

Implementation of a Distributed Optimal Predictive Control in a Quadruple Tank System

F. Pereyra, G. Valencia, N. Cazarez, *Senior Member, IEEE*, F. López, and B. González, *Member, IEEE*.

Abstract—This paper presents the development of a distributed optimal model predictive control (DOMPC) applied to a quadruple tank system. The DOMPC is based on an optimal model predictive control (OMPC) approach. In order to distribute the control laws, the DOMPC divide the controller in s local controllers. The local controllers are communicated by a local area network (LAN). For the control input calculation, it is assumed that this LAN introduces a delay of one sample. A Labview virtual instrument, that allows to implement and configure the DOMPC controller, is developed in order to apply the controller in a quadruple tank process. This virtual instrument uses an intuitive graphical interface to adjust the controller parameters and incorporates a simple but effective strategy to cope with information losses in the LAN. The development is a distributed scheme that has the benefit of coordinate the tasks from local controllers to achieve the global control objective. Finally, the results obtained are compared with a centralized OMPC in order to evaluate its performance and its applicability.

Index Terms—Predictive Control, Distributed Control, Package loss, Quadruple Tank System.

I. INTRODUCCIÓN

LOS sistemas a gran escala han sido de interés para la comunidad del área de control automático desde tiempo atrás [1], [2]. Una técnica de control que es muy prometedora en esta área es el Control Predictivo (MPC) [3], [4]. El MPC es una estrategia de control que se basa en el uso de un modelo de la planta para poder predecir su comportamiento en una ventana de tiempo futuro, llamado horizonte de predicción, y minimiza una función de costo para poder encontrar la secuencia óptima de entradas en un horizonte de control. De toda la secuencia futura de entradas, solamente se aplica la primera y las demás se descartan, repitiéndose el proceso en el siguiente instante de muestreo. Esta técnica es popular debido a que puede tomar en cuenta dinámicas complejas y multivariables, así como las restricciones físicas y de calidad del proceso. Tradicionalmente el MPC [3] fue aplicado a procesos lentos debido a que representa una gran carga computacional para poder resolver el problema de optimización en línea, el cual se hace más complejo cuando crece el número de variables

involucradas. Algunas aplicaciones recientes del MPC en el contexto latinoamericano son el control de un colector solar [5], un sistema de presión [6], el control de un horno rotatorio [7], entre otros.

Con el paso del tiempo su aplicabilidad ha sido posible con las mejoras tecnológicas y desarrollo de algoritmos más eficientes [8], [9], [10], sin embargo, aun hay varios problemas que impiden una exitosa implementación, por ejemplo: (i) aunque ha habido avances en los dispositivos de procesamiento, el problema de optimización no puede ser resuelto en tiempo para sistemas con un gran número de variables y se ha demostrado que la complejidad (carga computacional) de un problema centralizado escala mucho más rápido en contraste con un esquema de control distribuido [11]; (ii) algunos sistemas requieren ser flexibles y por lo tanto no es posible tener un modelo constante, tal es el caso de sistemas de control de edificios [12] y redes de distribución de energía [13], [14] donde hay varios dispositivos/usuarios que se conectan y/o desconectan del sistema durante su operación; (iii) puede haber limitaciones en el flujo de información (por ejemplo grandes retardos), especialmente en sistemas que tienen una extensión física muy grande por ejemplo en la distribución de agua [15], [16], cadenas de suministro [17], redes logísticas [18], [19], entre otros.

Para situaciones como las presentadas anteriormente, donde el MPC centralizado no es adecuado, el control distribuido puede ser considerado como una alternativa. El MPC distribuido es un esquema donde hay múltiples controladores MPC cada uno para un subsistema local y donde estos subsistemas interactúan entre sí. Cada MPC local se comporta como un controlador MPC centralizado pero considera la dinámica, restricciones y objetivos de control de los demás subsistemas. Para ello, cada controlador resuelve un problema de optimización con información local (MPC descentralizado) y pudiera intercambiar información con los otros controladores (MPC distribuido) para mejorar el desempeño global del sistema.

