEVITADOR MAGNÉTICO

El sistema maglev utilizado en este trabajo es la planta de Levitación Magnética “Quanser Magnetic Levitation”, mostrada en la Fig. 1 [20]. El sistema está constituido por tres componentes principales: en la parte superior se encuentra un electroimán formado por una bobina devanada alrededor de un núcleo de acero; la parte media contiene el espacio de suspensión de una bola de material ferromagnético; y en la parte inferior se ubica un poste no conductor ni ferromagnético con un fototransistor que mide indirectamente la posición $z(t)$ mediante el voltaje V_b . Como se observa en el diagrama esquemático de la Fig. 1, el sistema comprende un subsistema eléctrico y otro electromecánico [18, 21], con desplazamiento vertical positivo hacia abajo medido desde la superficie inferior del núcleo del electroimán.

En el subsistema eléctrico se cuenta con un sensor de corriente en serie.

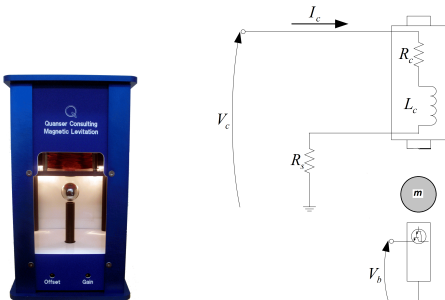


Fig. 1. Imagen y diagrama esquemático del sistema levitador magnético (extraídos de [20] y [21]).

En cuanto al subsistema eléctrico, si se proporciona un voltaje V_c a las terminales de la bobina se tiene una demanda de corriente i_c lo que genera un campo magnético en la bobina que abarca hasta donde se encuentra la bola, por lo que el voltaje V_c es la entrada de control para la posición de la bola. La bobina, al ser un devanado de alambre, colleva un efecto inductivo y resistivo que se asume de parámetros concentrados de inductancia L_c y resistencia R_c , mientras que el sensor de corriente sólo tiene el parámetro resistencia R_s .

Al aplicar ley de voltajes de Kirchhoff se tiene

$$Ri_c(t) + L_c \frac{d}{dt} i_c(t) = V_c(t), \quad (1)$$

donde $R = R_c + R_s$ es la resistencia total de la bobina y del sensor de corriente.

Por otro lado, respecto al subsistema electro-mecánico, se tiene que la fuerza de atracción que genera la bobina a la bola es dado por una función no lineal aproximada como [18]

$$F_c = \frac{1}{2} \frac{K_m i_c^2}{z^2}, \quad (2)$$

donde $z > 0$ es la posición de la bola que hay desde la parte final del núcleo de acero del electroimán y la cara de la bola, K_m es una constante de fuerza electromagnética que depende de las propiedades magnéticas y la geometría de la bola [21].

Con esto, se obtiene una ecuación de equilibrio de fuerzas como

$$m\ddot{z} = -\frac{1}{2} \frac{K_m i_c^2}{z^2} + mg, \quad (3)$$

con g la constante de aceleración debida a la gravedad y m la masa de la bola.

A. Modelo Espacio de Estados no Lineal

Se definen los estados del sistema como x_1 para la corriente que circula por la bobina, x_2 la posición de la bola y $x_3 = \dot{z}$ como la velocidad de la bola, por lo que el vector de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_c(t) \\ z(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

mientras que la señal de control $u \in \mathbb{R}$ es el voltaje de alimentación a la bobina, i.e., $u = V_c$.

Con (4) y las funciones (1) y (3) se tiene una función de estados no lineal dada como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

con $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ estructurada de la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_c} x_1 + \frac{1}{L_c} u(t) \\ x_3 \\ g - \frac{K_m}{2m} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

El punto de equilibrio de (6) está dado por $\mathbf{x}_{eq} = (I_{eq}, Z_{eq}, 0)$, donde $Z_{eq} > 0$ es la posición deseada de suspensión (positiva, para evitar la singularidad en el modelo

y mantener distancia con el electroimán), por lo que I_{eq} se obtiene como

$$I_{eq} = \sqrt{\frac{2mg}{K_m}} Z_{eq}. \quad (7)$$

B. Modelo Espacio de Estados Linealizado

Ya que el origen no es el punto de equilibrio del sistema, se realiza un cambio de coordenadas para los estados [18]. Con esto, se define el vector $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ de los estados en el nuevo marco de referencia de la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - I_{eq} \\ x_2 - Z_{eq} \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

y para la señal de control $\bar{u} \in \mathbb{R}$ como

$$\bar{u} = u - V_{eq}, \quad (9)$$

donde $V_{eq} = RI_{eq}$ es la entrada de control del punto de equilibrio y I_{eq} es dada en (7).

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\bar{u}, \quad (10)$$

donde las matrices $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^3$ están dadas por:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{Z_{eq}} \sqrt{\frac{2K_m g}{m}} & \frac{2g}{Z_{eq}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

La matriz $\bar{\mathbf{A}}$ en (11) es no singular ya que es de rango completo, i.e., $\text{rank}(\bar{\mathbf{A}}) = 3$. La ecuación característica de $\bar{\mathbf{A}}$ es

$$\lambda^3 + \frac{R}{L_c} \lambda^2 - \frac{2g}{Z_{eq}} \lambda - \frac{2gR}{L_c Z_{eq}} = 0, \quad (12)$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = -\frac{R}{L_c}$, $\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2g}{Z_{eq}}}$. Dado que tanto los parámetros del sistema como Z_{eq} son positivos, se tienen dos valores propios de parte real negativa y uno de parte real positiva, por lo que el punto de equilibrio del sistema linealizado es inherentemente inestable.

