

# Digital LQG Controller Design Applied to an Electronic System

L. Castro, L. Cunha, B. Dutra, and A. Silveira

**Abstract**—This paper presents a practical application of a LQG (Linear Quadratic Gaussian) (optimum) controller in an electronic system. The plant is represented by a second order discrete model. Robustness analysis is made for both the control loop and to the Kalman filter. Simulated tests and practical of the type: step response, load disturbance in the plant input, plant output contaminated with white noise is performed in order to evaluate performance and robustness propitiated by LQG control.

**Index Terms**—Digital Control Systems, LQG Control, Robustness Analysis, Systems Identification.

## I. INTRODUÇÃO

O controlador (ótimo) LQG está consolidado na teoria de controle moderno com uma lei de controle capaz de fornecer desempenho e robustez adequados, assim como o todo-poderoso controlador PID, ao sistema a ser controlado, seja este SISO (*Single Input Single Output*) ou MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) sem muito esforço do projetista durante a etapa de projeto do controlador. O controle LQG possui inúmeras implementações práticas bem-sucedidas, sejam dinâmicas simples ou complexas, de tal forma que este trabalho apresenta a implementação de um controlador LQG digital em um sistema eletrônico estável em malha aberta com dinâmica pouco amortecida e erro estacionário, sendo este uma planta didática confeccionada para o ensino da teoria de controle no meio acadêmico. Este trabalho é fruto da pesquisa do Laboratório de Controle e Sistemas (LACOS) da Universidade Federal do Pará (UFPA) e deriva da pesquisa também em LQG apresentada em [1]. O trabalho está dividido em: na seção II trata-se da teoria e procedimentos para a identificação de um modelo adequado da planta em questão; na seção III é exposta a teoria matemática e explanado a realização do projeto de um controlador LQG digital; a análise de robustez da malha de controle é feita na seção IV; os resultados são expostos na seção V e, por fim as conclusões na seção VI.

Este trabalho possui apoio de instituições de fomento e incentivo à pesquisa no Brasil CAPES e CNPq.

L. A. M. Castro é vinculado à Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil, (e-mail: luismesquita@ufpa.br).

L. B. Cunha é vinculada à Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil, (e-mail: leilicunha@ufpa.br).

B. G. Dutra é vinculado à Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil, (e-mail: brunoduta@ufpa.br).

A. S. Silveira é vinculado à Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil, (e-mail: asilveira@ufpa.br).

## II. IDENTIFICAÇÃO DA PLANTA

A identificação da planta é feita utilizando o método de Mínimos Quadrados Recursivo (MQR) clássico [2,3]. Selecionou-se um modelo linear discreto de segunda ordem para representar a dinâmica da planta. O modelo expresso na forma de equação a diferenças é:

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \xi(k) \quad (1)$$

onde  $u(k)$ ,  $y(k)$  e  $\xi(k)$  são os sinais de entrada da planta, saída da planta e ruído gaussiano, respectivamente. Para excitar adequadamente a planta, projetou-se um sinal do tipo PRBS (*Pseudo-Random Binary Signal*) em ambiente computacional, a partir das recomendações feitas por [4], com 10 células compondo o registrador de deslocamento e utilizando um período de amostragem  $T_s$  igual a 50 milissegundos. Na Fig. 1 são apresentados uma pequena parcela dos 1000 pares de dados de entrada e saída coletados para modelar a planta via MQR. Para os testes de controle, utilizou-se um Arduino UNO como conversor A/D e D/A e como interface de comunicação entre o computador e a planta, conforme o diagrama de blocos apresentado na Fig. 2. Este modo de controlar sistemas permite maior flexibilidade ao implementar leis de controle complexas.

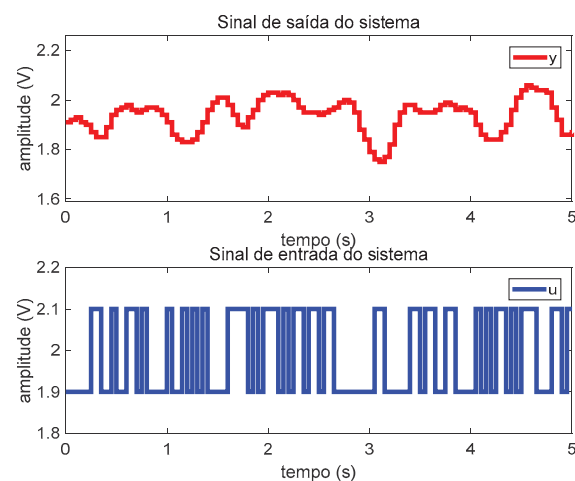


Fig. 1. Dados coletados da planta.

Sendo assim, para os parâmetros escolhidos para projetar o sinal PRBS, a faixa de frequência excitada pelo mesmo é de aproximadamente 0,02 Hz a 6,67 Hz, com amplitude igual a  $\pm v = 100$  mV.

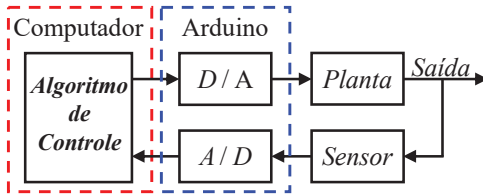


Fig. 2. Diagrama de um sistema de controle digital por computador.