Se han desarrollado diversas técnicas de MPC distribuido [2]. Debido a la complejidad y variedad de sistemas a gran escala existen diferentes esquemas propuestos y no existe un esquema único o generalizado, cada uno está desarrollado haciendo consideraciones particulares para cada aplicación, e.g. [20], [21], [22]. Se pueden encontrar excelentes revisiones de literatura en [23], [24], donde se clasifican las ventajas y desventajas de cada uno de ellos. La tendencia en la investigación en sistemas de MPC distribuido es a considerar sistemas cada vez más grandes, llegando a tamaños como el de control de tráfico [11], distribución de agua [15], [16],

F.J. Pereyra, and N. Cazarez are with Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Tijuana, Calz. Tecnológico S/N, 22414, Tijuana, México. francisco.pereyra@tectijuana.edu.mx, nohe@tectijuana.edu.mx.

G. Valencia is with Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Hermosillo, Av. Tecnológico y Periférico Poniente, S/N, 83170, Hermosillo, Sonora, México. gvalencia@correo.ith.mx.

F. R. López is with Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, Carretera Panamericana, km 1080, C.P. 29050, A.P. 599, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. frlopez@ittg.edu.mx.

B. M. González is with Universidad Autónoma de Tlaxcala, Av. Universidad Núm. 1, 90070, Tlaxcala, México. brian.m.g@ieee.org.

distribución eléctrica [13], [14], entre otros.

En contra de la tendencia actual, el enfoque de este artículo es diferente, en el que se da énfasis a la implementación del algoritmo. Por lo que este artículo presenta el desarrollo de un controlador predictivo óptimo distribuido (DOMPC) aplicado a un sistema de cuatro tanques acoplados. El sistema de cuatro tanques acoplados fue originalmente concebido como una herramienta educacional para la enseñanza de técnicas de control multivariable [25] y también ha sido utilizado como una planta demostrativa para la evaluación de diferentes controladores incluyendo control de modos deslizantes [26], control de modelo interno [27], control de matriz dinámica [28], control robusto [29] y MPC distribuido [30], [31]. De la misma forma que en [31], el modelo del sistema se particiona en dos subsistemas que cuentan con dos controladores OMPC locales que intercambian información en una red de área local (LAN) y considera el retardo de una muestra. Pero, a diferencia de [31], en este artículo se aborda el problema de pérdida de información en el canal de comunicación, proponiendo el uso de la información calculada en el instante previo a la pérdida de datos resultando en una solución sencilla y eficaz. Finalmente, este desarrollo se valida de forma experimental para lo cual se desarrolla una plataforma en Labview que permite su implementación.

El artículo está dividido de la siguiente forma: en la Sección II se presentan las bases teóricas del control predictivo óptimo (OMPC); en la Sección III se presenta el control predictivo óptimo distribuido (DOMPC); la Sección IV describe el sistema de cuatro tanques acoplados; la Sección V describe la implementación en Labview del controlador y los resultados obtenidos; finalmente, la Sección VI presenta las conclusiones.

II. CONTROL PREDICTIVO ÓPTIMO (OMPC)

Asuma un modelo estándar en espacio de estado de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k; \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas y $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas del sistema; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} son matrices de dimensión apropiada que completan la descripción del sistema.

Para poder regular el sistema a una referencia deseada es necesario calcular el estado estable [32], [3]. La ley de control estabilizante está basada en una ganancia de retroalimentación LQ, de modo que, asumiendo que \mathbf{K} es la ganancia de retroalimentación, las entradas están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+i} - \mathbf{u}_{ss} &= \\ &\begin{cases} -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+i} - \mathbf{x}_{ss}) + \mathbf{c}_{k+i}; & i \in \{0, \dots, n_c - 1\} \\ -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{k+i} - \mathbf{x}_{ss}); & i \in \{n_c, n_c + 1, \dots\} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

donde las perturbaciones \mathbf{c}_k son los grados de libertad del problema de optimización que garantizan la satisfacción de las restricciones; convenientemente acomodados en el vector $\underline{\mathbf{c}}_k = [\mathbf{c}_k^T \dots \mathbf{c}_{k+n_c-1}^T]^T$ con n_c definido como el horizonte de control. \mathbf{x}_{ss} y \mathbf{u}_{ss} son los valores de estado estable del sistema, los cuales se obtienen a partir de:

$$\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{P}_x \mathbf{r}_k; \quad \mathbf{u}_{ss} = \mathbf{P}_u \mathbf{r}_k; \quad (3)$$

donde $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^p$ es la referencia y los detalles para la obtención de \mathbf{P}_x y \mathbf{P}_u se muestran a detalle en [32]. Usando (2), el modelo utilizado para desarrollar las predicciones es:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k; \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K} \mathbf{x}_k + \mathbf{P}_r \mathbf{r}_k + \mathbf{c}_k; \quad (5)$$

donde $\Phi = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ y $\mathbf{P}_r = \mathbf{K}\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_u$. Las ecuaciones de predicción se obtienen iterando sobre el modelo, obteniéndose:

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \mathbf{P}_{cl} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_c \underline{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{P}_{rx} \mathbf{r}_k; \quad (6)$$

$$\underline{\mathbf{y}}_k = \mathbf{P}_{cly} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{cy} \underline{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{P}_{ry} \mathbf{r}_k;$$

$$\underline{\mathbf{u}}_k = \mathbf{P}_{clu} \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_{cu} \underline{\mathbf{c}}_{k-1} + \mathbf{P}_{ru} \mathbf{r}_k;$$

$$\underline{\Delta \mathbf{u}}_k = \mathbf{P}_{\Delta u} \mathbf{x}_k - \mathbf{P}_{u_{k-1}} \mathbf{u}_{k-1};$$

donde, $\underline{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^{n \cdot n_p}$, $\underline{\mathbf{y}}_k \in \mathbb{R}^{p \cdot n_p}$ y $\underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\Delta \mathbf{u}}_k \in \mathbb{R}^{m \cdot n_p}$, que son las predicciones de los estados, las salidas, las entradas y los incrementos de las entradas respectivamente y n_p es el horizonte de predicción. El detalle de las matrices de predicción están en el Apéndice A.

A. Función de Costo

Considerando la función de costo con horizontes infinitos

$$J = \sum_{j=0}^{\infty} [\mathbf{x}_{k+j+1}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+j+1} + \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j}]; \quad (7)$$

con $\mathbf{Q} > 0$ y $\mathbf{R} > 0$. Expresando en términos de la variable de decisión, \mathbf{c}_k ,

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{x}_k^T \mathbf{P} \mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^{n_c-1} \mathbf{c}_{k+j}^T [\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R}] \mathbf{c}_{k+j}; \\ &= \underline{\mathbf{c}}_k^T \mathbf{W} \underline{\mathbf{c}}_k; \end{aligned} \quad (8)$$

donde, $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{R})$, $\mathbf{R} > 0$, $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} > 0$, $\mathbf{W} > 0$. \mathbf{P} se obtiene mediante la solución a la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\Phi^T \mathbf{P} \Phi = \mathbf{P} - \Phi^T \mathbf{Q} \Phi - \mathbf{K}^T \mathbf{P} \mathbf{K}; \quad (9)$$

donde $\mathbf{P} \geq 0$ y $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$.

B. Restricciones

Las restricciones son cotas que ayudan a mantener al proceso dentro de ciertos límites de operación permitidos o deseados. Las restricciones tienen la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = \mathbf{x} : \mathbf{A}_x \mathbf{x} &\leq \mathbf{b}_x; \\ \mathcal{Y} = \mathbf{y} : \mathbf{A}_y \mathbf{y} &\leq \mathbf{b}_y; \\ \mathcal{U} = \mathbf{u} : \mathbf{A}_u \mathbf{u} &\leq \mathbf{b}_u; \\ \Delta \mathcal{U} = \mathbf{x} : \mathbf{A}_{\Delta u} \Delta \mathbf{u} &\leq \mathbf{b}_{\Delta u}. \end{aligned} \quad (10)$$

Se sabe que para una \mathbf{M}_c y \mathbf{q}_c adecuada, las predicciones de entrada (2) y las predicciones del modelo (4)-(5) satisfacen las restricciones (10) si,

$$\mathbf{M}_c \underline{\mathbf{c}}_k \leq \mathbf{q}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{r}_k). \quad (11)$$

C. Ley de Control

Con la función de costo (8) y las restricciones (11) se obtiene el siguiente problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}_{\rightarrow k-1}^* &= \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_{\rightarrow k-1}} \underline{\mathbf{c}}_{\rightarrow k}^T \mathbf{W} \underline{\mathbf{c}}_{\rightarrow k} \\ \text{s.a. } \mathbf{M}_c \underline{\mathbf{c}}_{\rightarrow k} &\leq \mathbf{q}_c(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{r}_k). \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, la ley de control se forma por:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}\mathbf{x}_k + \mathbf{c}_k^* + \mathbf{P}_r \mathbf{r}_k. \quad (13)$$

Donde el término \mathbf{c}_k^* es el primer elemento del vector $\underline{\mathbf{c}}_{\rightarrow k}^*$.