Una matriz $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ conformada por unos vectores propios asociados a los valores propios de la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{(R^2 Z_{eq} - 2g L_c^2)}{L_c R \sqrt{\frac{2g K_m}{m}}} & 0 & 0 \\ -\frac{L}{R} & \sqrt{\frac{Z_{eq}}{2g}} & -\sqrt{\frac{Z_{eq}}{2g}} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

La matriz \mathbf{T} se puede utilizar como una matriz de transformación por lo que se pueden obtener las matrices de un sistema transformado de (10) como

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\mathbf{A}}} &= \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{T}, \\ \bar{\bar{\mathbf{B}}} &= \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{B}}, \end{aligned}$$

de tal forma que estas resultan como

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{Z_{eq}}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{Z_{eq}}} \end{pmatrix}, \quad (14a)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}} = \frac{\sqrt{\frac{K_m}{m}}}{(R^2 Z_{eq} - 2g L_c^2)} \begin{pmatrix} R\sqrt{2g} \\ \frac{(\sqrt{2g} L_c - R\sqrt{Z_{eq} g})}{\sqrt{2Z_{eq}}} \\ -\frac{(\sqrt{2g} L_c + R\sqrt{Z_{eq} g})}{\sqrt{2Z_{eq}}} \end{pmatrix}. \quad (14b)$$

De acuerdo al teorema **CC4** de [22, pag. 130] el sistema transformado con las matrices $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ y $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$ es controlable ya que esta última no tiene renglones de cero, es decir, la señal de entrada afecta directamente a todos los estados del sistema. Alternativamente, se comprueba que el sistema es controlable por medio de la matriz de controlabilidad formada por el par de matrices $[\bar{\bar{\mathbf{A}}}, \bar{\bar{\mathbf{B}}}]$ ya que dicha matriz de controlabilidad tiene rango completo.

III. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El sistema de levitación magnética es modelado por una bola metálica que es levitada por la fuerza magnética generada por la bobina con núcleo de hierro. El desafío principal es controlar la posición de la bola usando únicamente la medición de su posición, sin requerir mediciones de otras variables del sistema, como la corriente eléctrica que circula por la bobina. Debido a la naturaleza no lineal del sistema, se emplea una aproximación por linealización alrededor del punto de equilibrio deseado. El controlador propuesto es lineal, y su desempeño en lazo cerrado está garantizado dentro de una región de atracción definida durante el diseño y validada experimentalmente en la implementación.

El problema de control presenta retos por la necesidad de estabilizar el sistema en la presencia incertidumbres paramétricas, dinámicas no modeladas y medición de ruido. De esta forma, el objetivo primario es diseñar un esquema de control que pueda regular de manera efectiva la posición de la bola usando sólo la señal de posición como retroalimentación, con una acción de compensación de las incertidumbres y perturbaciones de baja frecuencia.

Considere el modelo linealizado del levitador magnético dado en (10). Además suponga:

- A1.** Los parámetros del subsistema eléctrico así como del subsistema electromagnético son conocidos y positivos.
- A2.** La posición de equilibrio Z_{eq} es positiva respecto de la parte final del núcleo de acero y la cara de la bola.
- A3.** Sólo se dispone de la medición de la señal de la posición de la bola z para retroalimentación.
- A4.** El voltaje de alimentación (señal de control) es acotado.
- A5.** La posición deseada z_d es una función tipo escalón con magnitud menor a 5 [mm].

El problema de control es lograr que, por medio del voltaje de alimentación V_c , obtener un error en estado estacionario de la posición igual a cero, con todas las variables internas acotadas, utilizando técnicas de control lineal, donde la

aplicación integrada y validación experimental de métodos lineales contribuye en obtener una arquitectura simplificada de sensado.

IV. DISEÑO DEL CONTROL Y OBSERVADOR DE ESTADOS

La estrategia de control propuesta en el presente trabajo involucra una ley de control lineal combinada con un observador de estados que estima los estados del sistema basados solamente en la medición de la posición. Por lo que, con el sistema dado en (10), se diseña una ley de Control de retroalimentación de estados mediante un Observador de orden Reducido con acción Integral del error de posición (CORi).

A. Observador de Orden Reducido

Considerando la suposición **A3**, la única variable de salida del sistema linealizado, teniendo en cuenta el cambio de coordenadas dado en (8), es respecto a la posición de la bola, por lo que se define $y = \bar{x}_2 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$y = \bar{C}\bar{x}, \quad (15)$$

donde \bar{x} es definido en (8) y la matriz $\bar{C} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ es dada como $\bar{C} = (0 \ 1 \ 0)$, con rango renglón completo de \bar{C} , i.e., $\text{rank}(\bar{C}) = 1$. Para realizar una retroalimentación de estados, se requiere también de disponer tanto de la velocidad de la bola como de la corriente de la bobina, las cuales se obtienen por medio de un observador de orden reducido, y así evitar redundancia al estimar la posición, cuya medición se tiene disponible.

Se propone una matriz de transformación no singular $\mathbf{T}_o \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ como $\mathbf{T}_o = \begin{pmatrix} \bar{C} \\ \mathbf{C}_{no} \end{pmatrix}$, donde $\mathbf{C}_{no} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ de la forma

$$\mathbf{C}_{no} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de la matriz \mathbf{T}_o es la propia matriz, por lo que es involutiva, de tal forma que se puede establecer que dicha matriz inversa sea denotada como \mathbf{T}_{oi} de tal forma que se puede subdividir en matrices renglón, por lo que tiene

$$\mathbf{T}_{oi} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

y las matrices \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_3 se pueden subdividir como

$$\mathbf{T}_1 = (\mathbf{T}_{11} \ \mathbf{T}_{12}) = (0 \ | \ 1 \ 0), \quad (17a)$$

$$\mathbf{T}_3 = (\mathbf{T}_{31} \ \mathbf{T}_{32}) = (0 \ | \ 0 \ 1), \quad (17b)$$

con $\mathbf{T}_{11} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{T}_{12} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $\mathbf{T}_{31} \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{T}_{32} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$.

De esta forma, se obtiene un nuevo sistema transformado a partir de (10) y (15), empleando la salida medible y los estados no medibles con estados transformados como ξ , en la forma

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_{\mathcal{M}} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

donde $\xi_m = y$ es el error de posición medible, y $\xi_{\mathcal{M}} = (\bar{x}_1 \ \bar{x}_3)^T$ son los estados no medibles.

