Signals and Linear Systems: A Novel Approach Based on Infinitesimal Calculus (Part I)

J. L. Simancas-García, *Member, IEEE,* K. George-González, Ph.D.

***Abstract*—In part I of this paper, the development of a course on linear signals and systems is presented, based on an infinitesimal calculus model, called MicroCalculus. Such a calculus model allows a didactic development of the fundamental concepts of a signal course. The signals are defined from the fundamental elements of variable and function. MicroCalculus offers a new vision to signal classification, as well as a treatment of non-standard functions as generalized functions, which in the new calculus model can be treated as standard functions. Then, the development of the discrete and continuous convolution operation is presented, from a unified approach. In part II of this paper, the development of all the transforms that are studied in the Signals and Systems courses is presented, starting from the Discrete Fourier Transform until reaching the Z Transform, passing through the Fourier Series, the Fourier Transform, the Laplace transform, etc. The methodology used consists of constructing the Discrete Fourier Transform in a didactic way, to then deduce all the other entities by using the infinitesimal calculus.**

***Index Terms*—Infinitesimal calculus, hyperreals numbers system, signals, linear systems, non-standard functions.**

I. INTRODUCCIÓN

En este artículo se presenta el uso del cálculo con infinitesimales (CI) en el estudio de la asignatura Señales y Sistemas (SyS).

Toda disciplina científica que realice el modelamiento matemático de la realidad que ella estudia, se sustenta en un modelo de cálculo [1]. Razón por la cual, los estudiantes de ingeniería realizan cursos de cálculo diferencial e integral [2] [3], cálculo multivariable [4], ecuaciones diferenciales [5] [6], análisis de Fourier [7] [8], etc., lo que se denomina Análisis Matemático Estándar (AE) [9] [10]. Lo que la mayoría de los estudiantes desconoce, es que ese cálculo que aprenden en los primeros ciclos formativos a nivel universitario, es apenas un tipo de modelo de cálculo. Desconocen la realidad de que han existido y existen actualmente otros modelos [11] [1].

Por ejemplo, Newton desarrolló y aplicó su propio modelo de cálculo a los problemas de la física [12]. En igual situación se encontraba el matemático Leibniz [13], quien resolvió muchos de los problemas geométricos de su época usando su álgebra diferencial. Lo mismo pasaba con Euler [14]. Estos modelos desaparecieron con el tiempo dentro del campo de las matemáticas luego de una interesante historia, la cual se puede consultar en [15] [16]. El más difundido en la actualidad en las universidades del mundo, es el modelo de cálculo basado en límites, al que se le denomina normalmente Cálculo Estándar (CE), cuyo surgimiento se dio mucho tiempo después de la mano de Cauchy, seguido por Bolzano, Dedekind y otros, que lo fueron perfeccionando [17] [18].

Por otro lado, todo modelo de cálculo tiene como base un sistema numérico. Para el CE, el sistema es el de los números reales $\mathbb{R}$ [19] [20]. Este sistema numérico no contempla la existencia de números infinitamente grandes e infinitamente pequeños, conocidos como infinitos e infinitesimales, respectivamente. De hecho, el surgimiento del CE y la desaparición de los modelos de cálculo anteriores, radica en que estos últimos hacían uso de estas cantidades infinitas, las cuales no eran fácilmente aceptadas por otros matemáticos [21], y los desarrollos realizados desde la perspectiva infinitesimal eran considerados carentes de rigor [22].

Cuando se construyen los números reales, y su interpretación geométrica en forma de recta numérica, por cuenta de Dedekind [23] y su uso de la teoría de conjuntos de Cantor [24], y Weierstrass, las referencias a cantidades infinitas desaparece casi por completo del campo de las matemáticas. Con los $\mathbb{R}$ y el concepto de límite de Cauchy, nace el CE, considerado por mucho tiempo el único que cumplía los criterios de rigor que exigen los matemáticos formales [16] [25] [26].

Sin embargo, a mediados del siglo XX, el matemático Abraham Robinson, usando la lógica, dio origen al denominado Análisis No Estándar (ANE) y al sistema numérico hiperreal (SNH), ${}^*\mathbb{R}$, que es una versión extendida del sistema $\mathbb{R}$, en él se contempla y justifica, con todo el rigor, la existencia de números infinitos e infinitesimales [27] [28]. De esta manera, este tipo de números dejaron de ser aberraciones, como eran considerados, para convertirse en entidades validas aplicables en la resolución de problemas en donde se requiere el uso del cálculo [29].

A. Aplicaciones del SNH y el MicroCálculo en la Ingeniería

Un ejemplo de aplicación del SNH para la solución de problemas de ingeniería es el estudio de las redes transfinitas [30] [31] [32], que es una generalización de la teoría de redes convencionales, en donde se consideran sistemas de tamaño infinito y, por ende, el surgimiento de magnitudes infinitesimales, las cuales requieren construcciones matemáticas no estándar.

Por otra parte, algunos investigadores han utilizado el SNH para la representación temporal en simulaciones de

J. L. Simancas-García, está en el Departamento de Ciencias de la Computación y Electrónica, Universidad de la Costa, Calle 58 Cra 55 – 66, Barranquilla, Colombia e-mail: (jsimanca3@cuc.edu.co).

K. George-González, es Doctor en Ciencias del CINVESTAV, México, y dirige la Fundación Innovación y Conocimiento (https://innovacionyconocimiento.com), Barranquilla, Colombia e-mail: (kemel.george@gmail.com).

modelos por eventos de sistemas de ingeniería [33], con lo que logran demostrar que el sistema de los números reales, como base de tiempo de las simulaciones, no representa de manera correcta propiedades básicas de los sistemas, como la causalidad. Encuentran además que SNH presenta un soporte más preciso de estas propiedades. Lo cual se evidencia también en el estudio de las propiedades de los modelos de sistemas dinámicos no lineales impulsivos causales desde una aproximación no estándar haciendo uso de las funciones generalizadas [34] [35].

Desde el punto de vista de la física, se han realizado estudios relacionados con la electrodinámica y el magnetismo basados en modelos de CI [36], así como la solución de la integral de Feynman en la expresión del propagador de Schrödinger como un producto de convolución infinita [37]. También la formulación de procesos estocásticos [38], desde una aproximación infinitesimal [39] [40], útiles para el estudio de los sistemas de comunicaciones [41] [42].

Debido a lo anterior, algunos autores han desarrollado sus propias versiones del cálculo, que han denominado MicroCálculo (MC). Él MC es el estudio de los fenómenos del cálculo a escala infinitesimal. Específicamente, aquellos representados en el Dominio Continuo (DC) que, en realidad, se originan en el Dominio Discreto (DD), y que mediante el MC hacen un tránsito al DC [15] [43]. Se trata de un tipo de cálculo discreto infinitesimal (CDI).

El MC es una construcción que vuelve a los orígenes del cálculo, retomando los elementos organizadores: la variable, la diferencial, la función, la derivada y la integral. Todos estos elementos se desarrollan inmersos en el SNH. EL MC es el estudio de tales elementos, de sus relaciones y distinciones, su alcance teórico y sus aplicaciones, postulando al CDI como un estado intermedio entre el DC tradicional y el DD moderno, producto del uso de técnicas digitales [15].

Con el MC se pretende encontrar el origen discreto de fenómenos cuya observación aparente es de DC, replanteándolos bajo un modelo infinitesimal, y convirtiéndolos al DC mediante una transición que cumple todos los requisitos del rigor, mientras aporta un enfoque didáctico [44]. Aunque en los cursos de SyS se asume que la naturaleza, y por ende, las señales que se extraen de ella, son continuas, lo cierto es que el mundo natural es discreto. La carga eléctrica, la energía, la masa están cuantificadas de forma discreta [45]. Por lo anterior, es coherente el enfoque presentado en este artículo de considerar que el origen de los fenómenos es discreto, y que un cambio de escala produce la aproximación continua de los mismos.

El MC permite explicar de forma didáctica y rigurosa, temas de importancia en el estudio de SyS. Permite desarrollar la delta de Dirac como una función, ya no como una distribución [46], ni mediante aproximaciones de funciones alternativas llevadas a condiciones límite. Este enfoque permite obtener de forma sencilla, didáctica y rigurosa, las propiedades de la delta de Dirac, y aplicarla a distintos problemas [47].

Por otro lado, la dificultad en la comprensión del riguroso Análisis de Fourier (AF) [48] [49], muy útil en aplicaciones de ingeniería [50], ha llevado a que algunos autores propongan evitarlo, y llegar a sus resultados por mecanismo alternativos como la convolución de la respuesta al impulso del sistema y una entrada exponencial $x(n) = e^{j\omega n}$ [51]. También se han propuesto alternativas didácticas que sugieren apoyarse en las bases de los vectores cartesianos rudimentarios, para luego desarrollar una construcción extendida a los espacios vectoriales euclidianos [52] [53], presentando la estructura geométrica subyacente a todas las descomposiciones de Fourier [54].

El MC ha permitido construir una versión unificada del AF [55], en donde el tránsito del DD al DC produce la conversión de Transformada Discreta de Fourier (TDF) en Serie de Fourier (SF), y de ésta en la Transformada Integral de Fourier (TIF), mostrando el carácter unitario de la teoría de Fourier [56]. Se demuestra que el MC proporciona al docente un modelo que le permita presentar por igual la TDF, la SF y la TIF, ya que en este modelo, el DD y el DC están unidos por un vínculo inseparable. Se hace también un desarrollo didáctico de la TDF, que luego va pasando a la SF y finalizando con TIF, haciéndolo más accesible al estudiante [15].