Portanto, a faixa de frequência excitada engloba a frequência de interesse da planta (previamente conhecida e aproximadamente igual a 1,0 Hz). Coletaram-se 1000 amostras dos sinais de entrada e saída da planta com  $T_s = 50$  milissegundos. Como a faixa de operação total da planta é limitada entre 0 V e 5 V, escolheu-se o ponto de operação igual a 2 V para se levantar o modelo da planta. Estimou-se recursivamente o modelo da planta via mínimos quadrados. O algoritmo de MQR pode ser encontrado detalhado em [2,3,5]. O modelo identificado é expresso em equação a diferenças:

$$y(k) = 1,7427y(k-1) - 0,8788y(k-2) + 0,0184u(k-1) + 0,11141u(k-2)$$

Para efeito de escrita do trabalho os valores vistos no modelo discreto identificado estão truncados.

Segundo [4] pode-se dividir em quatro tipos de estrutura envolvendo a planta mais perturbações. Para o caso particular do trabalho, somente duas dessas estruturas são apresentadas:

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (2)$$

$$A(z^{-1})y(k) = z^{-d}B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\xi(k) \quad (3)$$

onde  $z^{-1}$  é o operador de deslocamento de tempo discreto e  $d$  é o atraso de transporte da planta (*delay*). A segunda estrutura é do tipo ARMAX (*Auto-Regressive Moving Average with eXogenous Input*). Para o caso em que o polinômio  $C(z^{-1}) = 1$ , recai-se na primeira estrutura, que é do tipo ARX (*Auto-Regressive with eXogenous Input*) [4,5]. Na Fig. 3 é apresentada a saída real da planta e a saída do modelo identificado via MQR.

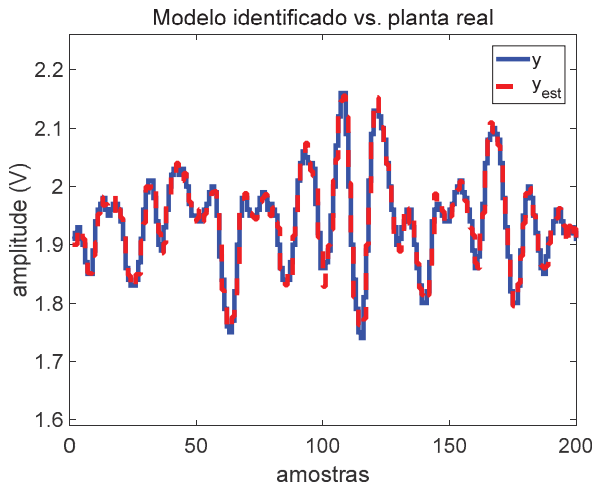


Fig. 3. Dados coletados da planta.

Considerando-se que o único *delay* existente na planta é devido à discretização pelo método ZOH (*Zero Order Hold*), então  $d = 1$ . Os polinômios  $A(z^{-1})$  e  $B(z^{-1})$  obtidos a partir da equação à diferença identificada são:

$$A(z^{-1}) = 1 - 1,7427z^{-1} + 0,8788z^{-2}$$

$$z^{-1}B(z^{-1}) = z^{-1}(0,0184 + 0,1141z^{-1})$$

Arrumando-se os polinômios, obtém-se a função de transferência pulsada da planta identificada para  $T_s = 50$  milissegundos e método de discretização via ZOH [6]:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,0184z + 0,1141}{z^2 - 1,7427z + 0,8788}$$

### III. CONTROLADOR LQG

O controlador projetado, também denominado compensador dinâmico, é o LQG (*Linear Quadratic Guassian*), constituído da fusão entre o filtro de Kalman e o LQR (*Linear Quadratic Regulator*) [6]. Para implementar o LQG é necessário possuir o modelo em espaço de estados discreto da planta a ser controlada, do tipo:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Gu(k)$$

$$y(k+1) = Cx(k+1) \quad (4)$$

onde  $\Phi$  é a matriz de estados,  $G$  é o vetor de entrada e  $C$  é o vetor de saída. A partir de  $G(z)$  obteve-se uma realização controlável em espaço de estados discreto, dada por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k+1) = [b_1 \quad b_0]x(k+1) \quad (5)$$

O modelo em espaço de estados discreto da planta identificada é:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1,7427 & -0,8788 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k+1) = [0,1141 \quad 0,0184]x(k+1)$$

Na Tabela 1 são apresentadas características importantes da planta identificada em malha aberta:

TABELA I	
DADOS DA PLANTA IDENTIFICADA EM MA	
Sistema em Malha Aberta	
Polos discretos	$p = 0,8714 \pm j0,3457$
Zero discreto	$z = -6,1821$
Ganho estático	$K_c = 0,9752$
Frequência natural	$\omega_n = 7,6628 \text{ rad/s}$
Coefficiente de amortecimento	$\xi = 0,1686$
Sobressinal percentual	OS (%) = 58,43
Tempo de acomodação	$T_a = 3,0904 \text{ s}$