Estos nuevos estados ξ se puede reescribir de forma particionada como

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_m \\ \dot{\xi}_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{o11} & \bar{\mathbf{A}}_{o12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{o21} & \bar{\mathbf{A}}_{o22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_{\mathcal{M}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{o1} \\ \bar{\mathbf{B}}_{o2} \end{pmatrix} \bar{u}, \quad (19a)$$

$$y = \mathbf{C}_\xi \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_{\mathcal{M}} \end{pmatrix}, \quad (19b)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}_{o11} \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{A}}_{o12} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $\bar{\mathbf{A}}_{o21} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $\bar{\mathbf{A}}_{o22} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\bar{\mathbf{B}}_{o1} \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{B}}_{o2} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ y $\mathbf{C}_\xi = (1 \ 0_{1 \times 2})$ dadas como

$$\bar{\mathbf{A}}_{o11} = (0), \quad \bar{\mathbf{A}}_{o12} = (0 \ 1), \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{o21} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2g}{Z_{eq}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{o22} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_c} & 0 \\ -\frac{1}{Z_{eq}} \sqrt{\frac{2K_m g}{m}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{o1} = (0), \quad \bar{\mathbf{B}}_{o2} = \begin{pmatrix} 1 \\ L_c \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

El rango que tiene la matriz de observabilidad que se forma con el par de submatrices $(\bar{\mathbf{A}}_{o22}, \bar{\mathbf{A}}_{o12})$ es completo lo que implica que es observable, por lo que, de acuerdo con el Teorema 7-11 de [23, pag. 362], el par de matrices $[\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{C}}]$ es observable. Condición suficiente para diseñar un observador de orden reducido.

Denotando como $\hat{\xi}_{\mathcal{M}} = (\hat{x}_1 \ \hat{x}_3)^T$ al vector de estados estimado para la velocidad de la bola y la corriente de la bobina en torno del punto de equilibrio. Para ello, se define una función $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ como

$$\mathbf{z} = \hat{\xi}_{\mathcal{M}} - \bar{\mathbf{L}}y, \quad (23)$$

donde $\bar{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es una matriz de diseño. Al definir el error de observación de los estados dado por $\tilde{\xi}_{\mathcal{M}} = \xi_{\mathcal{M}} - \hat{\xi}_{\mathcal{M}}$ se obtiene

$$\dot{\tilde{\xi}}_{\mathcal{M}} = \dot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{L}}\dot{y}. \quad (24)$$

Empleando $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}\mathbf{z} + \mathbf{N}\bar{u} + \mathbf{P}y$ se obtiene

$$\dot{\tilde{\xi}}_{\mathcal{M}} = \mathbf{M}\tilde{\xi}_{\mathcal{M}} + (\bar{\mathbf{A}}_{o21} + \mathbf{M}\bar{\mathbf{L}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{o11} - \mathbf{P})y + (\bar{\mathbf{A}}_{o22} - \mathbf{M} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{o12})\xi_{\mathcal{M}} + (\bar{\mathbf{B}}_{o2} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{B}}_{o1} - \mathbf{N})\bar{u},$$

definiendo $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{o12}$, $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{B}}_{o2} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{B}}_{o1}$ y $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{A}}_{o21} + \mathbf{M}\bar{\mathbf{L}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{o11}$, la dinámica depende únicamente de la posición de los valores propios de la matriz $\bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{o12}$ y la detectabilidad del par $(\bar{\mathbf{A}}_{o22}, \bar{\mathbf{A}}_{o12})$, y se garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_{\mathcal{M}} = 0$ si $\bar{\mathbf{L}}$ se elige tal que $\Re\{\lambda(\bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{A}}_{o12})\} < 0$.

Finalmente, la estimación de \bar{x}_1 y \bar{x}_3 a partir de \mathbf{z} y y se obtiene mediante

$$\hat{x}_1 = \mathbf{T}_{12}\hat{\xi}_{\mathcal{M}} = \mathbf{T}_{12}(\mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}y), \quad (25a)$$

$$\hat{x}_3 = \mathbf{T}_{32}\hat{\xi}_{\mathcal{M}} = \mathbf{T}_{32}(\mathbf{z} + \bar{\mathbf{L}}y). \quad (25b)$$

B. Control con Término Integral

Dado que (10) es controlable, como se puede ver por medio de la transformación de la forma canónica diagonal de las matrices dadas en (14) o por la matriz de controlabilidad, se puede directamente diseñar un controlador de estados por

asignación de polos. Con esto se garantiza que los estados del sistema en lazo cerrado sean estables, pero no se garantiza un error cero en estado estacionario ante una entrada escalón de la posición.

Desde el uso de técnicas de control en la frecuencia se sabe que cuando un sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria, la señal de error que tiene un polo en el origen, la respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada escalón es cero. Teniendo en cuenta esto, se define un nuevo vector $\xi_a \in \mathbb{R}^4$ de estados como

$$\xi_a = (\xi_m \quad \xi_{\mathcal{M}}^T \quad x_i)^T, \quad (26)$$

con x_i la integral del error de posición y se obtiene como

$$\dot{x}_i = e, \quad (27)$$

donde $e \in \mathbb{R}$ denota al error que se tiene entre la posición deseada con respecto del punto de equilibrio deseado (15) y la desviación z_d deseada con respecto de éste, dado por

$$e = z_d - y = z_d - \bar{x}_2 = z_d - \xi_m. \quad (28)$$

Por lo tanto, con la estructura de \bar{x}_a , dada en (26), con el sistema formado por (10) y (15) así como el estado nuevo (27) se tiene un sistema en espacio de estados como

$$\dot{\xi}_a = \bar{\mathbf{A}}_a \xi_a + \bar{\mathbf{B}}_a \bar{u} + \bar{\mathbf{B}}_d z_d, \quad (29a)$$

$$y = \bar{\mathbf{C}}_a \bar{x}_a, \quad (29b)$$

con las matrices $\bar{\mathbf{A}}_a \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $\bar{\mathbf{B}}_a \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $\bar{\mathbf{B}}_d \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ y $\bar{\mathbf{C}}_a \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ dadas como

$$\bar{\mathbf{A}}_a = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\bar{\mathbf{C}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}_a = (\bar{\mathbf{C}}_\xi \quad 0), \quad (30)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_a = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Considerando el sistema ampliado (29), el controlador retroalimentado está definido por

$$\bar{u} = -k_1 \xi_m - k_2 \hat{x}_1 - k_3 \hat{x}_2 - k_i x_i = -\mathbf{K} \xi_a, \quad (32)$$

donde ξ_a es dado en (26) y la matriz $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ es de la forma