Se ha presentado el origen discreto del Teorema del Muestreo de Shannon (TMS) [57] y su conversión en Teorema de Muestreo (TM) de DC [58]. Además, se ha desarrollado una aplicación práctica del modelo matemático de la voz humana [59], que permite explicar la relación inseparable entre el DC y su reconstrucción por medios discretos [60].

Esta diversidad de resultados ha conducido al objetivo planteado al principio, que consiste en la posibilidad de desarrollar los temas propios de la asignatura SyS, pero utilizando como hilo conductor el MC.

B. Didáctica del SNH y el MC en la Enseñanza de la Ingeniería

Cuando se revisa cualquier libro de cálculo universitario se puede verificar que entre sus objetivos y aplicaciones se encuentra el estudio de las sucesiones, límites y funciones, las reglas de la derivación e integración de funciones, la obtención de máximos y mínimos, el cálculo de longitudes, áreas, superficies y volúmenes, y otros temas similares. En este terreno, el MC no puede competir con el CE, que le lleva ventaja explicativa y aplicativa. Sin embargo, como se ha visto y se verá a lo largo del artículo, el MC se constituye en una herramienta eficiente para poder explicar didácticamente la relación que existe entre las variables de naturaleza continua y discreta, que son la esencia de los cursos de SyS, así como los desarrollos de los análisis que de dicha relación se derivan.

Ante la inquietud natural relacionada con el esfuerzo necesario adicional para que un estudiante se familiarice con el ANE de Abraham Robinson [61], se debe responder que en sus primeros ciclos formativos tampoco están familiarizados con el AE formal [9], lo cual no impide su aplicación. Por ejemplo, los estudiantes aprenden los números reales como extensión de los números racionales, sus propiedades y algunas reglas relacionadas con su aplicación en la solución de problemas de ingeniería. Ningún profesor de matemáticas de los primeros años explica las cortaduras de Dedekind, la teoría de conjuntos de Cantor y las sucesiones Cauchy para presentar los números reales en sus clases.

Se puede proceder de la misma manera con el SNH, donde los hiperreales pueden ser presentados como una extensión de los reales, resumir sus propiedades y las operaciones que con ellos se pueden realizar, para luego desarrollar su aplicación en problemas de ingeniería, específicamente en temas relacionados con las señales y su procesamiento.

Por otro lado, las funciones, las derivadas y las integrales en el MC, que se presentarán en la siguiente sección, no suponen ningún esfuerzo adicional. Las funciones se presentarán como relaciones entre conjuntos, de forma similar a las funciones en los reales, pero mencionando algunas características diferenciadoras. Por su parte, la derivada se presenta como un cociente diferencial, que no es ajeno a los estudiantes universitarios, pues la definición estándar de derivada es el límite de un cociente de este tipo. En el MC la integral es presentada como una suma finita o infinita, según sea el caso. Esto es familiar para los estudiantes pues la integral definida estándar, denominada Integral de Reimann [19] [2] [62], se desarrolla a partir del límite de una suma. Lo único distinto a lo conocido normalmente es que no se necesitan los límites, pues debido al SNH, ya se cuenta formalmente con cantidades infinitesimales e infinitas.

El aporte didáctico fundamental radica en que al contar con cantidades infinitas e infinitesimales, y tener derivadas e integrales como cocientes y sumas de estas cantidades, erradicando la necesidad de los límites, se facilitan muchos de los análisis y desarrollos, y por ende, de los procesos explicativos, de las temáticas relacionadas con las señales y su procesamiento, como se podrá ver a lo largo del artículo.

Por todo lo dicho, en la parte I de este trabajo se realiza el desarrollo de los primeros ejes temáticos de los cursos de SyS desde la perspectiva del CI. En la sección II se realiza un presentación resumida de un modelo de CI denominado MC. En la sección III se presenta la definición de las señales y su clasificación desde una aproximación basada en MC. En la sección IV se desarrollan las señales/funciones especiales, tales como la delta de Dirac y la Heaviside, tan importantes en el estudio de los sistemas. En la sección V, se presenta la operación de convolución. Finalmente, en la sección VI se presentan las conclusiones de la parte I.

Para el artículo que corresponde a la parte II, se presentará el desarrollo de todas las transformadas que se estudian en los cursos de SyS, partiendo de la Transformada Discreta de Fourier hasta llegar a la Transformada Z, pasando por la Serie de Fourier, la Transformada de Fourier, la Transformada de Laplace, etc. La metodología utilizada consiste en construir la Transformada Discreta de Fourier de forma didactica, para luego deducir todas las demás entidades mediante el uso del CI, siguiendo la heurística propia de los libros más destacados en esta rama de la ingeniería, pero superando la ausencia de rigor y las inconsistencias lógicas que se acostumbran a tolerar en estos desarrollos, a cambio de la facilidad deductiva y explicativa que ofrecen para los fines prácticos de la ingeniería. El MC permite combinar la claridad y simplicidad de la heurística con el rigor de las matemáticas formales.

II. Infinitesimales y Cálculo con Infinitesimales

Los infinitesimales volvieron a las matemáticas formales como parte del sistema numérico hiperreal. Por tanto, se procede primero a explicar de forma breve dicho sistema, para luego introducir algunos conceptos importantes del CI, en la propuesta denominada MC.

A. *Sistema Numérico Hiperreal*

La literatura de los campos hiperreales es muy extensa. Desde su fundación por Abraham Robinson [61] se han conocido varias construcciones, de las cuales, la más conocida y que resulta de interés en este trabajo, es la de Luxemburg [63]. Pero existen otras construcciones de este tipo de sistemas [64] [65]. Para los propósitos de esta investigación, sólo se requiere precisar el tipo de cantidades que constituyen los hiperreales, así como la aplicación del modelo a los temas expuestos en las próximas secciones.

En esta sección se desarrolla el campo hiperreal o SNH, ${}^*\mathbb{R}$ [61], [66]. Este es un campo de propiedades excepcionales en relación al sistema de números reales, $\mathbb{R}$. $\mathbb{R} \subset^* \mathbb{R}$, es decir, ${}^*\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{R}$. ${}^*\mathbb{R}$ es un campo totalmente ordenado. Además, toda función o relación en $\mathbb{R}$ es función o relación en ${}^*\mathbb{R}$. Toda fórmula que se satisface en un campo, se satisface en el otro campo. Así, por ejemplo, la suma y producto, los polinomios, sinusoides y funciones exponenciales en $\mathbb{R}$ también están definidas en ${}^*\mathbb{R}$ [15], [67], [68]. Las propiedades del valor absoluto que son validas en $\mathbb{R}$ también lo son en ${}^*\mathbb{R}$. La fórmula $|a+b| \leq |a| + |b|$ que es válida en $\mathbb{R}$, será igualmente válida en ${}^*\mathbb{R}$.

Los elementos ${}^*r \in^* \mathbb{R}$ se denominan números hiperreales o cantidades hiperreales. De la estructura numérica y lógica del sistema hiperreal se deriva que hay tres tipos de números hiperreales o cantidades, las cuales se definen a continuación.

Definición 1. Los números infinitesimales son los números que cumplen la condición de ser más pequeños en magnitud que todo número real, es decir, $|\epsilon| < |r|$. Donde ϵ es un hiperreal infinitesimal y r es un real. Por otro lado, dado un infinitesimal α, se escribe $\alpha \approx 0$, y se dice que α está infinitamente cerca de cero. Se acepta que el 0 es el único número real que también es un número infinitesimal.

Los infinitesimales se simbolizan con letras griegas minúsculas α, β, δ, ϵ, etc. Se considera que el cero es el único infinitesimal que también es real.

Definición 2. Los números finitos son los hiperreales comprendidos entre dos números reales, es decir, $u <^* r < v$. Donde u y v son reales, y ${}^*r$ es un hiperreal finito. Los hiperreales se simbolizan con letras minúsculas así, ${}^*r$, ${}^*u$, ${}^*v$, etc.

Se puede demostrar que todo hiperreal finito se descompone de modo único como suma de un número real y un hiperreal infinitesimal, esto es, ${}^*r = r + \alpha$ [63]. A r se le denomina parte estándar de ${}^*r$, lo cual se escribe como $r = st({}^*r)$. Los hiperreales finitos incluyen a los números reales, cuando $\alpha = 0$.

Definición 3. Los hiperreales infinitos, simbolizados con letras mayúsculas, son los hiperreales que en valor absoluto son mayores que todo número real, es decir, $|r| < |M|$. M es hiperreal infinito. Un caso particular lo constituyen los enteros infinitos, llamados hiperenteros.

Con los números hiperreales se pueden realizar operaciones aritméticas, de la misma forma que se realizan con los números reales. A continuación se definen algunas de estas operaciones básicas [15], [66].

Definición 4. El resultado de sumar dos números infinitesimales es otro infinitesimal, esto es, $\alpha + \beta = \gamma$, para α, β y γ infinitesimales.

Definición 5. El resultado de multiplicar dos números infinitesimales es otro infinitesimal, esto es, $\alpha \cdot \beta = \gamma$, para α, β y γ infinitesimales.

Definición 6. El resultado de multiplicar un número hiperreal finito por un infinitesimal es un número infinitesimal, esto es, ${}^*r \cdot \alpha = \gamma$, para α, γ infinitesimales y ${}^*r$ hiperreal finito.

Definición 7. Los números hiperreales infinitos son inversos multiplicativos de los infinitesimales distintos de cero.

En otras palabras, un hiperreal distinto de cero es infinito si y sólo si su inverso multiplicativo es infinitesimal.