O sistema identificado não possui integrador em malha aberta, dessa forma é necessário obter o modelo aumentado

por incremento de controle para garantir que o controlador LQG terá ação incremental em malha fechada, ou seja, erro nulo para uma entrada do tipo degrau. O incremento de controle pela multiplicação de  $\Delta$  é um método que garante a estrutura de controle resultante o rastreamento de referência, além de ser robusta às perturbações de carga na saída do sistema. Pela multiplicação da Equação 4 por  $\Delta$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\Delta x(k+1) &= \Phi \Delta x(k) + G \Delta u(k) \\ \Delta y(k+1) &= C \Delta x(k+1)\end{aligned}\quad (6)$$

onde  $\Delta = 1 - z^{-1}$  e  $z^{-1}$  é o operador de atraso discreto, tal que  $z^{-1}u(k) = u(k-1)$ . A adição da variável de estado incremental pode ser feita a partir da inclusão do sistema na Equação 5 no vetor de estados aumentado, definido por:

$$x_a(k) = [\Delta x(k) \quad y(k)]^T \quad (7)$$

Uma observação importante sobre a escolha da Equação 7 como vetor de estados aumentado é que não se está criando uma nova informação não contida inicialmente no modelo do sistema. Nota-se que  $y(k)$  é uma equação do modelo nominal na Equação 4 e é a própria saída medida do sistema, logo, é uma informação observável. O sistema aumentado com base no vetor de estados  $x_a(k)$  pode ser descrito em função do sistema nominal conforme:

$$\begin{aligned}x_a(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ C\Phi & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi_a} x_a(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} G \\ CG \end{bmatrix}}_{G_a} \Delta u(k) \\ y_a(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C_a} x_a(k)\end{aligned}\quad (8)$$

Na Equação 8 que a matriz  $C_a$  conecta a saída do sistema aumentado à saída do sistema nominal  $y(k)$  independentemente da matriz  $C$  nominal. Isto se faz necessário, pois  $\Delta x(k)$  agora configura variações das variáveis de estado nominais. Em sistemas reais, dificilmente todas as variáveis de estado estão disponíveis ou são sensorialmente medidas. Como o LQR depende da informação completa dos valores das variáveis de estado da planta, é necessário que seja feita uma estimação de estados para que o controle seja aplicado, onde os estados da planta são estimados de forma ótima por meio do filtro de Kalman, desde que os distúrbios presentes no sistema sejam gaussianos, o que permite que tanto erros de medição quanto erros de modelagem sejam desprezados [7].

A primeira etapa para se projetar o LQG é o projeto do LQR com base no modelo aumentado, Equação 8, se estabelece na lei de controle  $\Delta u(k)$ . Portanto, a função custo a ser minimizada considera  $\Delta u(k)$  e não mais  $u(k)$ , ou seja:

$$J = \sum_{k=0}^{k=N} x^T(k) Q x(k) + \Delta u^T(k) R \Delta u(k) \quad (9)$$

onde as matrizes  $Q$  e  $R$  são matrizes positivas semidefinidas.

Porém, note que o sinal de controle aplicado à planta é:

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (10)$$

Para transformar o problema de regulação em um problema servo (rastreamento de referência), deve-se estabelecer uma lei de controle que leve a saída do sistema ao valor de referência, logo:

$$\Delta u(k) = K e(k) = K \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y_r(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} \right\} \quad (11)$$

O vetor de ganhos ótimos  $K$  pode ser dividido em duas partes, sendo uma regulatória e outra servo, ou seja:

$$K = [K_{\Delta x} \quad K_y] \quad (12)$$

Deste modo, a lei de controle subdividida resulta em:

$$u(k) = u(k-1) - K_{\Delta x} \Delta x(k) + K_y [e(k)] \quad (13)$$

onde  $e(k) = y_r(k) - y(k)$ . Sendo assim, o problema LQR para o rastreamento de referência se resume em obter o vetor de ganhos ótimos  $K$  quando se conhece o vetor de estados aumentado  $x_a(k)$ , onde a lei de controle resultante é:

$$\Delta u(k) = -K x_a(k) + K_y y_r(k) \quad (14)$$

Substituindo-se a lei de controle, Equação 14, no modelo aumentado descrito pela Equação 8, obtém-se a descrição de malha fechada do sistema:

$$\begin{aligned}x_a(k+1) &= [\Phi_a - K G_a] x_a(k) + G_a K_y y_r(k) \\ y(k) &= [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x_a(k)\end{aligned}\quad (15)$$

Como dito anteriormente, para a lei de controle ser aplicada é necessário o acesso a todas as variáveis de estado do modelo aumentado, o que não é verdade em implementações práticas. Problema esse que é solucionado com o projeto da segunda metade do LQG: o projeto do filtro de Kalman. O observador ou estimador de estados é descrito em espaço de estados a partir do modelo aumentado do sistema como:

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(k+1) &= \Phi_a \hat{x}_a(k) + G_a \Delta u(k) \\ &\quad + L(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}_a(k) &= C_a \hat{x}_a(k)\end{aligned}\quad (16)$$

A lei de controle LQG é dada por:

$$\Delta u(k) = -K \hat{x}_a(k) + K_y y_r(k) \quad (17)$$

Substituindo-se a lei de controle do compensador dinâmico, Equação 17, na equação de estados do sistema aumentado, tem-se:

$$x_a(k+1) = \Phi_a x_a(k) - G_a K \hat{x}_a(k) + G_a K_y y_r(k)$$

Agora, substituindo-se a lei de controle  $\Delta u(k)$ , a saída medida  $y(k)$  e a saída estimada  $\hat{y}(k)$  na equação de estados do observador, tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{x}_a(k+1) &= L C_a x_a(k) + (\Phi_a - L C_a - G_a K) \hat{x}_a(k) \\ &\quad + G_a K_y y_r(k)\end{aligned}$$