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_i], \quad (33)$$

y las ganancias k_1 , k_2 y k_i son para el estado medido, los estados no medidos y el término de acción integral, respectivamente, con lo cual en lazo cerrado se obtiene la dinámica

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_m \\ \dot{\xi}_{\mathcal{M}} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{o11} - \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_1 & \bar{\mathbf{A}}_{o12} - \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_2 & -\mathbf{B}_{o1} k_i \\ \bar{\mathbf{A}}_{o21} - \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_1 & \bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_2 & -\mathbf{B}_{o2} k_i \\ -1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_m \\ \xi_{\mathcal{M}} \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_2 \\ \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\xi}_{\mathcal{M}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} z_d.$$

C. Sistema en Lazo Cerrado Completo

El sistema de control en lazo cerrado completo está constituido por la planta linealizada (10), el observador de orden reducido definido por (23)-(25), el término integral (27), y la ley de control (32). Para analizar la estabilidad del sistema completo, se define el vector de estados aumentado $\chi \in \mathbb{R}^5$ como

$$\chi = \begin{pmatrix} \xi_m \\ \xi_{\mathcal{M}} \\ x_i \\ \tilde{\xi}_{\mathcal{M}} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

donde $\tilde{\xi}_{\mathcal{M}} = \xi_{\mathcal{M}} - \hat{\xi}_{\mathcal{M}}$ es el error de estimación del observador.

La dinámica del error de observación se obtiene de la diferencia entre (19a) y la dinámica del observador. Derivando (23) y utilizando las propiedades del observador de orden reducido, se tiene:

$$\dot{\tilde{\xi}}_{\mathcal{M}} = (\bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}_{o12}) \tilde{\xi}_{\mathcal{M}}. \quad (35)$$

El sistema completo en lazo cerrado se expresa como:

$$\dot{\chi} = \mathbf{A}_{cl} \chi + \mathbf{B}_{cl} z_d, \quad (36)$$

donde la matriz del sistema en lazo cerrado $\mathbf{A}_{cl} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ tiene la estructura:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{o11} - \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_1 & \bar{\mathbf{A}}_{o12} - \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_2 & -\bar{\mathbf{B}}_{o1} k_i & \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_2 \\ \bar{\mathbf{A}}_{o21} - \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_1 & \bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_2 & -\bar{\mathbf{B}}_{o2} k_i & \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_2 \\ -1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 1} & \bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}_{o12} \end{bmatrix} \quad (37)$$

y $\mathbf{B}_{cl} = [0 \quad \mathbf{0}_{1 \times 2} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times 2}]^T$.

La matriz \mathbf{A}_{cl} tiene una estructura en bloques triangular que permite analizar la estabilidad del sistema mediante el principio de separación. El polinomio característico del sistema completo en lazo cerrado es:

$$\det(\lambda \mathbf{I}_5 - \mathbf{A}_{cl}) = \det(\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}_{ctrl}) \cdot \det(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_{obs}), \quad (38)$$

donde

$$\mathbf{A}_{ctrl} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{o11} - \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_1 & \bar{\mathbf{A}}_{o12} - \bar{\mathbf{B}}_{o1} k_2 & -\bar{\mathbf{B}}_{o1} k_i \\ \bar{\mathbf{A}}_{o21} - \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_1 & \bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{B}}_{o2} k_2 & -\bar{\mathbf{B}}_{o2} k_i \\ -1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{A}_{obs} = \bar{\mathbf{A}}_{o22} - \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{A}}_{o12}. \quad (40)$$

D. Principio de Separación y Estabilidad

De (38) se observa que los valores propios del sistema en lazo cerrado completo son la unión de los valores propios del controlador con término integral y los valores propios del observador de orden reducido, como resultado del principio de separación para sistemas lineales [22, 23].

Para el sistema en lazo cerrado definido por (36), el diseño del vector de ganancias del controlador \mathbf{K} , dado en (33), y el vector de ganancias del observador $\bar{\mathbf{L}}$ pueden realizarse de forma independiente. El sistema completo es asintóticamente estable en una vecindad pequeña del punto de equilibrio si y

solo si los valores propios de \mathbf{A}_{ctrl} y \mathbf{A}_{obs} se diseñan con parte real negativa.

La estructura triangular en bloques de \mathbf{A}_{cl} dada en (37) implica que el polinomio característico se factoriza como se muestra en (38). Por lo tanto, la estabilidad del sistema completo depende únicamente de la ubicación de los valores propios de las matrices \mathbf{A}_{ctrl} y \mathbf{A}_{obs} . \square

Como consecuencia del principio de separación, el diseño del controlador óptimo descrito en la Sección anterior garantiza que los valores propios de \mathbf{A}_{ctrl} son estables, ya que la solución de la ecuación algebraica de Riccati proporciona una matriz de ganancias \mathbf{K} que estabiliza el sistema. Por otro lado, la matriz de ganancias del observador $\bar{\mathbf{L}}$ se diseña para ubicar los valores propios de \mathbf{A}_{obs} en posiciones deseadas del semiplano izquierdo del plano complejo.

E. Análisis de Error en Estado Estacionario

Para analizar el comportamiento en estado estacionario del sistema en lazo cerrado, se considera una referencia constante $z_d = Z_d$ con Z_d constante. En estado estacionario, se tiene que $\dot{\chi} = \mathbf{0}$, por lo que de (36):

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{cl}\chi_{ss} + \mathbf{B}_{cl}Z_d. \quad (41)$$

Debido a que el observador es asintóticamente estable, en estado estacionario se cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi} = \tilde{\xi}_{p,ss} = \mathbf{0}$. Considerando que en estado estacionario $\dot{\xi}_{m,ss} = 0$, $\dot{x}_{i,ss} = 0$, se obtiene:

$$0 = \bar{\mathbf{A}}_{o12}\tilde{\xi}_{p,ss} - \bar{\mathbf{B}}_{o1}(k_1\xi_{m,ss} + \mathbf{k}_2\tilde{\xi}_{p,ss} + k_i x_{i,ss}), \quad (42)$$

$$0 = -\xi_{m,ss} + Z_d. \quad (43)$$

De (43) se obtiene directamente que $\xi_{m,ss} = Z_d$, lo cual implica que el error en estado estacionario es $e_{ss} = Z_d - \xi_{m,ss} = 0$. Ello demuestra que el término integral en la ley de control garantiza error nulo en estado estacionario para referencias de tipo escalón, cumpliendo así con uno de los objetivos principales del diseño.