Definición 8. Sean ${}^*a$ y ${}^*b$ números hiperreales arbitrarios, y ocurre que la diferencia ${}^*b -^* a = \alpha$, donde α es número infinitesimal, se dice entonces que ${}^*a$ y ${}^*b$ están infinitamente cerca, y se escribe ${}^*a \approx^* b$.

Definición 9. El inverso multiplicativo de un número hiperreal finito es otro número hiperreal finito.

De lo anterior se deriva una definición importante y útil en las heurísticas que se desarrollan en el estudio de la ingeniería.

Definición 10. Si un hiperreal finito se encuentra infinitamente cerca a 1, también lo está su inverso multiplicativo, esto es, ${}^*r \approx 1 \rightarrow 1/{}^*r \approx 1$.

El campo ${}^*\mathbb{R}$ también se representa geométricamente en la recta hiperreal, que es una extensión de la recta geométrica del campo $\mathbb{R}$ [66], [69]. A cada número hiperreal le corresponde un punto de la recta geométrica hiperreal. Esto incluye a los números reales. Esto quiere decir que se puede dibujar en la recta geométrica, las cantidades finitas, infinitas e infinitesimales.

Al conjunto de los hiperreales comprendidos entre ${}^*a$ y ${}^*b$ se le asocia el intervalo de la recta $[{}^*a,{}^* b]$, que es la extensión hiperreal del intervalo real $[a, b]$. El intervalo será finito si $(b-a)$ lo es. Si los extremos del intervalo son infinitesimales α y β, al representación seguirá siendo un segmento de recta [66].

Una vez considerado ${}^*\mathbb{R}$ como una extensión de $\mathbb{R}$, se pueden considerar todos los reales r y al conjunto de todos los hiperreales que están infinitamente cerca de él. Se trata de uno de los aportes más significativos de Abraham Robinson [61], quien denominó Mónada a tal conjunto. Se presentan las siguientes definiciones construidas a partir de [68].

Definición 11. Se denomina átomo de 0 al conjunto de todos los infinitesimales o hiperreales infinitamente cercanos a 0. Formalmente dicho conjunto se expresa así $A(0) = \{\alpha \in^* \mathbb{R} \mid \alpha \approx 0\}$.

Definición 12. Se denomina átomo de un número real r al conjunto $A(0)$ conformado por todos los números hiperreales ${}^*r]$ que están infinitamente cerca de él. Formalmente tal conjunto se expresa así $A(r) = \{{}^*r \in^* \mathbb{R} \mid {}^*r \approx r\}$.

Definición 13. Dado que todo número hiperreal finito tiene una parte estándar que es un número real, dicho número hiperreal pertenece al átomo de su parte estándar.

La relación de pertenecer o no al mismo átomo, es una relación de equivalencia, como se verá en las siguientes definiciones. Sin embargo, se alcanzará mayor claridad cuando se presente el núcleo de un número infinitesimal.

Definición 14. El átomo $A(a)$ del número real a, es el conjunto de todos los números hiperreales finitos de la forma $a + A(0)$.

Definición 15. Dado que la distancia entre dos números reales ordinarios distintos no puede ser infinitesimal, sus átomos tienen intersección vacía.

Esto es un atributo único de los números hiperreales, porque quiere decir que los átomos separan, en sentido estricto, a cada número real de otro. También implica que cada número real tiene un átomo único.

Los hiperenteros son los enteros infinitos del campo hiperreal. Pueden construirse con la conocida función *parte entera* de r, designada como $[r]$, que asigna a cada número real $r \in \mathbb{R}$ un número entero $[r]$ que cumple $r - 1 < [r] \leq r$.

Como esta es una fórmula que se satisface se el campo real, se satisface en el campo hiperreal.

Definición 20. Dado el número hiperreal arbitrario ${}^*r \in^* \mathbb{R}$, se cumple que ${}^*r - 1 < [{}^*r] \leq^* r$, donde el hiperreal que corresponde a $[{}^*r]$ se denomina hiperentero.

Definición 21. Si ${}^*r$ es número hiperreal finito, necesariamente se descompone como ${}^*r = r + \alpha$, luego $[{}^*r] = [r]$, para $\alpha > 0$, y $[{}^*r] = [r] - 1$, para $\alpha < 0$.

Definición 22. Si ${}^*r$ es número hiperreal infinito, $[{}^*r]$ es un hiperentero infinito.

Definición 23. A la izquierda de todo infinitesimal positivo hay un infinitesimal que es inverso de algún hiperentero positivo.

Definición 24. Dado el número infinitesimal $0 < \alpha$ y un número hiperreal finito ${}^*r$ arbitrario, siempre hay un múltiplo entero de α que es mayor que ${}^*r$.

B. Modelo de Cálculo Basado en el SNH

Ahora se procede a la presentación de un modelo de cálculo que tiene como base el SNH, empezando por la variable y las funciones, siguiendo con la definición de continuidad, y finalizando con las derivadas e integrales que se pueden desarrollar en dicho modelo, denominado MC.

1) Variables y Funciones: Las señales se pueden definir de forma simple como representaciones de forma eléctrica y matemática de las variables físicas que se pueden encontrar en la naturaleza y en los procesos creados por el ser humano [70] [71] [72]. Debido a lo anterior, antes de proceder con la definición de señal, en una sección posterior del artículo, se debe indicar qué se entiende por variable en el entorno del CI.

Definición 25. Una variable arbitraria x es una sucesión ordenada de valores o datos numéricos de la forma [15]:

$$x = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_N\} \quad (1)$$

donde N es un entero positivo infinito, al que se le denomina rango de la variable.

Cada uno de los x_n es un hiperreal infinitesimal, finito o infinito, y corresponde a un término o dato en la posición n, también llamado el índice n, sugiriendo la idea de una variable que recorre todas sus posiciones, desde la primera hasta la última. Para facilitar la asimilación por parte de los estudiantes, la representación de la variable se hará con la notación tradicional de las sucesiones [15]:

$$x = \{x_n\} \qquad 0 \leq n \leq N \tag{2}$$

Con esta notación se indica que la variable a la izquierda es exactamente igual a la sucesión de la derecha, que tiene como término general x_n, que podría estar dado por una fórmula.

Un ejemplo muy sencillo de variable consiste en subdividir el intervalo real $[0,1]$ en N partes, donde N es entero infinito. Cada posición es $x_n = n/N$, de modo que la variable es $\{0, 1/N, 2/N, 3/, ..., N/N = 1\}$.

Llegado a este punto se puede definir también la diferencial de una variable.

Definición 26. La diferencial de una variable x, es la variable resultante de hallar la diferencia entre todos los valores sucesivos de x, $\mathrm{d}x_n = x_{n+1} - x_n$. Con $\mathrm{d}x = \{\mathrm{d}x_0, \mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_N\} = \{\mathrm{d}x_n\}$.

El último término de la nueva variable $\mathrm{d}x$ se hace cero, para que la diferencial también tenga $N+1$ términos. De esta diferencial dependen varias características de la variable.

Definición 27. Si la diferencial de una variable es constante, se dice que la variable es independiente.

Definición 28. Si la diferencial de una variables es infinitesimal, se dice que la variable es continua.

En un curso convencional de SyS, las señales, como entes portadores de información, se modelan mediante funciones matemáticas de una variable independiente (VI), que normalmente es el tiempo, en el sentido del cálculo tradicional basado en variables reales [73]. Desde este punto de vista, las funciones, y por ende las señales, son relaciones entre conjunto numéricos arbitrarios, lo que se escribe como $y = f(x)$ donde tanto x como y son variables. Para el caso de señales unidimensionales, se relacionan dos conjuntos X, Y, asignando a cada elemento del conjunto X, el dominio de la función, un único elemento del conjunto Y, el rango de la función. Lo más esencial del concepto de función en la actualidad, es el carácter arbitrario de la asignación entre los conjuntos [15].

La visión funcional no es ajena al CI, pero difiere de la presentada anteriormente, en que la función esta determinada por el concepto de variable y su existencia.

Definición 29. Sean dos variables x, y del mismo rango N, donde N es un entero infinito. Se denomina función a la pareja (x, y) ordenada secuencialmente, asignando a cada término de la primera variable el término correspondiente de la segunda variable. x se denomina argumento o variable de dominio, y y es la variable de rango. Se dice que la variable y es función de la variable x.

Lo anterior se escribe de la siguiente forma. Si se tienen las dos variables [15]:

$$x = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_N\}\,; \quad y = \{y_0, y_1, y_2, ..., y_N\} \tag{3}$$

la pareja ordenada de las dos variables se simboliza como:

$$(x, y) \longleftrightarrow y = f(x) \longleftrightarrow y_i = f(x_i) \tag{4}$$

donde la letra f es simbólica y sólo representa la relación u operación establecida entre ellas. Se considera que se ha establecido una asignación $x \longrightarrow y$ de la forma:

$$x_0 \longrightarrow y_0, x_1 \longrightarrow y_1, x_2 \longrightarrow y_2, ..., x_N \longrightarrow y_N \tag{5}$$

Esta correspondencia es multivaluada, en el sentido de que es indiferente la multiplicidad de valores del rango en la asociación que se establece desde la variable de dominio. En otras palabras, diferentes posiciones de la variable x pueden contener el mismo valor. Sin embargo, si se establece que para $n \neq m \longrightarrow x_n \neq x_m$, entonces se trata de una asignación univaluada, compatible con el modelo de CE.

2) Continuidad de Variables: Se procede entonces a establecer, desde la perspectiva del CI, cuando una variable es continua o discreta. En el CE, una variable se considera continua cuando no existe un salto o agujero en el conjunto linealmente ordenado de los valores que va tomando. Para una comprensión mejor de lo que es un salto, agujero y de la definición de continuidad, se pueden consultar libros de cálculo universitario [62].