Dessa forma, pode-se representar o sistema mais compensador dinâmico e estimador de estados em malha fechada na forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \hat{x}_a(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_a & -G_a K \\ LC_a & \Phi_a - LC_a - G_a K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \hat{x}_a(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} G_a K_y \\ G_a K_y \end{bmatrix} y_r(k) \\ \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{y}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_a & 0 \\ 0 & C_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \hat{x}_a(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Conforme [8] capítulo 9 seção 9.6, a malha fechada acima pode ser reescrita na forma do erro de estimação  $\tilde{x}(k)$  como:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_a(k) &= x_a(k) - \hat{x}_a(k) \\ x_a(k+1) &= (\Phi_a - G_a K)x_a(k) + G_a K \tilde{x}_a(k) \\ &\quad + G_a K_y y_r(k) \\ \tilde{x}_a(k+1) &= (\Phi_a - LC_a) \tilde{x}_a(k) \end{aligned} \quad (18)$$

Na forma matricial, tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_a(k+1) \\ \tilde{x}_a(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_a - G_a K & G_a K \\ 0 & \Phi_a - LC_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \tilde{x}_a(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} G_a K_y \\ 0 \end{bmatrix} y_r(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(k) \\ \tilde{x}_a(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A última etapa de projeto do compensador LQG é a sintonia adotada para as matrizes  $Q_{lqr}$  e  $Q_{fk}$ , bem como a sintonia para as constantes  $R_{lqr}$  e  $R_{fk}$ , pois é a partir dessas variáveis e da matriz  $S$  advinda da solução da equação algébrica de Riccati, que os vetores de ganho  $K$  e  $L$  são calculados. As variáveis de projeto  $Q_{lqr}$  e  $R_{lqr}$  estão ligadas a sintonia do LQR, assim como as variáveis  $Q_{fk}$  e  $R_{fk}$  estão ligadas a sintonia do filtro de Kalman feita pelo projetista. Para calcular o ganho de realimentação  $K$  da lei de controle na Equação 12, primeiro é necessário resolver a equação a diferenças de Riccati de controlador recursivamente. Como este procedimento é feito *offline*, tem estabilidade e convergência garantida para modelos de projeto controláveis e estáveis, é possível iniciar o algoritmo com valores na ordem de cem ou maiores e obter a solução ótima para matriz  $S$  com apenas algumas dezenas ou centenas de iterações. O resultado encontrado para matriz  $S$  é então utilizado para calcular o vetor de ganhos de realimentação:

$$K = [\Phi_a^T S G_a (G_a^T S G_a + R_{lqr})^{-1}]^T \quad (19)$$

De forma análoga, para se encontrar o vetor de ganhos de Kalman  $L$  primeiro é necessário resolver a equação a diferenças de Riccati de observador recursivamente. O resultado encontrado para matriz  $S$  é então utilizado para calcular o vetor de ganhos do observador da seguinte forma:

$$L = \Phi_a S C_a^T (C_a S C_a^T + R_{fk})^{-1} \quad (20)$$

Os resultados apresentados na próxima seção foram obtidos escolhendo-se  $Q_{lqr} = Q_{fk} = I$  e  $R_{lqr} = R_{fk} = 1$ , onde  $I$  é uma matriz identidade de mesma dimensão de  $\Phi_a$ . As matrizes  $Q_{lqr}$  e  $Q_{fk}$  ponderam os estados verdadeiros  $x_a(k)$  e os estados estimados  $\hat{x}_a(k)$ , respectivamente e, por sua vez, as constantes  $R_{lqr}$  e  $R_{fk}$  ponderam o incremento de controle  $\Delta u(k)$  e a saída estimada (filtrada)  $\hat{y}(k)$ , respectivamente. Sabe-se também que a relação maior/menor em magnitude entre  $Q_{lqr}$  e  $R_{lqr}$ , assim como entre  $Q_{fk}$  e  $R_{fk}$  que fornece diferentes sintonias tanto ao LQR quanto ao filtro de Kalman.

Vale lembrar que a sintonia feita para o filtro de Kalman influenciará no sinal de controle aplicado ao sistema bem como na resposta do sistema em malha fechada a perturbações na entrada e saída da planta [9]. A partir das matrizes de sintonia selecionadas e usando-se as Equações 19 e 20, o projeto do compensador LQG fornece os seguintes vetores de ganhos de realimentação e do observador:

$$K = [-0,7255 \quad 1,2806 \quad 0,4212]$$

$$L = \begin{bmatrix} 1,3924 \\ 1,2233 \\ 0,8978 \end{bmatrix}$$

#### IV. ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Segundo [11], a robustez de um sistema em malha fechada é feita a partir da margem de ganho (GM – *Gain Margin*) e margem de fase (PM – *Phase Margin*) da função de sensibilidade  $S(s)$  e sensibilidade complementar  $T(s)$ . A função de sensibilidade  $S(s)$  indica a função de transferência de malha fechada da perturbação  $d(t)$  para a saída do sistema  $y(t)$  e, por sua vez, a função de sensibilidade complementar  $T(s)$  indica a função de transferência de malha fechada do sinal de referência  $y_r(t)$  para o sinal de saída do sistema.