F. Selección de Parámetros de Diseño

Para la implementación práctica del controlador propuesto, es necesario seleccionar los parámetros de diseño. Por un lado, las ganancias \mathbf{K} , dado en (33), se obtienen mediante la solución de la ecuación algebraica de Riccati, que depende de las matrices de ponderación \mathbf{Q} y R en la función de costo

$$J = \int_0^{\infty} (\xi_a^T \mathbf{Q} \xi_a + \bar{u}^2 R) dt. \quad (44)$$

La selección de estas matrices permite ajustar el compromiso entre el esfuerzo de control y el error de seguimiento.

Para este trabajo, se propone seleccionar:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_i), \quad R = r, \quad (45)$$

donde q_1, q_2, q_3, q_i y r son constantes positivas que se ajustan para obtener el comportamiento deseado del sistema.

La matriz de ganancias $\bar{\mathbf{L}} = (l_1 \ l_2)^T$ del observador se diseña mediante asignación de polos. Se propone ubicar los valores propios del observador en posiciones que garanticen

una dinámica de estimación más rápida que la dinámica del controlador, típicamente 2 a 5 veces más rápida. Esto se logra seleccionando $\lambda_{obs,1} = \alpha\lambda_{ctrl,1}$, $\lambda_{obs,2} = \alpha\lambda_{ctrl,2}$, donde $\alpha \in [2, 5]$ es un factor de escalamiento y $\lambda_{ctrl,i}$ son los valores propios dominantes del controlador.

V. RESULTADOS

A. Resultados Experimentales

El controlador propuesto fue implementado y evaluado experimentalmente utilizando el sistema de levitación magnética Quanser-Maglev. Los parámetros físicos del sistema se presentan en la Tabla I, y fueron validados mediante identificación experimental. Sin embargo, existen incertidumbres inherentes al modelado electromagnético y variaciones debidas a temperatura y envejecimiento de componentes. A partir de estos parámetros se obtiene la corriente de equilibrio $I_{eq} \approx 1.1264$ A y el voltaje de equilibrio $V_{eq} \approx 10.94$ V.

TABLE I
PARÁMETROS DEL SISTEMA DE LEVITACIÓN MAGNÉTICA
QUANSER

Par.	Descripción	Valor	Unid.	Par	Desc.	Valor	Unid.
R	Res. total	9.72	Ω	m	Masa (bola)	0.068	kg
L_c	Ind. bobina	0.41	H	K_m	Cte. e.-m.	8.5e-5	$\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{A}^2}$
g	Acel. grav.	9.79	m/s^2	Z_{eq}	Pos. eq.	0.009	m

El diseño del controlador óptimo LQR se realizó seleccionando las matrices de ponderación $\mathbf{Q} = \text{diag}(100, 1, 1, 1000)$ y $R = 1$. El peso $q_1 = 100$ enfatiza el seguimiento del error de posición, mientras que $q_i = 1000$ asegura una acción integral fuerte para eliminar el error en estado estacionario. Los pesos asociados a la corriente y velocidad se mantienen unitarios ($q_2 = q_3 = 1$) para no penalizar excesivamente estos estados, mientras que el peso del esfuerzo de control $R = 1$ proporciona un balance adecuado entre desempeño y magnitud de la señal de control.

Para el observador de orden reducido, la matriz de ganancias $\bar{\mathbf{L}}$ se diseñó con polos en $\lambda_{obs,1,2} = -160 \pm 100j$ ($\omega_n \approx 188.68$ rad/s, $\zeta \approx 0.848$), aproximadamente 3-4 veces más rápidos que los polos dominantes del controlador, para obtener dinámica de estimación más rápida que el controlador y mantener el efecto del ruido en el control en límites prácticos. Los parámetros se resumen en la Tabla II.

TABLE II
PARÁMETROS DE DISEÑO DEL CONTROLADOR Y
OBSERVADOR

Ponderaciones LQR (CORi)				Polos del observador
q_1	q_2, q_3	q_i	R	$\lambda_{obs,1,2}$
100	1	1000	1	$-160 \pm 100j$

El sistema de control se implementó con un procesamiento en tiempo real utilizando MATLAB/Simulink en conjunto con la plataforma QUARC, con un periodo de muestreo de $T_s = 1$ ms. La implementación experimental consideró los límites físicos del actuador, aplicando saturación al voltaje de control en el rango $u \in [0, 20]$ V. Para fines de comparación, se diseñó e implementó un Controlador de Realimentación de

Estados Medidos (CREM), sin acción integral del error de posición, con ponderaciones $q_1 = 1000$, $q_2 = 1$, $q_3 = 1$. En este segundo caso se cuenta con medición de corriente y reconstrucción de la velocidad mediante un filtro de segundo orden con función de transferencia $G(s) = \frac{s}{\tau_f s + 1}$ y $\tau_f = 4$ ms.

1) *Respuesta ante Cambios de Referencia Tipo Escalón:* Para evaluar el desempeño del controlador propuesto, se aplicaron cambios de referencia tipo escalón en la posición deseada. La Fig. 2 muestra la respuesta del sistema ante cambios escalón en la posición deseada z_d tanto del esquema propuesto CORi como de la respuesta del CREM. En la Fig. 3 se muestra el error de posición de ambos controladores de acuerdo a (28), y en la Tabla III se muestran las métricas de desempeño comparadas, mostrando un mejor desempeño general del controlador propuesto.