En el CI, dado que se han definido las variables como secuencias, siempre se producirá un salto en cada uno de los valores, debido a que dicha sucesión es discreta, aunque sea a escala infinitesimal. De modo que, cuando se habla de continuidad en este modelo de cálculo, no se hace en el sentido explicado antes, sino que se dirá que una variable es continua si la diferencia entre dos valores sucesivos de la variable es un infinitesimal:

$$x_{n+1} - x_n \approx 0 \tag{6}$$

El siguiente es un caso específico de variable, que será útil de ahora en adelante. Se considera un intervalo finito de la recta hiperreal ${}^*\mathbb{R}$, de la forma $[-L, L]$, donde L es real hiperreal finito, y el entero finito N. Lo que da como resultado una secuencia $x = \{nL/N\}$, $-N \leq n \leq N$, que es una variable discreta, con un número finito de elementos. Si ahora se toma N como un entero infinito, entonces:

$$x = \{x_n\} = \left\{\frac{nL}{N}\right\} \tag{7}$$

Asumiendo el infinitesimal:

$$\mathrm{d}x = \frac{L}{N} \tag{8}$$

Permite reescribir la variable de la forma:

$$x = \{x_n\} = \{n\mathrm{d}x\} \tag{9}$$

La diferencia de dos valores sucesivos de la variable:

$$x_{n+1} - x_n = (n+1)\mathrm{d}x - n\mathrm{d}x = \mathrm{d}x \tag{10}$$

es infinitesimal, lo que indica que la variable es continua. Si se hace $y_i = f(x_i)$, se tiene que $\mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$, notación muy usual, que es imposible en el CE.

En resumen, en el modelo de CI, una variable continua toma valores en una sucesión infinita cuyos términos están separados infinitesimalmente. Cuando el salto no es infinitesimal, se dice que la variable no es continua o es discontinua.

3) Derivadas e Integrales: Se requiere ahora que se establezca de forma breve cómo se hace cálculo diferencial e integral con el modelo hiperreal.

Definición 30. Sea una función hiperreal $y(x)$, entonces la enésima derivada de dicha función es:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{1}{\mathrm{d}x^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(x + (n-k)\mathrm{d}x) \tag{11}$$

Para el caso de la integral, se debe especificar un dominio para la función $y(x)$.

Definición 31. Para una función $y = f(x)$ definida en el dominio $[-L, L]$, donde L es finito, la integral de la función viene dada por:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}x \sum_{n=-N}^{N} f(n\mathrm{d}x) \tag{12}$$

donde N es el rango de la variable x, que puede ser finito o infinito, y la diferencial $\mathrm{d}x = 2L/2N + 1$.

En el trabajo con señales, son importantes dos condiciones que deben cumplir las funciones que se utilizan para modelar señales: que sean derivables e integrables. Ambas se desarrollan a continuación.

Definición 32. Sea $x(t)$ una función definida en el intervalo finito $[-T, T]$ del campo hiperreal $^*\mathbb{R}$. Como tal función está inmersa en el campo hiperreal, se considera continua en un punto $a \in [-T, T]$, si y sólo si, siempre que $a \approx t$ ocurre que $x(a) \approx x(t)$.

Definición 33. Sea $x(t)$ una función hiperreal, su cociente de Newton viene dado por:

$$\frac{x(t+e) - x(t)}{e} \tag{13}$$

donde $e \approx 0$.

Definición 34. La función $x(t)$ tiene derivada $x'(t)$, como tradicionalmente se conoce, si y sólo si, el cociente de Newton es finito. En este caso se cumple:

$$x'(t) = \frac{x(t+e) - x(t)}{e} \tag{14}$$

es un hiperreal finito porque el cociente de Newton queda en el átomo del número real 1.

Por regla general, como todos estos son valores en un mismo átomo, se selecciona como derivada el número real estándar.

Se considera a $x(t)$ una función integrable en el dominio $[-T, T]$, cuando existe:

$$\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{d}t \tag{15}$$

en su sentido tradicional. Para el caso hiperreal se presenta la siguiente definición.

Definición 35. Sea N un hiperreal entero infinito positivo y T hiperreal finito, de modo que $e = T/N$ es infinitesimal. Se considera que una función $x(t)$ definida en el dominio hiperreal $[-T, T]$ es integrable si se cumple que:

$$\int_{-T}^{T} x(t)\mathrm{d}t = \sum_{-N}^{N} x(ne)e \tag{16}$$

para $-N \leq n \leq N$, da como resultado un número hiperreal finito.

Nuevamente, como todos estos son valores en un mismo átomo, se selecciona como valor de la integral, el número real estándar. Estos dos aspectos centrales del cálculo diferencial e integral se encuentran expuestos de modo riguroso y didáctico en [69].

El modelo geométrico del campo hiperreal es la recta geométrica, cuya representación es idéntica para los reales y para los hiperreales, porque ambos están inmersos en ella, sólo que ahora hay puntos de la recta que son infinitesimales, puntos que son finitos, y puntos que son infinitos. Por ejemplo, dado un número real r y un infinitesimal $e \approx 0$ el intervalo abierto $-e + r, x + e$ representa el átomo de r.

En este modelo geométrico de los números hiperreales, se encuentra de manera precisa y cómoda, los dominios temporal (DT) y dominio frecuencial (DF) de las señales, en donde asumen sus valores las señales de tiempo continuo (TC) y tiempo discreto (TD). La situación verdaderamente de interés ocurre cuando las dos cantidades T y N se combinan, de modo tal que ellas asumen valores hiperreales.

III. Descripción de Señales y Secuencias

En cualquier curso de SyS, el primer paso consiste en definir que son las señales, incluso, mucho antes de llegar a definir lo que sería un sistema [74] [75].

A. Señales y Secuencias

Es común encontrar en la literatura sobre señales, que siendo estas últimas modeladas mediante funciones matemáticas, se asignan a las variables los roles de independiente (VI), para la variable t, que normalmente viene dada por el tiempo, y dependiente para la variable x (VD), que representa el valor de la variable física que se manifiesta mediante la señal, en un instante especifico de tiempo.

La asignación anterior se debe a que supuestamente existe una relación de dependencia entre las variables. Los valores que puede asumir la VD quedan totalmente determinados por los valores de la VI. Tal situación se puede considerar cierta cuando las variables que se relacionan tiene una dependencia física real, como por ejemplo, la temperatura alcanzada por un recinto y su tamaño [76], [77]. Pero cuando se trata del tiempo, no existe tal dependencia física. El tiempo se constituye en una variable virtual, que dada su naturaleza ordinal, tiene el rol de organizar la ocurrencia de los eventos del mundo físico [78].

La anterior concepción del tiempo, como VI, se ajusta de manera coherente con la forma natural en que se definen las variables en el CI, presentada en la sección anterior, en donde el tiempo queda implícito en el subíndice de la misma, organizando la ocurrencia de los valores que va tomando la variable, sin que exista la necesidad de establecer una relación funcional con él.

En todo caso, para no ir contra la concepción convencional de asumir las señales como funciones, en lugar de como variables que van tomando sus valores a medida que se desarrolla un evento físico, se puede, desde el punto de vista del CI, definir las señales desde la perspectiva funcional. El primer paso consiste en establecer un dominio, que para el caso de las señales, normalmente es el tiempo. Por tanto, para un real finito $T < 0$ y N entero finito, el DT es el conjunto [43]:

$$\left\{\frac{nT}{N}\right\} = \left\{-\frac{NT}{N}, ..., -\frac{T}{N}, 0, \frac{T}{N}, ..., \frac{NT}{N}\right\} \tag{17}$$

donde $-N \leq n \leq N$. Se trata de un DD finito de $2N+1$ elementos. Como el mencionado dominio es una secuencia de $2N+1$ cantidades y tal sucesión no es otra cosa que una variable, la cual se denomina variable temporal t:

$$t = \{t_n\} = \left\{\frac{nT}{N}\right\} \tag{18}$$

Las señales entonces se pueden construir mediante la relación funcional entre las dos variables x y t, que se puede sintetizar mediante:

$$x[t_n] = x\left[\frac{nT}{N}\right] = x[n] \tag{19}$$

Siendo x una secuencia, según se definió en la ecuación (1), t una secuencia discreta, y siendo la señal una relación funcional entre estas dos variables, queda claro que, desde el punto de vista del CI, el primer tipo de señal que surge de forma natural es la de TD.

Un ejemplo de señal discreta (SD) de TD construida de esta forma es:

$$x[t_n] = x\left[\frac{nT}{N}\right] = x\,[n] = A\sin\left(2\pi f nT/N\right) \tag{20}$$

para $-N \leq n \leq N$.

A continuación se procede a desarrollar la clasificación de las señales desde la perspectiva del CI.

B. Clasificación de Señales

Cuando se consultan los libros más importantes sobre el procesamiento de señales, se puede observar que estas se pueden clasificar según varios criterios [79] [80]. El más importante de tales criterios esta relacionado con la naturaleza, discreta o continua, de las variables dependiente e independiente. Los 4 tipos de señales básicas que se derivan de aquí se presentan en la Fig. 1.

Los cursos de SyS parten del supuesto de que en la naturaleza sólo se encuentran señales, analógicas, donde tanto la VD como la VI son de naturaleza continua [81]. Cuando se muestrean dichas señales, aparecen las de TD, que se consideran discretas en la VI, y se asume que la dependiente conserva su continuidad [82]. Sin embargo, dicha continuidad no se ajusta a la definida en el CI.