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} \quad (21)$$

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (22)$$

$$T(s) + S(s) = 1 \quad (23)$$

onde  $C(s)$  é o controlador e  $G(s)$  é a planta. A função de sensibilidade e de sensibilidade complementar fornecem medidas de quão sensível o sistema em malha fechada é a mudanças na planta. Assume-se que  $|S(j\omega)|$  e  $|T(j\omega)|$  são as taxas de amplificação de  $S(s)$  e  $T(s)$ , respectivamente. Os valores máximos dessas duas taxas de amplificação fornecem medidas úteis sobre robustez. Esses valores servem como critério de projeto de controle de sistemas [11]. Define-se  $M_S$  como máximo valor de  $|S(j\omega)|$  para todas as frequências:

$$M_S = \max |S(j\omega)| = \|S(s)\|_\infty \quad (24)$$

O máximo valor  $M_S$  também possui uma interpretação geométrica. A malha aberta  $G_{OL}$  é definida como sendo  $C(s)G(s)$ . Dessa forma,  $M_S$  é o inverso da menor distância do gráfico de Nyquist de  $G_{OL}$  até o ponto crítico  $(-1,0)$ . Portanto,

quanto menor for o máximo valor  $M_S$ , maior será a robustez do sistema. Define-se  $M_T$  como máximo valor de  $|T(j\omega)|$  para todas as frequências:

$$M_T = \max|T(j\omega)| = \|T(s)\|_\infty \quad (25)$$

Por exemplo, valores pequenos de  $M_S$  tornam o sistema pouco sensível a perturbações e, por sua vez,  $M_T$  considera a influência de  $y_r(t)$ , e é equivalente a amplitude do pico de ressonância, o qual em geral, deve ser mantido pequeno. Caso a malha de realimentação possua ação integral, o erro em regime permanente é eliminado quando a planta for do tipo 0, assim como o erro para perturbações de carga sustentáveis. Em baixas frequências,  $|T(j\omega)| \rightarrow 1$  e  $|S(j\omega)| \rightarrow 0$ . Os máximos valores  $M_S$  e  $M_T$  estão relacionados às Margens de Ganho (dB) e de Fase (graus) conforme [11,12] e exposto na Tabela 2.

TABELA II  
MARGENS DE ESTABILIDADE

$T(s)$	$S(s)$
$GM \geq \left(1 + \frac{1}{M_T}\right) \left(\frac{180}{\pi}\right)$	$GM \geq \left(\frac{M_S}{M_S - 1}\right) \left(\frac{180}{\pi}\right)$
$PM \geq 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2M_T}\right)$	$PM \geq 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2M_S}\right)$

Em geral, uma boa relação de compromisso entre desempenho e robustez é alcançada para o seguinte intervalo de valores:  $M_T$  deve estar na faixa de 1 a 1,5 e  $M_S$  deve estar na faixa de 1,2 a 2. As especificações de Margens de Ganho e de Fase requerem do projetista um compromisso entre desempenho e robustez da malha de controle. As escolhas de GM e PM também refletem a qualidade do modelo e a variabilidade esperada da planta. Em geral, uma malha de controle bem sintonizada deve possuir uma taxa de amplificação entre 1,7 e 4, ou seja, uma Margem de Ganho aproximadamente entre 4,6 dB e 12 dB e uma Margem de Fase entre 30° e 45° [11,13]. A análise de robustez para malhas de controle discretas pode ser feita da seguinte forma:

$$T(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)} \quad (26)$$

$$S(z) = 1 - T(z) \quad (27)$$

Na Fig. 4 são apresentados os valores singulares para as funções de sensibilidade  $T(z)$  e sensibilidade complementar  $S(z)$  do sistema.

Dessa forma para o modelo aumentado da planta identificada na seção 2 mais controlador LQG digital sintetizado na seção 3 em malha fechada, tem-se que:

$$T(z) = \frac{0,007785z^2 + 0,04813z}{z^3 - 1,455z^2 + 0,6669z - 0,1561}$$

$$S(z) = \frac{z^3 - 1,463z^2 + 0,6188z - 0,1561}{z^3 - 1,455z^2 + 0,6669z - 0,1561}$$

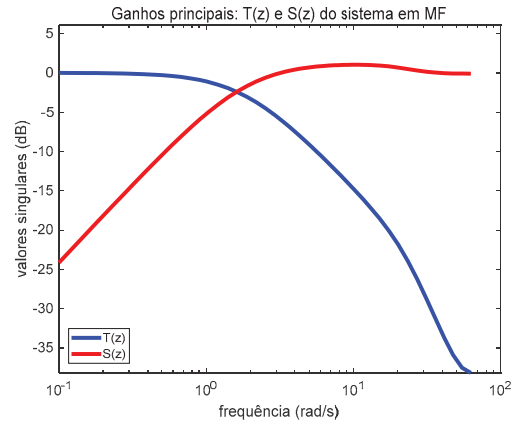


Fig. 4. Valores singulares em malha fechada.

A análise de robustez também é feita para o filtro de Kalman projetado, de tal forma que:

$$T_{fk}(z) = \frac{0,8963z^2 - 1,409z + 0,6302}{z^3 - 1,847z^2 + 1,213z - 0,2486}$$

$$S_{fk}(z) = \frac{z^3 - 2,743z^2 + 2,622z - 0,8788}{z^3 - 1,847z^2 + 1,213z - 0,2486}$$

Por fim, na Tabela 3 são disponibilizadas as margens de ganho e de fase da função de sensibilidade e sensibilidade complementar do sistema aumentado em malha fechada e do observador de estados. Conclui-se a partir da Tabela 3 que tanto o sistema em malha fechada quanto o filtro de Kalman são robustos segundo [11], o que garante a estabilidade de malha mesmo na presença de perturbações e erros de modelagem.