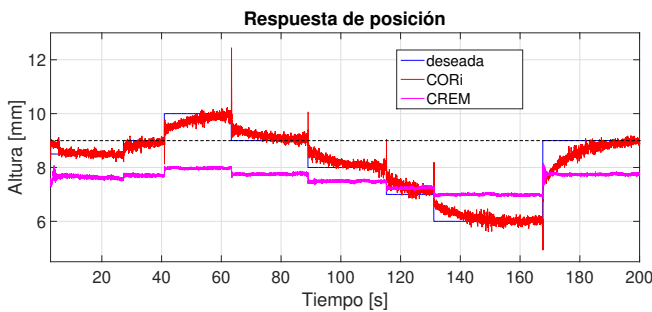


Fig. 2. Respuesta del sistema ante cambio de referencia tipo escalón, comparando la posición deseada y obtenida

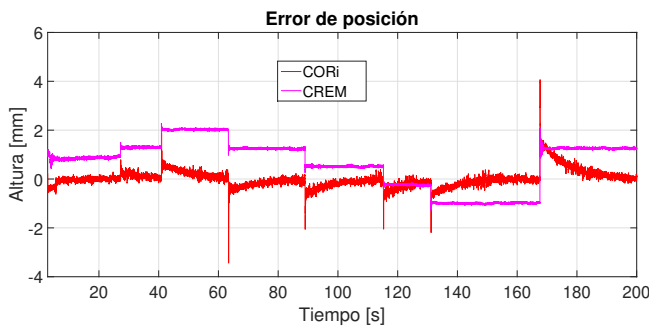


Fig. 3. Error de posición del sistema ante cambio de referencia tipo escalón.

El ruido de medición en la señal de posición (± 0.5 mm) se origina por el sensor óptico y perturbaciones inherentes a su diseño, pero el sistema mantiene el valor promedio en la referencia deseada. El pico transitorio ante escalones se atribuye a la saturación del actuador y la dinámica del observador. La señal de control (Fig. 5) presenta conmutación de alta frecuencia (5-17V) debido al período de muestreo de 1 ms, la saturación del actuador y la amplificación del ruido de medición por las ganancias de retroalimentación.

2) *Desempeño del Observador de Estados:* La Fig. 4 presenta la comparación entre las variables real y estimada. Para evaluar la efectividad de la estimación de la velocidad, ésta se compara con la reconstrucción obtenida a partir de un derivador aproximado con función de transferencia $G(s) =$

TABLE III
COMPARACIÓN DEL DESEMPEÑO ANTE REFERENCIAS TIPO ESCALÓN Y SENOIDAL, EMPLEANDO LAS ESTRATEGIAS CORi Y CREM

Métrica	Ref. Escalón		Ref. Senoidal		Unidades	
	CORi	CREM	CORi	CREM		
Pos.	MAE	0.2370	1.1722	0.3245	1.4065	mm
	RMSE	0.3489	1.6032	0.3639	1.5104	mm
Corr.	MAE	0.0832	–	0.0536	–	A
	RMSE	0.0997	–	0.0656	–	A

$\frac{s}{\tau_f s + 1}$ y $\tau_f = 4$ ms, lo cual se muestra en la Fig. 4b. Finalmente, en la Fig. 5 se muestra la señal de control aplicada. Se puede apreciar en la Tabla III la evaluación del MAE y el RMSE de la reconstrucción de la corriente en ambos casos, siendo menor de 0.1 A en ambas métricas.

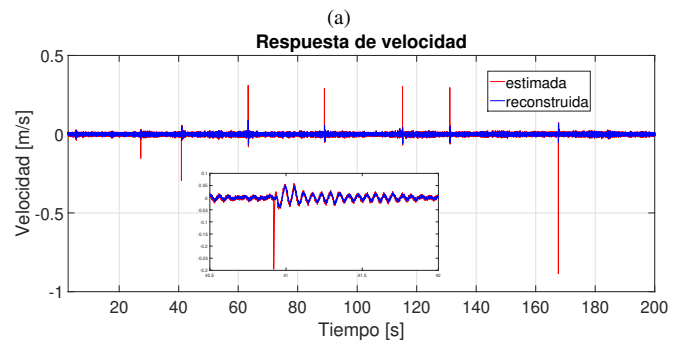
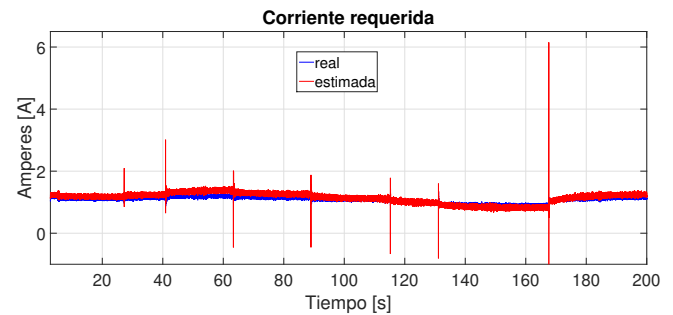


Fig. 4. Desempeño del observador de orden reducido: (a) Corriente, (b) Velocidad.

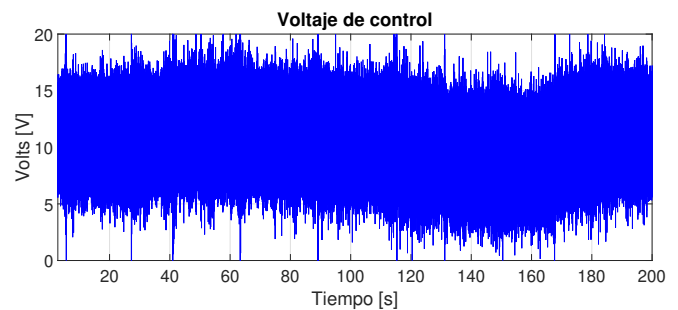


Fig. 5. Señal de control aplicada para la respuesta de posición para una referencia tipo escalón.

3) *Respuesta ante Referencia Tipo Senoidal*: Se considera ahora a z_d con una componente senoidal $Z_d = 1 \sin(\frac{2\pi}{40}t)$ mm para evaluar la robustez ante variaciones continuas y su desempeño en seguimiento. En la Figs. 6 y 7 se muestra el desempeño de la posición deseada contra la posición real, así como el error entre el CORi y el CREM, mostrando en general un mejor desempeño en el primer caso, con un MAE inferior a 0.33 mm y un RMSE menor que 0.37 mm.