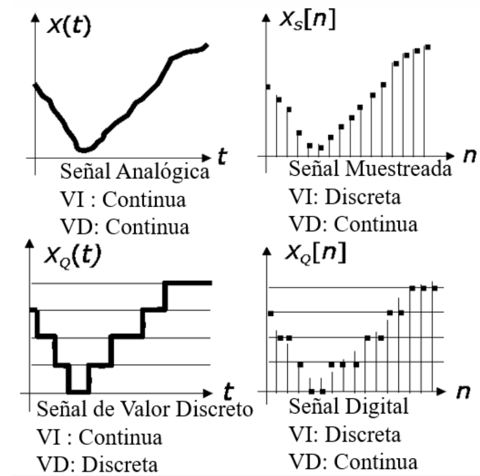

Fig. 1. Clasificación de señales según la naturaleza de las variables dependiente e independiente

Cuando se muestrea una señal, aparecen saltos no infinitesimales en la VD que la vuelven discreta. La continuidad de la que se habla en los cursos convencionales de señales, está relacionada con el hecho de que la VD puede seguir tomando cualquier valor dentro de los números reales, en lugar de ser reemplazada por una variable ordinal entera, como pasa con la independiente temporal, o por una nueva variable que toma un número finito de valores específicos preestablecidos, como sucede cuando se cuantifica [83].

Siguiendo lo lógica anterior, desde la perspectiva del CI, sólo existen dos tipos de señales: señales continuas y discretas. Considérese nuevamente el intervalo $[-T, T]$ dado por el número real $0 < T$ y el entero positivo finito N , con $-N \leq n \leq N$.

El DD $\{nT/N\}$, tienen $2N+1$ elementos y sigue siendo un dominio finito, pero está inmerso en el campo hiperreal con su representación en la recta geométrica, lo que permite hacer que las cantidades $0 < T$ y N puedan asumir, bajo ciertas circunstancias, valores finitos, infinitos e infinitesimales.

Como ya hemos expuesto la condición de T real finito y N entero finito, entre todas las nuevas combinaciones posibles de T y N, consideremos primero T real finito y N entero infinito. Como T/N es infinitesimal, se hace $\mathrm{d}t = T/N$. Ya que $-N \leq n \leq N$, se tiene que $-N\mathrm{d}t \leq n\mathrm{d}t \leq N\mathrm{d}t$ o sea que $-T \leq n\mathrm{d}t \leq T$. Se tiene así la variable $t = \{n\mathrm{d}t\}$, comprendida en todo el intervalo $[-T, T]$. Es fácil comprobar que t se encuentra infinitamente cerca de cualquier número real que pertenezca a dicho intervalo. La cantidad fija $\mathrm{d}t$ es la diferencial de t, que ahora es variable continua. De esta manera, la secuencia presentada en la ecuación (20), se convierte en una señal continua:

$$x\,[ndt] = A\sin\left(2\pi f ndt\right) = A\sin\left(2\pi f t\right) = x(t) \tag{21}$$

La anterior forma de construir los modelos de señales, rompe con el dilema planteado de cuál debe ser el orden más adecuado para la enseñanza de las señales y los sistemas que las procesan. Algunos autores consideran que el orden correcto es el estudio inicial de las señales y los sistemas de TD para luego proceder al TC [74]. Otros han señalado que la mejor forma es presentando primero el TC para luego dar paso al discreto [84]. Algunos autores de textos universitarios sobre las señales hacen un esfuerzo por tratar de presentar los dos tipos de señales de forma concurrente [85], aunque al desarrollar cada capítulo debe escoger un orden de presentación de los temas.

Usando como base de CI, la forma natural de presentar las señales es definirlas como secuencias discretas, según las ecuación (18), para luego, mediante un simple cambio de N de entero finito a hiperreal infinito, construir la señal continua, según la ecuación (19).

IV. Señales Especiales

Existe un grupo muy particular de funciones que permiten modelar unas señales muy especiales dentro de esta área de estudio de la ingeniería, las cuales se denominan funciones no estándar [86] [46]. Para el caso de los cursos de SyS, tales funciones tienen nombre propio: 1) La función de Heaviside o escalón unitario; 2) La delta de Dirac o impulso unitario; 3) La delta de Dirac periódica o tren de impulsos. También son importantes las derivadas e integrales de tales funciones.

La importancia de tales señales o funciones, radica en que permiten estudiar diversos aspectos relacionados con el análisis de los sistemas. Por ejemplo, la función o señal escalón unitario permite observar el comportamiento dinámico/transitorio de un sistema, y por ende concluir si es sub-amortiguado, ligeramente amortiguado o sobre-amortiguado, o medir la rapidez de respuesta del sistema [87] [88]. Por su parte, con la función impulso unitario se puede obtener la respuesta al impulso de un sistema [89] [90]. Con dicha respuesta se puede calcular la respuesta del sistema a cualquier entrada arbitraria mediante convolución. El tren de impulsos es útil para la construcción de señales de forma general, a partir de la combinación lineal de impulsos infinitamente cercanos [91].

La denominación de funciones no estándar se debe a que normalmente no cumplen todas las condiciones que debe cumplir una función estándar basada en el modelo de CE, a saber: que sea derivable e integrable, y este definida en todos los puntos de su dominio. Cuando no cumplen estas condiciones, las funciones no pueden estudiarse mediante el uso del CE, y por ende los matemáticos no las aceptaron hasta que Laurent Schwartz desarrolló su famosa teoría de distribuciones [92].

Los resultados del trabajo de Schwartz permitieron utilizar las funciones no estándar, especialmente la delta de Dirac, como funciones del CE, y cuya existencia estaba rigurosamente demostrada y justificada. Sin embargo, estos resultados eran inaccesibles para estudiantes de ingeniería. Algunos autores derivaron propiedades utilizables de la función delta en el estudio de las señales y los sistemas, a partir de la teoría de las distribuciones, de una forma menos rigurosa, evadiendo la teoría de los espacios vectoriales, pero que continuaba siendo poco accesible, salvo para algunos estudiantes aventajados [93].

A las funciones construidas con base en un modelo de CI, se les puede verificar que sean derivables, integrables, y como pueden tomar valores finitos, infinitesimales e infinitos, estarán definidas para todos los puntos de su dominio, lo que permite manejarlas como si fueran funciones estándar, y se les denomina funciones generalizadas. De las funciones generalizadas que se pueden construir, este artículo se concentra en la función delta de Dirac, pues las demás funciones generalizadas se pueden obtener a partir de ella.

A. Diferentes Aproximaciones a la Delta de Dirac

Lo que hace que la delta de Dirac no sea considerada una función en el sentido estándar, es la forma como la definió su proponente, el físico Paul Dirac, en su obra fundamental sobre mecánica cuántica [94]. Dirac procedió de la siguiente forma a partir de sus investigaciones que lo llevaron a "...considerar cantidades que involucran cierta clase de infinitos. Para lograr una notación precisa en el manejo de estos infinitos, introducimos una cantidad $\delta(x)$ dependiendo de un parámetro x, que satisface las condiciones: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$ y $\delta(x) = 0$ para todo $x \neq 0$".

Dirac no establece que valor toma la función en $x = 0$, y debe entonces agregar que la delta "no es una función de x de acuerdo con la definición matemática usual, la que requiere que una función tenga un valor definido para cada punto de su dominio, sino algo más general, lo cual podemos llamar función impropia para destacar su diferencia con la de función según la definición usual".

Una forma común de desarrollo la función delta en un entorno de CE realizado por los ingenieros es mediante ciertas funciones aproximadas en condiciones límites, tales como la función pulso o la función Gaussiana [93] [75]. El problema con estas aproximaciones, es que si bien cumplen las condiciones establecidas por Dirac, no logran establecer el valor de la función en $x = 0$. En todo caso, de estas aproximaciones se derivan todas las propiedades de la delta aprovechables en el estudio de las SyS.

La manera más adecuada de solucionar el problema de indeterminación de la función delta en el origen, es mediante el cambio del modelo de CE a uno basado en infinitesimales. Una construcción interesante y rigurosa de la función delta de Dirac en un entorno infinitesimal, puede consultarse [95]. Sin embargo, el enfoque de este autor es altamente matemático, haciéndolo inaccesible para un estudiante no graduado de ingeniería, pues Dannon propone la existencia y construcción de los hiperreales partiendo de las sucesiones de Cauchy, las cortaduras de Dedekind, y demás conceptos relacionados con la teoría de los números, los cuales normalmente no están al alcance de un estudiante de ingeniería.

Por su parte, George e Imaz realizaron una formulación más accesible, partiendo de una aproximación infinitesimal de la función Heaviside, con un desarrollo gráfico e intuitivo [47]. Aun así, George propuso una forma aun más accesible e intuitiva de abordar el estudio de la delta de Dirac como una función matemática utilizable en el estudio de las SyS [15], y es el enfoque que se adopta en este trabajo.

B. La Delta de Dirac como Función

Suponga la variable hiperreal $x = \{x_n\} = \{n\mathrm{d}x\}$ definida en el intervalo $[-T, T]$ dada por $\mathrm{d}x = T/N$, y $-N \leq n \leq N$. La delta de Dirac $\delta(x)$, también denominada impulso unitario, es una función de x, que tiene como variable δ la siguiente:

$$\delta(n\mathrm{d}x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{d}x} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{22}$$

Como $x = \{x_n\} = \{n\mathrm{d}x\}$, la delta de Dirac que se ha definido es similar a la propuesta en otras aproximaciones, pues es sabido que $x \neq 0 \leftrightarrow n \neq 0$, luego $x \neq 0 \rightarrow \delta(x) = 0$. Además si x está definido en toda la recta real ordinaria, y se hace que T sea infinito tal que T/N siga siendo infinitesimal, ocurre que usando la definición de integral de la sección II, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} \delta(n\mathrm{d}x)\mathrm{d}x = \delta(0)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1 \tag{23}$$

Como x es una variable continua y es la VI, su diferencial $\mathrm{d}x$ no sólo es infinitesimal, sino que también es constante, por tanto, los diferenciales en el numerador y el denominador durante el desarrollo de la ecuación (23) son iguales. Por otro lado, se nota el cumplimiento de las condiciones presentadas por Dirac para su función. La similitud con las otras aproximaciones no puede ocultar el hecho de que la delta tradicional y la propuesta aquí, difieren del modelo de cálculo que les sirve de contexto. Y es precisamente esta diferencia la soluciona el problema de indeterminación de la función en el origen, puesto que cuando $n = 0$ la función toma el valor del hiperreal N/T. Se puede ver una gráfica de la función obtenida en la Fig. 2.