TABELA III  
ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Função	Margem de Ganho	Margem de Fase
$T(z)$	$GM = 6,02$ dB	$PM = 60,00^\circ$
$S(z)$	$GM = 19,07$ dB	$PM = 52,76^\circ$
$T_{fk}(z)$	$GM = 4,82$ dB	$PM = 43,56^\circ$
$S_{fk}(z)$	$GM = 7,84$ dB	$PM = 34,60^\circ$

Na Fig. 5 são apresentados os valores singulares para as funções de sensibilidade  $T_{fk}(z)$  e sensibilidade complementar  $S_{fk}(z)$  do filtro de Kalman.

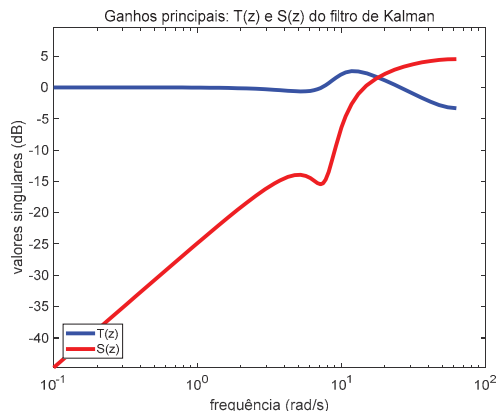


Fig. 5. Valores singulares do filtro de Kalman.

## V. RESULTADOS

Após a etapa de projeto do controlador LQG, o mesmo foi testado na planta física. O diagrama de Bode do sistema em malha aberta e em malha fechada é visto na Fig. 6. Na Fig. 7 é apresentada a resposta do sistema físico em malha aberta para uma sequência de degraus no sinal de referência. Na Fig. 8 é apresentada a resposta da planta física em malha fechada para uma sequência de entradas degraus. Nota-se que o sistema em malha fechada rastreia assintoticamente a referência dada, o que já era esperado, pois o LQG sintetizado possui uma ação de controle incremental herdada do modelo aumentado do sistema. A saída medida e a saída estimada pelo filtro de Kalman são vistas na Fig. 9, assim como o erro de estimação do filtro de Kalman para a mesma sequência de entradas degraus da Fig. 8.

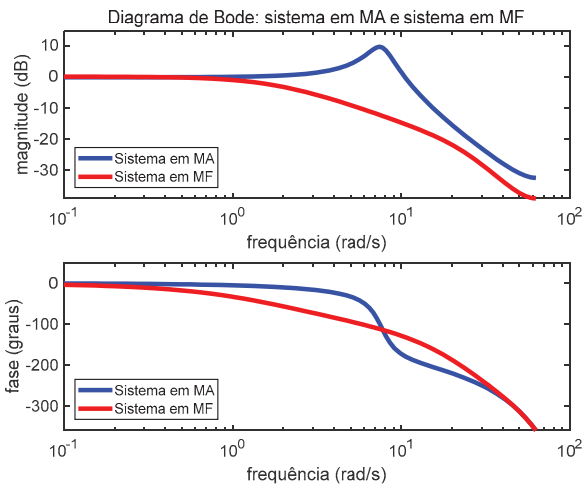


Fig. 6. Resposta em frequência.

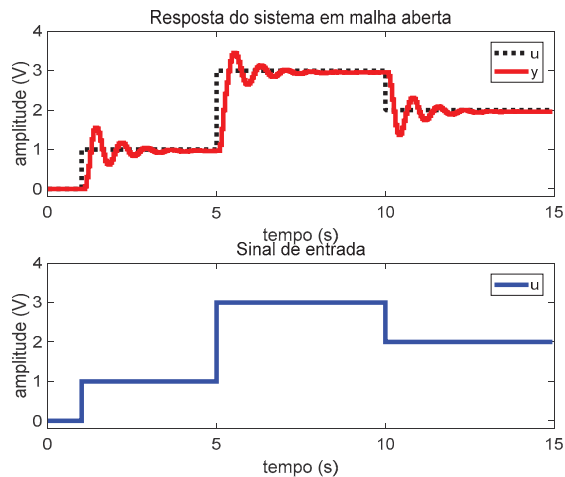


Fig. 7. Resposta em malha aberta da planta.

Optou-se somente em apresentar a saída estimada e não todos os estados estimados, pois não há informação medida sobre todas as variáveis de estados. No entanto, é sabido que se a saída estimada converge para a saída medida significa que os estados estimados também convergiram para os estados verdadeiros. O critério de estabilidade de Nyquist tem como metodologia determinar a estabilidade de malha fechada de um sistema de controle, a partir da característica da resposta

em frequência de malha aberta. Este critério pode ser aplicado em sistemas estáveis e instáveis em malha aberta e em sistemas com múltiplos valores de frequência de corte, fornecendo assim a medida de estabilidade e os valores de margem de ganho e de fase. O critério de estabilidade de Nyquist é o teste de estabilidade mais eficiente disponível para sistemas lineares descritos por funções de transferência [8,11,12].