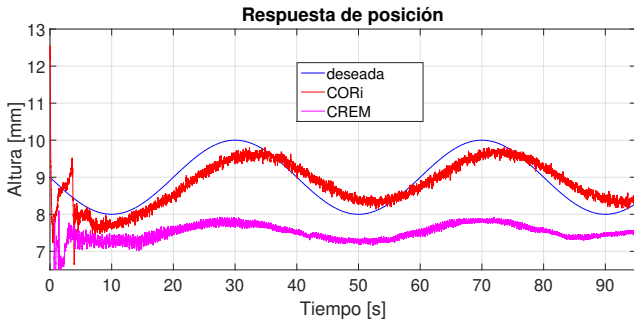


Fig. 6. Señal de posición obtenida con referencia senoidal.

Asimismo, en las Figs. 8 y 9 se muestra la comparación entre la corriente real medida y la observada, con un MAE inferior a 0.06 A. En la Fig. 10 se muestra la velocidad reconstruida con base en la posición y la estimada con base en el observador, y por su parte, en la Fig. 11 se muestra la señal de control aplicada para este caso.

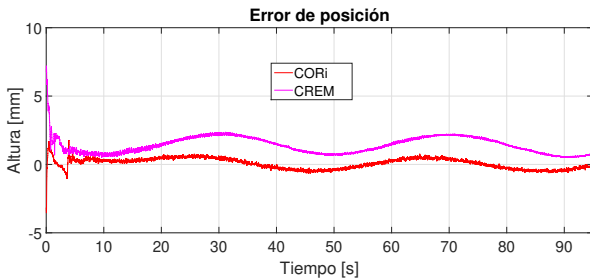


Fig. 7. Señal de error de posición con referencia senoidal.

El transitorio inicial (primeros 3 [s]) corresponde a la activación del sistema desde condiciones iniciales de reposo (bola en posición inferior, corriente cero) hasta alcanzar el punto de equilibrio deseado. La mayor discrepancia observada entre la corriente estimada y medida durante el seguimiento senoidal (Figs. 8 y 9) puede atribuirse en parte a los efectos de las no linealidades del sistema, que se vuelven más significativas cuando la trayectoria se aleja del punto de equilibrio nominal utilizado para la linealización, particularmente para el caso de la comparación con un control sin compensación integral.

Los resultados demuestran que el observador de orden reducido y la acción integral compensan efectivamente el acoplamiento corriente-posición, consistente con el análisis de estabilidad.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta la implementación y validación experimental de una arquitectura de control simplificada, consistente en un observador de orden reducido y un diseño de

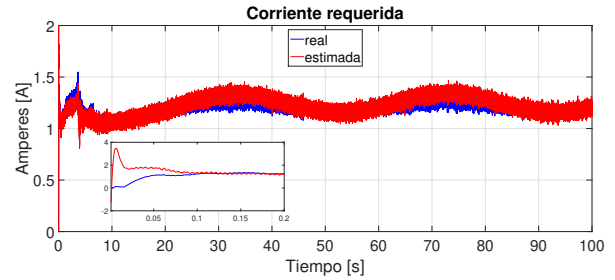


Fig. 8. Señal de corriente real y observada con referencia senoidal. Se muestra el detalle del transitorio de ambas corrientes (real y observada) en la sub-figura para 200 ms.

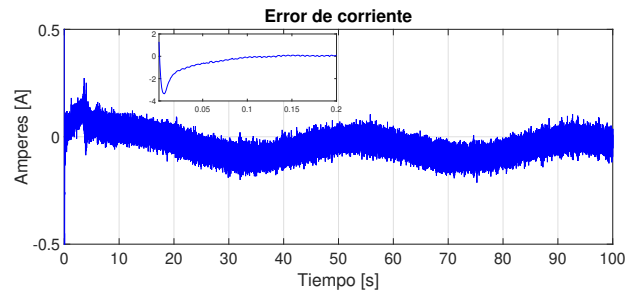


Fig. 9. Señal de error de corriente con referencia senoidal. Se muestra el detalle del transitorio del error de corriente en la sub-figura para 200 ms.

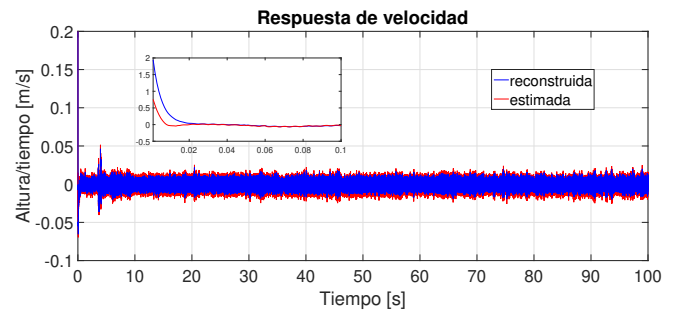


Fig. 10. Señales de velocidad reconstruida mediante un filtro comparada con la estimada, en el caso de una referencia senoidal. Se muestra el detalle del transitorio en la sub-figura para 100 ms.

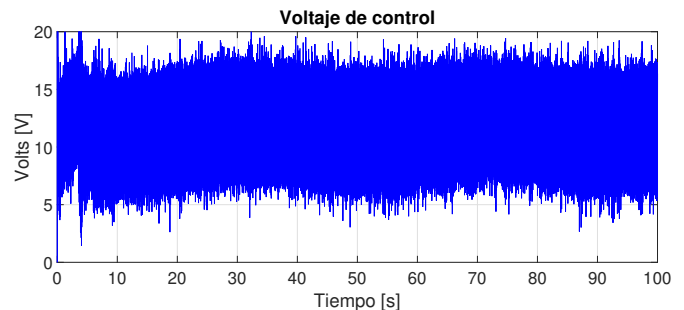


Fig. 11. Señal de control aplicada para la respuesta de posición con una referencia tipo senoidal.

un LQR con acción integral), que reduce los requerimientos de sensado al emplear únicamente medición de posición. Los resultados experimentales confirman seguimiento de la referencia con errores de posición menores a 0.35 mm (MAE < 0.33 mm, RMSE < 0.37 mm) y estimación confiable de corriente con errores menores a 0.1 A. El principio de separación garantiza la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado, debido a que se utiliza un modelo linealizado, dicha estabilidad es en una región alrededor del punto de equilibrio. El seguimiento senoidal y transitorios iniciales proporcionan evidencia indirecta de robustez. Como trabajo futuro se plantea incluir análisis formal de rechazo a perturbaciones y dinámicas no modeladas, así como extender la metodología hacia esquemas adaptativos o de control no lineal para mejorar la robustez ante variaciones paramétricas y realizar estudios comparativos experimentales.