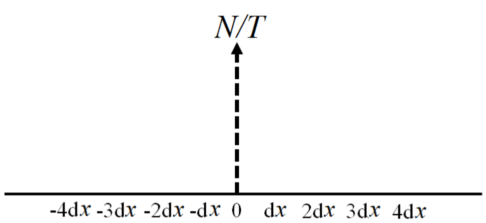

Fig. 2. Función delta de Dirac en el contexto del cálculo con infinitesimales

Uno de los aportes más significativos de este enfoque es la forma tan simple y didáctica con la que se pueden derivar las propiedades de la función delta, que la hacen utilizable en el análisis de SyS. Se procede a presentar las propiedades de la delta en este contexto.

1) Derivada de la delta de Dirac: La delta de Dirac ha sido desarrollada como función, y por ende debe poder calcularse su derivada. Su diferencial es de la forma:

$$\mathrm{d}\delta = \delta((n+1)\mathrm{d}x) - \delta(n\mathrm{d}x) \tag{24}$$

para $-N \leq n \leq N$. Para el cálculo de la derivada de la delta de Dirac, se desarrolla el cociente diferencial:

$$\begin{aligned} \delta'(x) &= \frac{\delta((n+1)\mathrm{d}x) - \delta(n\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{d}x^2} & n = -1 \\ -\frac{1}{\mathrm{d}x^2} & n = 0 \\ 0 & n \neq -1, 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

Como se puede observar, el cociente diferencial no asume valores finitos en 0, -1, por lo que la derivada propiamente existe en todos los valores de la variable x, salvo en 0 y -1, donde el cociente toma de un hiperreal infinito. La derivada generalizada, que se identifica con el cociente diferencial, se anula fuera de tales valores, y tiene como gráfica la Fig. 3.

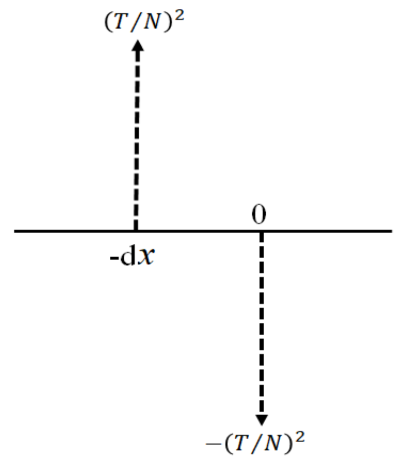

Fig. 3. Primera derivada de la función delta de Dirac en el contexto del cálculo con infinitesimales

Se pueden también calcular las derivadas de orden superior de la función delta de Dirac.

2) Derivadas de Orden Superior de la delta de Dirac: Se aplica la fórmula general de la ecuación (11) para el caso particular de la función delta de Dirac, obteniéndose:

$$\delta(x)^n = \frac{1}{\mathrm{d}x^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \delta(x + (n-k)\mathrm{d}x) \tag{26}$$

Como sólo interesa el valor de la función en cero, se encuentran aquellos valores de P en los que el argumento es cero:

$$P\mathrm{d}x + (n-k)\mathrm{d}x = 0 \tag{27}$$

que da como resultado que los valores de P están en el rango:

$$-n \leq P \leq n \tag{28}$$

Nuevamente, la enésima derivada generalizada de la delta de Dirac consiste en $2N+1$ valores en los infinitesimales sucesivos, en los que la derivada superior cambia de signo alternadamente.

3) Derivada del Escalón Unitario: Siguiendo la notación tradicional, se define el escalón unitario $u(x)$ o función de Heaviside como:

$$u(n\mathrm{d}x) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n > 0 \end{cases} \tag{29}$$

Para el cálculo del cociente diferencial, término a término, se encuentra que la diferencial:

$$\mathrm{d}u = u((n+1)\mathrm{d}x) - u(n\mathrm{d}x) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{30}$$

por tanto:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u((n+1)\mathrm{d}x) - u(n\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{d}x} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{31}$$

Este resultado es precisamente la definición de la función delta de Dirac para un modelo de CI. Por ende, la derivada de la función Heaviside es la función delta de Dirac, resultado fundamental de la teoría de las funciones no estándar, que se consigue luego de artificiosas y nada accesibles demostraciones desde la perspectiva de la teoría de distribuciones [86] [46] [93].

4) Integral de la Función delta de Dirac: Partiendo de la función presentada en la ecuación (22), se puede realizar la integral de la función delta de Dirac respecto a la variable x del modo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} \delta(n\mathrm{d}x)\mathrm{d}x = \delta(0)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1 \tag{32}$$

La simplicidad en la obtención de tan familiar resultado del estudio de las señales y los sistemas, contrasta con la complejidad de la teoría de las distribuciones [92] [86] o los artificios matemáticos que normalmente se requieren para demostrarlo [93] [96].

5) Propiedad de Selección: Un aspecto esencial en el estudio de las funciones no estándar, y por ende de las generalizadas, es la obtención de la integral del producto de la delta y sus derivadas, con funciones ordinarias. Se procede como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}x \sum_{n=-N}^{N} f(n\mathrm{d}x)\delta(n\mathrm{d}x) \\ &= \mathrm{d}x f(0)\frac{1}{\mathrm{d}x} = f(0) \end{aligned} \tag{33}$$

Este resultado es ampliamente conocido y utilizado en los cursos de SyS, y la versión de la delta de Dirac presentada en la ecuación (22) permite obtenerlo de una manera muy simple.

Para calcular los productos de las derivadas de la función delta de Dirac, se procede de manera análoga. Ya se presento el resultado de la primera derivada en la ecuación (25) y su gráfica en le Fig. 3. Para el producto con cualquier función $f(x)$, se requiere que esta última tenga derivada en $x = 0$. La gráfica presentada en la Fig. 4, muestra una función a la que se le interpone la derivada de la función delta de Dirac. Los únicos valores de $f(x)$ que sobreviven ante los dos impulsos son los ubicados en $-\mathrm{d}x$ y en 0, esto es, $f(-\mathrm{d}x)$ y $f(0)$.

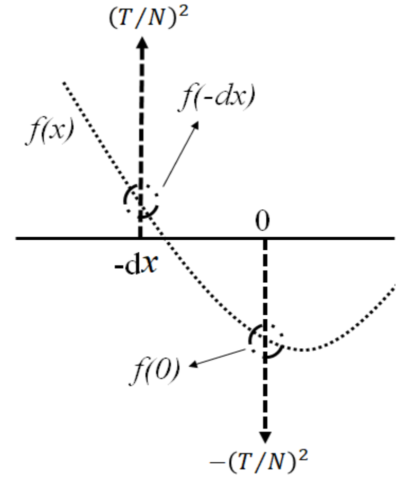

Fig. 4. Propiedad de selección de la primera derivada de la función delta de Dirac en el contexto del CI

Al realizar los cálculos de la integral infinitesimal, los valores valores serán afectados por los coeficientes de cada impulso. El resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{T} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{d}x \sum_{n=-N}^{N} f(n\mathrm{d}x)\delta'(n\mathrm{d}x) \\ &= \mathrm{d}x \left\{ f(-\mathrm{d}x)\delta'(-\mathrm{d}x) + f(0)\delta'(0) \right\} \\ &= \mathrm{d}x \left\{ \frac{f(-\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x^2} - \frac{f(0)}{\mathrm{d}x^2} \right\} \\ &= -\frac{f(0) - f(-\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} = -f'(0) \end{aligned} \tag{34}$$

Se trata de un resultado muy importante dentro de las propiedades del función delta de Dirac. Los cálculos anteriores pueden hacerse extensivos para derivadas de orden superior.

V. Convolución de Señales

La convolución de señales es uno de los conceptos más importantes que se enseña en los cursos de SyS, pues se utiliza de manera intensiva en la obtención de la salida temporal de un sistema, ante cualquier entrada arbitraria. De hecho, la salida de cualquier sistema se define como la convolución entre la señal de entrada y su respuesta el impulso. Lo que normalmente se hace en los cursos de SyS es presentar primero la convolución de TC, para luego presentar la versión de TD. Debido a que en el MC las variables se definen en principio como secuencias discretas, en este artículo se procede a desarrollar primero la versión discreta de la convolución, para luego proceder a establecer su versión continua de una manera muy sencilla.

A. Convolución Discreta

Para conseguir el objetivo didáctico planteado para esta propuesta educativa, primero se estudiaran la operación de convolución entre funciones de variables discretas, para luego, mediante el uso del MC, mostrar que coincide con la versión de DC.