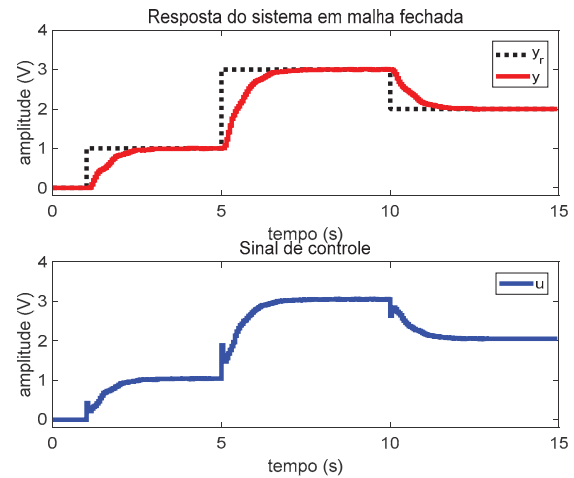


Fig. 8. Resposta em malha fechada da planta.

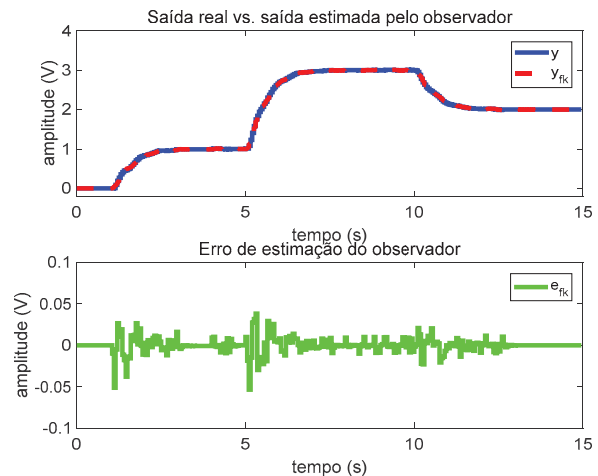


Fig. 9. Saída observada pelo filtro de Kalman.

Na Fig. 10 é apresentado o resultado do Diagrama de Nyquist do sistema de controle em malha fechada quando este é controlado via LQG. O gráfico de Nyquist é um diagrama cartesiano no plano complexo, o qual o ganho de malha (*loop gain*) é plotado. O ponto  $(-1, j0)$  é denominado ponto crítico. A partir da análise da Fig. 10, conclui-se que o controlador LQG projetado fornece maior robustez ao sistema, já que ele possui margem de ganho (GM) e fase (PM) elevadas.

Sistemas de controle com elevados valores de GM suportam maiores mudanças paramétricas, bem como uma maior tolerância a presença de incertezas estruturadas e não estruturadas, antes de atingirem a instabilidade em malha fechada [14,15].

Na Tabela 4 são apresentadas características importantes da planta e controlador LQG digital em malha fechada.

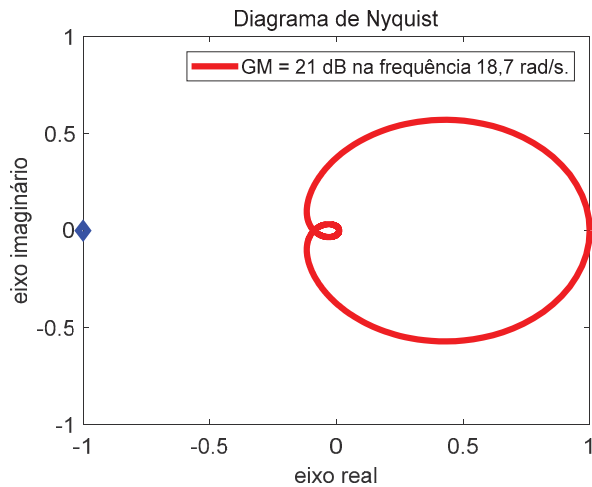


Fig. 10. Diagrama de Nyquist do sistema em malha fechada.

TABELA IV  
DADOS DA PLANTA IDENTIFICADA EM MF

Sistema em Malha Fechada	
Polos discretos	$p = 0,2720 \pm j0,3122$
	0,9109
Zero discreto	$z = -6,1821$
	0
Ganho estático	$K_c = 1,00$
Frequência natural	$\omega_n = 1,8667 \text{ rad/s}$
Coefficiente Amortecimento	$\xi = 1,00$
Sobressinal percentual	OS (%) = 0,00
Tempo de acomodação	$T_a = 2,1428 \text{ s}$

## VI. CONCLUSÃO

Neste trabalho explanou-se a etapa de identificação de um sistema eletrônico real e detalhou-se o projeto e sintonia de um controlador LQG digital. Explicou-se também com é feita a análise de robustez tanto para a malha de controle quanto para o observador de estados. Por fim, realizaram-se testes práticos da planta identificada mais controlador LQG em malha fechada, exemplificando assim a capacidade de rejeição de perturbações externas e erros de modelagem da planta, assim como a adequada filtragem dos estados aumentados da planta.

As métricas utilizadas para se avaliar a robustez do sistema de controle são a Margem de Ganho e Margem de Fase. A Margem de Ganho indica o quanto o ganho na malha de controle pode aumentar antes que ocorra a instabilidade e, por sua vez, a Margem de Fase indica o quanto de atraso de tempo adicional pode ser incluído na malha de controle antes de ocorrer a instabilidade. A síntese de um controlador LQG é relativamente simples e pode fornecer maiores margens de robustez que o tradicional e largamente usado na indústria controlador PID [16,17].