REFERENCES

- [1] R. Goodall, "Dynamic characteristics in the design of maglev suspensions," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, vol. 208, no. 1, pp. 33–41, 1994. [Online]. Available: https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1994_208_231_02
- [2] D. M. Rote and Y. Cai, "Review of dynamic stability of repulsive-force maglev suspension systems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 38, no. 2, pp. 1383–1390, 2002. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/20.996030>
- [3] Q. Zhu, S.-M. Wang, and Y.-Q. Ni, "A review of levitation control methods for low-and medium-speed maglev systems," *Buildings*, vol. 14, no. 3, p. 837, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/buildings14030837>
- [4] B. Li, C. Zhao, X. Li, and Z. Long, "Dynamics modeling analysis and experiment of the guidance control system of high-speed maglev train," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 206 207–206 221, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3038252>
- [5] X. Jia-yang and D. Zi-gang, "Research progress of high-speed maglev rail transit," *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, vol. 21, no. 1, pp. 177–198, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.19818/j.cnki.1671-1637.2021.01.008>
- [6] Y. Eroğlu, "Sliding mode and pid based tracking control of magnetic levitation plant and hil tests," Master's thesis, Abdullah Gül Üniversitesi, 2016. [Online]. Available: <https://hdl.handle.net/20.500.12573/305>
- [7] W. Barie and J. Chiasson, "Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation," *International Journal of systems science*, vol. 27, no. 11, pp. 1153–1163, 1996. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/00207729608929322>
- [8] I. Ahmad and M. A. Javaid, "Nonlinear model and controller design for magnetic levitation system," *Recent Advances in Signal Processing, Robotics and Automation*, pp. 324–328, 2010. [Online]. Available: <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/1807817.1807874>
- [9] A. E. Hajjaji and M. Ouladsine, "Modeling and nonlinear control of magnetic levitation systems," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 48, no. 4, pp. 831–838, 2001. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/41.937416>
- [10] F. J. Lin, S. Y. Chen, and P. H. Shieh, "Intelligent sliding-mode control using rbf for magnetic levitation system," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, no. 3, pp. 1752–1762, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/TIE.2007.894710>
- [11] Y. Sun, J. Xu, G. Lin, and N. Sun, "Adaptive neural network control for maglev vehicle systems with time-varying mass and external disturbance," *Neural Computing and Applications*, vol. 35, no. 17, pp. 12 361–12 372, 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00521-021-05874-2>
- [12] R. J. Wai, J. D. Lee, and K. L. Chuang, "Real-time pid control strategy for maglev transportation system via particle swarm optimization," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 2, pp. 629–646, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/TIE.2010.2046004>
- [13] U. Sadek, A. Sarjas, A. Chowdhury, and R. Sveccko, "Improved adaptive fuzzy backstepping control of a magnetic levitation system based on symbiotic organism search," *Applied Soft Computing*, vol. 56, pp. 19–33, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.02.032>
- [14] R. Morales, V. Feliu, and H. Sira-Ramírez, "Nonlinear control for magnetic levitation systems based on fast online algebraic identification of the input gain," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 19, no. 4, pp. 757–771, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/TCST.2010.2057511>
- [15] R. Ortega, *Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical and electromechanical applications*. Springer, 1998. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3603-3>
- [16] A. Atassi and H. Khalil, "Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer design," *Systems and Control Letters*, vol. 39, pp. 183–191, 2000. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(99\)00085-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(99)00085-7)
- [17] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode technique," *Automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998. [Online]. Available: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00209-4](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00209-4)
- [18] C. Guerrero Tejada, M. A. González-Olvera, J. Dávila, and J. C. Fabián-Pliego, "Maglev tracking control by a state-feedback with integral action and robust velocity reconstruction," *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático, CLCA 2014*, 2014. [Online]. Available: <https://amca.mx/memorias/amca2014/media/files/0256.pdf>
- [19] Y. Feng, C. Zhao, L. Tong, Q. Yu, and Y. Shu, "Dynamic impact analysis of the time-delay levitation control system on maglev vehicle system after adding smith predictor," *ISA transactions*, vol. 154, pp. 82–94, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2024.08.025>
- [20] Q. Inc., "Magnetic levitation user manual," 2012. [Online]. Available: <https://www.quanser.com/products/magnetic-levitation/>
- [21] J. Apkarian, H. Lecheray, and M. Levis, "Student workbook. magnetic levitation experiment for matlab/simulink users," 2012.
- [22] E. Hendricks, O. Jannerup, and P. H. Skurenson, *Linear Systems Control: deterministic and stochastic methods*. Springer, 2008. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78486-9>
- [23] C.-T. Chen, *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1984.



based control.



Cuauhtémoc Guerrero received the B.Sc. degree in Industrial Electrical Engineering from Instituto Tecnológico de Saltillo, Saltillo, Mexico, in 1993, and the M.Sc. and Ph.D. degrees in Electrical Engineering from Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Mexico City, Mexico, in 2000 and 2006, respectively. He is currently a Professor at Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), Mexico City, Mexico. His research interests include control of electrical machines, power electronics, nonlinear control systems, and passivity-

Marcos A. González-Olvera received the B.Sc. (2002) and M.Sc. (2005) degrees in Electrical Engineering, both with honors, and the Ph.D. degree in Engineering (2009), all from Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). He is currently a Professor at Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM). His research interests include nonlinear control, fractional-order controllers, optimization, and dynamic modeling. He has been a Board member of the Association of Automatic Control of Mexico (AMCA).



Carlos M. Ortiz-Cervantes is currently pursuing the B.Sc. degree in Industrial Electronic Systems Engineering at Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM), Mexico City, Mexico. His research interests include control of electromechanical systems, electronic instrumentation, and linear control applications.