Desde Wiener ya se había definido la convolución de sucesiones [97]. Actualmente, en varios libros se define la convolución de sucesiones finitas de valores reales, que no son otra cosa que funciones de DD. Tal operación se lleva a cabo como se procede a continuación. Se toman dos de tales sucesiones [98]:

$$\begin{aligned} &x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_N \\ &y_0, y_1, y_2, ..., y_m, ..., y_M \end{aligned} \tag{35}$$

donde $0 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq M$, y se define la convolución como una nueva sucesión:

$$\{z_n\} = \{x_n\} * \{y_n\} \tag{36}$$

conformada por los $N + M + 1$ términos:

$$z_k = \sum_n x_n y_{k-n} \tag{37}$$

donde cada uno de ellos se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 y_0 \\ z_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 \\ z_2 &= x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{38}$$

Los términos anteriores se obtienen de modo similar a los coeficientes del producto de dos polinomios, por lo que la convolución discreta se conoce también con el nombre de producto serial [99].

Obsérvese que la sucesión finita $\{y_{k-n}\}$ proviene de invertir el índice n de la sucesión $\{y_n\}$ desplazado hasta el índice k. Algunos autores ilustran que el cálculo de la convolución discreta se puede realizar así [99] [100]: la segunda sucesión invertida y desplazada se coloca encima de la primera y se realizan las operaciones.

B. Conversión del Discreto al Continuo

Se procede a demostrar a continuación que la convolución discreta es la misma convolución continua, desde el punto de vista del MC.

Se fija el intervalo $[-T, T]$, se toma un entero infinito N y se subdivide el intervalo en $2N$ partes iguales. Sea t la variable que cumple las condiciones:

$$\begin{aligned} t &= \{t_{-N}, ..., t_{-1}, t_0, t_1, ..., t_N\} \\ t_n &= n\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}t &= \frac{T}{N} \end{aligned} \tag{39}$$

para $-N \leq n \leq N$. Dadas las funciones $x(t)$, $y(t)$, se pueden representar como sucesiones de $2N + 1$ términos cuyos valores en la enésima posición n son:

$$\begin{aligned} x(t_n) = x_n = x(n\mathrm{d}t) \\ y(t_n) = y_n = y(n\mathrm{d}t) \end{aligned} \tag{40}$$

por tanto, se puede calcular la convolución discreta de las dos sucesiones de $2N + 1$ términos $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ siguiendo las reglas establecidas:

$$\begin{aligned} \{z_n\} &= \{x_n\} * \{y_n\} \\ z_n &= \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x_k y_{n-k} \end{aligned} \tag{41}$$

donde se sigue la notación convencional, multiplicando cada uno de los términos de la convolución discreta por el factor correspondiente, que en este caso es $1/2N$.

Luego, basados en el modelo de MC:

$$z\,(n\mathrm{d}t) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N}^{N-1} x(k\mathrm{d}t) y((n-k)\mathrm{d}t) \tag{42}$$

y reemplazando las variables $t = n\mathrm{d}t$, $s = k\mathrm{d}t$ y teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{2N} = \frac{1}{2T}\frac{T}{N} = \frac{1}{2T}\mathrm{d}t \tag{43}$$

se tiene nuevamente:

$$z\,(n\mathrm{d}t) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-N}^{N-1} x(k\mathrm{d}t) y((n-k)\mathrm{d}t)\mathrm{d}t \tag{44}$$

que es precisamente la integral de convolución para las funciones de TC [101]:

$$z\,(t) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(s) y(t-s)\mathrm{d}s \tag{45}$$

En el modelo MC, la convolución discreta, la convolución periódica y la convolución de tiempo continua son una sola, que asume diversas apariencias de acuerdo a las diversas escalas de las variables, sean éstas de escala finita o infinitesimal.

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó un modelo de cálculo infinitesimal, denominado MicroCálculo, el cual sirvió de base para presentar una forma novedosa para definir las señales y su correspondiente clasificación, primer tema fundamental de cualquier curso de Señales y Sistemas. Por su parte, el MicroCálculo también permitió un desarrollo didáctico pero riguroso de las denominadas señales especiales, como funciones generalizadas, que elimina la necesidad de usar la teoría de distribuciones para derivar sus propiedades y aplicaciones. Finalmente, se elaboró una forma unificada de la operación de convolución, partiendo de una versión discreta de la misma, y, mediante el uso del MicroCálculo se hace un desarrollo de la versión continua de la convolución.

En la parte II de este artículo, se presentará el desarrollo de todas las transformadas que se estudian en los cursos de

Señales y Sistemas, partiendo de la Transformada Discreta de Fourier hasta llegar a la Transformada Z, pasando por la Serie de Fourier, la Transformada de Fourier, la Transformada de Laplace, etc. La metodología utilizada consiste en construir la Transformada Discreta de Fourier de forma didactica, para luego deducir todas las demás entidades mediante el uso del CI, siguiendo la heurística propia de los libros más destacados en esta rama de la ingeniería, pero superando la ausencia de rigor y las inconsistencias lógicas que se acostumbran a tolerar en estos desarrollos, a cambio de la facilidad deductiva y explicativa que ofrecen para los fines prácticos de la ingeniería. El MC permite combinar la claridad y simplicidad de la heurística con el rigor de las matemáticas formales.

REFERENCIAS

[1] R. Salat, "Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal de cálculo,," Ph.D. dissertation, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, CINVESTAV, México, January 1993, depto. de Matemática Educativa,.

[2] L. Leithold, *El Cálculo*, 7th ed. México: Oxford University Press, 1998.

[3] T. M. Apostol, *Calculus*, 2nd ed. United State: John Wiley and Sons, 1967.

[4] G. B. Thomas, *Cálculo, Varias Variables*, 12th ed. México: Pearson Educación, 2010.

[5] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 7th ed. United States of America: John Wiley and Sons, 2001.

[6] D. G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 9th ed. United State: Brooks Cole, 2008.

[7] P. V. O'Neil, *Advanced Engineering Mathematics*, international edition ed. Canada: Cengage Learning, 2006.

[8] E. Kreyszig, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, 3rd ed. México: Editorial Limusa, 1998.

[9] K. A. Ross, *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*, 1st ed. United States of America: Springer, 2010.

[10] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed. United State: Addison-Wesley, 1981.

[11] C. Imaz, "Infinitesimal models for calculus," *Boletín Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 26, no. 2, 1984.

[12] M. E. Baron, *The Origins of Infinitesimal Calculus*, 1st ed. Oxford, England: Pergamon Press, 1969.

[13] H. J. M.Bos, *Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus*, 1st ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1975, vol. 14.

[14] L. Euler, *Introduction to Analysis of the Infinite*, 1st ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1990, vol. I.

[15] K. George, *Cálculo con Infinitesimales*, 1st ed. Santa Marta, Colombia: U. del Magdalena, 2001.

[16] C. Imaz-Jahnke and L. Moreno-Armella, "Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza," *El Cálculo y su Enseñanza*, vol. 1, pp. 99–112, 2009-2010.

[17] J. Sousa-Pinto, *Infinitesimal Methods of Mathematical Analysis*, 1st ed. West Sussex, England: Horwood Publishing, 2004.

[18] C. B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, 1st ed. New York, United States: Dover Publications, 1959.

[19] R. C. Buck, *Advanced Calculus*, 3rd ed. United States of America: McGraw-Hill Inc., 1978.

[20] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, 1st ed. New York, United State: Springer-Verlag, 1976.

[21] T. Dantzig, *Number: The Language of Science*, 1st ed. New York, United State: The Macmillan Pub., 1954.

[22] M. Perero, *Historia e historias de las matemáticas*, 1st ed. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

[23] R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, 1st ed. New York, United State: Dover Publications, Inc, 1963.

[24] G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, 1st ed. New York, United State: Dover Publications, Inc, 1955.

[25] I. Grattan-Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*, 1st ed. United States: MIT Press, 1970.

[26] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1st ed. England: Oxford University Press, 1972.

[27] J. Dauben, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysiss, A personal and Mathematical Odyssey*, 1st ed. United States of America: Princeton University Press, 1995.

[28] E. Nelson, "Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis," *Bolletin of the American Mathematical Society*, vol. 83, 1977.

[29] K. George-González, "Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales," *Revista Educación y Pedagogía*, vol. XV, no. 35, pp. 27–36, 2003.

[30] A. H. Zemanian, "Infinite electrical networks: A reprise," *lEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 35, no. 11, pp. 1346 – 1358, 1988.

[31] ——, "Nonstandard electrical networks and the resurrection of kirchhoff's laws," *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I*, vol. 44, no. 3, pp. 221 – 233, 1997.

[32] ——, "Transfinite electrical networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I*, vol. 46, no. 1, pp. 59 – 70, 1999.

[33] F. J. Barros, "On the representation of time in modeling and simulation," in *2016 Winter Simulation Conference (WSC)*, IEEE, Ed. Washington, DC, USA: IEEE, 12 2016.

[34] N. P. Hyun and E. I.Verriest, "Cause versus effect in hybrid systems: A rigorous non-standard analysis approach," *International Federation of Automatic Control (IFAC)*, vol. 48, no. 27, pp. 129–134, 2015.

[35] ——, "Causal modeling in impulsive systems: A new rigorous non-standard analysis approach," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 25, pp. 138–154, 2017.

[36] H. V. Dannon, "Space-time electrodynamics, and magnetic monopoles," *Gauge Institute Journal*, pp. 1–30, 2013.

[37] ——, "Feynman integral and convolution products," *Gauge Institute Journal*, vol. 5, no. 2, pp. 1–36, 2009.

[38] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. United State: McGraw-Hill, 2002.

[39] H. V. Dannon, "Infinitesimal calculus of random walk and poisson processes," *Gauge Institute Journal*, pp. 1–61, 2013.

[40] ——, "Infinitesimal calculus of random signals and white noise," *Gauge Institute Journal*, pp. 1–67, 2013.