Além disso, uma grande vantagem do compensador LQG é na redução de tempo consumido para projetar complexas malhas de controle para sistemas MIMO, uma vez que a técnica faz uso de álgebra linear, a qual é uma ferramenta cotidiana do engenheiro de controle. Essa vantagem advém da solução de um problema de otimização que usa todas as variáveis de estados de uma única vez, por meio da resolução

de uma equação algébrica tanto no projeto do regulador LQR quanto no projeto do filtro de Kalman [1].

Outra informação importante comunicada é de que a sintonia feita para o filtro de Kalman não afeta a resposta e critérios desejados em malha fechada, os quais são função da sintonia dada ao LQR, todavia afeta a resposta do sistema a perturbações, portanto deve haver compromisso entre desempenho e robustez do sistema.

Vale ressaltar também a facilidade de projeto tanto para sistemas SISO quanto MIMO, além de fornecer elevadas Margens de Ganho e de Fase ao sistema em malha fechada, característica essa bastante desejável, pois sistemas de controle com elevados valores de GM e PM suportam maiores mudanças paramétricas, antes de atingirem a instabilidade.

## AGRADECIMENTOS

O primeiro e terceiro autor agradecem ao apoio financeiro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da UFPA, ao CNPq, e a CAPES.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. S. Silveira; A. F. Silva; J. A. F. Real; O. F. Silva. Centralized Multivariable LQG Control System for Longitudinal and Lateral Speed Hold Autopilot for the AR.Drone 2.0 Quadcopter. XXII Congresso Brasileiro de Automatica – CBA, João Pessoa, PB, 2018.
- [2] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 4ª ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.
- [3] A. A. R. Coelho; L. S. Coelho. *Identificação de Sistemas Lineares*. 2ª ed. Florianópolis: Editora UFSC, 2016.
- [4] I. D. Landau; G. Zito. *Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation*. London, UK: Springer, 2004.
- [5] L. Ljung; T. Söderström. *Theory and Practice of Recursive Identification*. The MIT Press, 1983.
- [6] J. J. Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. São Paulo: Editora USP, 1996.
- [7] K. J. Aström; B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Upper Saddle River, NJ, USA: Dover Publications Inc., 2011.
- [8] M. S. Fadali. *Digital Control Engineering: Analysis and Design*. S.I.: Elsevier Inc., 2009.
- [9] K. J. Aström; B. Wittenmark. *Adaptive Control*. New York, NY, USA: Dover Publications Inc., 2008.
- [10] R. R. Bitmead; M. Gevers; V. Wertz. *Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall Inc., 1990.
- [11] D. E. Seborg; T. F. Edgar; D. A. Mellichamp. *Process Dynamics and Control*. New York, NY, USA: John Wiley and Sons, Inc., 2010.
- [12] S. Skogestad; I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. 2ª ed. John Wiley and Sons, 2005.
- [13] J. Doyle; B. Francis; A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., 1990.
- [14] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall Inc., 2011.
- [15] R. B. Araújo. *Controladores Preditivos Filtrados utilizando Otimização Multiobjetivo para Garantir Offset-free e Robustez*. Florianópolis – SC. Tese de Doutorado – Centro Tecnológico – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), 2017.
- [16] E. O. Freire; F. G. Rossomando; C. M. Soria. "Self-tuning of a Neuro Adaptive PID Controller for a SCARA Robot based on Neural Network", *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 5, May, 2018.
- [17] A. Marín; J. A. Hernández R; J. A. Jiménez. "Tuning Multivariable Optimal PID Controller for a Continuous Stirred Tank Reactor using an Evolutionary Algorithm", *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 2, Feb. 2018.



**Luís Augusto Mesquita de Castro** é graduado (2015) em Engenharia de Controle e Automação pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA). Possui Mestrado (2018) em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Atualmente é aluno de doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade

Federal do Pará, atuando principalmente nas áreas: Controle Preditivo e Estocástico; Controle Robusto com aplicações em Processos Industriais, Sistemas Elétricos de Potência e Sistemas Biomecânicos.



**Leiliane Borges Cunha** é graduada (2013) em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará. Possui Mestrado (2016) em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará. Atualmente é aluna de doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará, estando vinculada ao Laboratório de Controle e Sistemas

(LACOS). Tem experiência no projeto de estabilizadores em sistemas elétricos de potência. Seus principais interesses de pesquisa são: controle preditivo, controle robusto com incertezas paramétricas.



**Bruno Gomes Dutra** é graduado (2014) em Engenharia de Controle Automação pelo Instituto de Estudos Superiores da Amazônia (IESAM). Possui Mestrado (2018) em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará. Atualmente é aluno de doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Pará, atuando principalmente nos

seguintes temas: controle de sistemas, controle preditivo, filtro de Kalman, fusão sensorial, eletromiografia, automação, instrumentação e biomédica.



**Antonio da Silva Silveira** é professor doutor Adjunto do Instituto de Tecnologia (ITEC) da Universidade Federal do Pará atuando na área de Controle de Sistemas Dinâmicos no Laboratório de Controle e Sistemas (LACOS). Dentre as linhas de pesquisa de interesse destacam-se as seguintes: Controle Preditivo Estocástico; Controle Robusto Multivariável; Controle

Adaptativo; Aplicações em Controle de Sistemas Aeroespaciais.