[41] S. Haykin, *Communication Systems*, 4th ed. United States of America: John Wiley and Sons, 2001.

[42] J. Proakis, *Digital communications*, 4th ed. Boston, United States: McGraw-Hill, 2000.

[43] K. George-González, "Conversión del dominio discreto en dominio continuo: Otro enfoque de aprendizaje," *Escenarios, Universidad Autónoma del Caribe*, vol. 15, no. 1, pp. 160–168, 2017.

[44] R. M. Young, *Excursions in Calculus: An Interplay of the Continuous and the Discrete*, 1st ed. United States: The Mathematical Association of America, 1992.

[45] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, 1st ed. United States of America: Addison-Wesley, 1963.

[46] Y. Takeuchi, *Teoría defunciones no estándar*, 1st ed. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 1983.

[47] K. George-González and C. Imaz-Jahnke, "La delta de dirac como función," *Educación Matemática*, vol. 7, no. 3, pp. 48–57, 1995.

[48] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, 1st ed. England: Cambridge University Press, 1988.

[49] G. P. Tolstov, *Fourier Series*, 1st ed. New York, United State: Dover Publications, Inc, 1962.

[50] C. Lanczos, *Discourse on Fourier Series*, 1st ed. United State: Hafner Pub. Co., 1966.

[51] B. Ayazifar, "Rethinking fourier's legacy in signals and systems education," in *2011 IEEE International Symposium of Circuits and Systems (ISCAS)*. Rio de Janeiro, Brazil: IEEE, 5 2011, pp. 599 – 602.

[52] G. Castellanos-Domínguez and Y. Semenovich-Shinakov, *Análisis de Aleatoriedad en Señales y Sistemas*, 1st ed. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia, 2007.

[53] A. Restrepo-Palacios, *Fundamentos de la Teoría de Señales y Sistemas*, 2nd ed. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2012.

[54] B. Ayazifar, "The elegant geometry of fourier analysis," in *2012 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*. Seoul, Korea: IEEE, 5 2012, pp. 2933 – 2936.

[55] K. George-González, "El tránsito de la transformada discreta a la transformada integral de fourier," in *Memorias IX Reunión Centroamericana y del Caribe*, La Habana, Cuba, 8 1995.

[56] K. George-Gonzalez, "El cálculo discreto infinitesimal y la didáctica de la transformada de fourier," Ph.D. dissertation, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, CINVESTAV, México, January 1998, depto. de Matemática Educativa,.

[57] J. Cooley, P. Lewis, and P. Welch, "The finite fourier transform," *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, vol. 17, no. 2, pp. 77 – 85, 1969.

[58] C. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 2, pp. 447 – 457, 1998.

[59] K. George-González, *"La voz humana en el salón de clase con MATHEMATICA"*, 1st ed., ser. 32. México: CINVESTAV-IPN, 11 1995, cuadernos de Investigación.

[60] ——, "Los infinitesimales visitan a shannon," in *Memorias de la Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 16*, La Habana, Cuba, 7 2002.

[61] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, 1st ed. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1966.

[62] J. Stewart, *Calculo de una Variable: Trascendentes Tempranas*, 4th ed. México: Thomson International, 2002.

[63] W. A. J. Luxemburg, *Non-standard Analysis. Lectures on A. Robinson's Theory of Infinitesimal and Infinitely Large Numbers*, 1st ed. Pasadena: California Institute of Technology, 1962.

[64] J.-L. Lee, "On nonstandard reals and granular mathematics," in *2012 IEEE International Conference on Granular Computing*, IEEE, Ed. Hangzhou, China: IEEE, 8 2012.

[65] C. Imaz, "Una alternativa teórica al cálculo," *Investigaciones en Matemática Educativa*, pp. 17 – 26, 1996.

[66] H. V. Dannon, "Infinitesimals," *Gauge Institute Journal*, vol. 6, no. 4, pp. 1–34, 2010.

[67] ——, "Infinitesimal calculus," *Gauge Institute Journal*, vol. 7, no. 4, pp. 1–57, 2010.

[68] K. George-González, "Átomos y núcleos de infinitesimales," in *Memorias del 5º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, P. J. Rojas, Ed., Universidad de los Andes. Bucaramanga, Colombia: Grupo Editorial Gaia, 10 2003, pp. 16–20, 5º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

[69] J. M. Henle and E. M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, 1st ed. Mineola, New York: Dover Publications, INC., 1979.

[70] M. A. Pérez, *Instrumentación electrónica*, 1st ed. Madrid, España: Paraninfo, 2014.

[71] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. Hamid, *Signals and Systems*, 2nd ed. New York, NY, United States: Prentice-Hall, 1996.

[72] A. Creus-Sole, *Instrumentacion Industrial*, 8th ed. España: Alfaomega, 2005.

[73] M. J. Roberts, *Signals and Systems: Analysis Using Transform Methods and Matlab®*, 2nd ed. New York, NY, United States: McGraw-Hill, 2012.

[74] R. D. Strum and D. E. Kirk, "Linear systems: Be discrete-then continuous," *IEEE Trans. Education*, vol. 32, no. 3, pp. 335–342, 1989.

[75] P. Irarrázaval, *Análisis de señales*, 1st ed. Santiago de Chile, Chile: McGraw-Hill, 1999.

[76] E. Umez-Eronini, *Dinamica de sistemas y control*, 1st ed. México: Thomson, 2001.

[77] H. Ramírez, J. Jiménez-Cabas, and A. Bula, "Experimental data for an air-conditioning system identification," *Journal Data in Brief*, vol. 25, pp. 1 – 5, 2019.

[78] S. M. Lea and J. R. Burke, *Physics: The Nature of Things*, 1st ed. United States of America: Brooks/Cole Publishing Company, 1996.

[79] J. G. Proakis and D. K. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*, 3rd ed. New Jersey, United States: Prentice Hall, 1995.

[80] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. United State: Prentice Hall, 1999.

[81] F. Golnaraghi and B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, 9th ed. United State: John Wiley and Sons, 2009.

[82] A. Oppenheim and D. Johnson, "Discrete representation of signals," *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, no. 6, pp. 681 – 691, 1972.

[83] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*, 2nd ed. United State: The MIT Press, 2007.

[84] D. Hanselman, "Signals and linear systems: a teaching approach based on learning styles concepts," *IEEE Trans. Education*, vol. 35, no. 4, pp. 383 – 386, 1992.

[85] S. Haykin and B. V. Veen, *Signals and Systems*, 2nd ed. United States: John Wiley and Sons, 2003.

[86] Y. Takeuchi, "Funciones no-estándar y teoría de distribuciones," *Revista Colombiana de Matemáticas*, vol. 17, no. 3-4, pp. 117–151, 1983.

[87] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. United States of America: Prentice Hall, 2001.

[88] ——, *System Dynamics*, 4th ed. United States of America: Prentice Hall, 2003.

[89] B. P. Lathi and R. Green, *Linear systems and signals*, 3rd ed. United States of America: Oxford University Press, 2018.

[90] M. Nahvi, *Signals and Systems*, 1st ed. United States of America: McGraw-Hill, 2014.

[91] H. P. Hsu, *Schaum's outlines Signals and Systems*, 3rd ed. United States of America: McGraw-Hill, 2014.

[92] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, 1st ed. Paris, France: Dover Publications, INC., 1950.

[93] S. C. Gupta, "Delta function," *IEEE Transactions on Education*, vol. E-7, no. 1, pp. 16 – 22, 1964.

[94] P. Dirac, *The Principies of Quantum Mechanics*, 4th ed. England: Oxford at the Clarendon Press, 1958.

[95] H. V. Dannon, "The delta function," *Gauge Institute Journal*, vol. 8, no. 1, pp. 1–49, 2012.

[96] H. P. Hsu, *Análisis de Fourier*, 1st ed. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano, 1970.

[97] N. Wiener, *The Fourier Integral and certain of its applications*, 1st ed. England: Cambridge University Press, 1933.

[98] R. A. Gabel and R. A. Roberts, *Signals and Linear Systems*, 3rd ed. United State: John Wiley and Sons, 1986.

[99] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, 1st ed. New York, NY, United States: McGraw-Hill Book Company, 1965.

[100] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, 1st ed. New York, NY, United States: Prentice Hall, 1974.

[101] A. Papoulis, *Signal analysis*, 1st ed. United State: McGraw-Hill, 1977.

José L. Simancas-García (M'17) recibió su grado de Ingeniero Electrónico en la Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia, en 2006, y su grado de Magister en Ingeniería de la Universidad de la Costa, en Barranquilla, Colombia, en 2017, con énfasis en Ingeniería Industrial. Se desempeñó como profesor tiempo completo desde el 2009 al 2011 en la Universidad Antonio Nariño, Sede Barranquilla, Colombia. Desde el 2011 se ha desempeñado como profesor asistente en la Universidad de la Costa. Sus intereses son la Electrónica Analógica, la Teoría de Control, Sistemas Dinámicos, Señales y Sistemas, Procesamiento de Señales, y Electromagnetismo.

Kemel George-González recibió grado de Licenciado en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero, en México, grado de Magíster en Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, en México, en 1966, y grado de Doctor en Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, en México, en 1999. El Dr. George ha sido profesor de la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", en Bogotá, Colombia, durante los años 1974 - 1978, 1986 - 1996. Profesor de la Universidad del Magdalena, Santa Marta, Colombia, 2001 - 2004. Profesor de Universidad Tecnológica de Bolívar, en Cartagena, Colombia, 2004 - 2006. Y profesor de la Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla, Colombia, 2013 - 2018. En la actualidad dirige la Fundación Innovación y Conocimiento, en Barranquilla, Colombia.