Observación 1. En el caso nominal el controlador OMPC es estable en lazo cerrado y puede probarse mostrando que la función de costo J (12) es una función de Lyapunov y que para cada instante de muestreo k , la trayectoria calculada en el instante anterior puede reutilizarse.

Observación 2. El OMPC es un controlador de tipo centralizado que toma en cuenta el comportamiento de la planta de forma global, sin embargo, en plantas de gran tamaño es impráctico, se requiere de un alto poder computacional y cualquier fallo repercute de forma significativa en el desempeño de la planta y podría originar el paro total de la planta.

III. CONTROL PREDICTIVO ÓPTIMO DISTRIBUIDO (DOMPC)

Una forma de solucionar la desventaja de los controladores centralizados, principalmente problemas de complejidad computacional, es distribuir la carga en diferentes subcontroladores que trabajen en conjunto para lograr el objetivo global. Los subsistemas comparten información de sus variables y toman en cuenta todas las interacciones entre ellos.

El desarrollo del control predictivo distribuido (DOMPC) parte del modelo centralizado. Considerando un número s de subsistemas se obtiene el modelo distribuido para cada uno. El modelo de cada subsistema incluye un vector de compensación. Para el diseño del controlador se toman las siguientes suposiciones:

- 1) Los controladores son síncronos.
- 2) Los controladores están conectados a una red local, la cual introduce un retardo de un instante de muestreo.
- 3) Los horizontes de control y predicciones son iguales para cada subsistema.

De la representación en espacio de estados, el sistema de particiona en s submodelos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{s,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{s,k} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{s,k} \end{bmatrix}; \quad (14) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1,k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{s,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{s1} & \cdots & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{s,k} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La entrada se define como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1,k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{s,k+1} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \cdots & \mathbf{K}_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{s1} & \cdots & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{s,k} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{r11} & \cdots & \mathbf{P}_{r1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{rs1} & \cdots & \mathbf{P}_{rss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{s,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,k} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{s,k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

El modelo usado para las predicciones tomando en cuenta la estructura de la ley de control (15) es,

$$\mathbf{x}_{i,k+1} = \Phi_{ii} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{B}_{ii} \mathbf{c}_{i,k} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rDii} \mathbf{r}_{i,k} + \mathbf{w}_{i,k}; \quad (16)$$

$$\mathbf{y}_{i,k} = \mathbf{C}_{ii} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{v}_{i,k}; \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_{i,k} = -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{c}_{i,k} + \mathbf{P}_{rii} \mathbf{r}_{i,k} + \mathbf{h}_{i,k}; \quad (18)$$

donde $\Phi_{ii} = \mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{Dii}$, $\mathbf{B} \mathbf{K}_{Dii} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{K}_{pi}$, $\mathbf{B} \mathbf{P}_{rDii} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{P}_{rpi}$ y $i = 1, \dots, s$, donde s representa al número de subsistemas que componen el proceso. $\mathbf{x}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{u}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i}$ y $\mathbf{y}_{i,k} \in \mathbb{R}^{p_i}$ son el estado, entradas y salidas de control del sistema i ; $\mathbf{r}_{i,k} \in \mathbb{R}^{p_i}$ and $\mathbf{c}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i}$ son las referencias y compensaciones óptimas para cada uno de los subsistemas; y $\mathbf{w}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\mathbf{v}_{i,k} \in \mathbb{R}^{p_i}$, $\mathbf{h}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i}$ son los vectores de interacción de estado, salida y entrada del subsistema i respectivamente.

Los vectores de interacción para cada subsistema son:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{i,k} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s \Phi_{ij} \mathbf{x}_{j,k} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{B}_{ij} \mathbf{c}_{j,k} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{B} \mathbf{P}_{rDij} \mathbf{r}_{j,k}; \\ \mathbf{v}_{i,k} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{C}_{ij} \mathbf{x}_{j,k}; \\ \mathbf{h}_{i,k} &= \sum_{j=1; j \neq i}^s -\mathbf{K}_{i,j} \mathbf{x}_{j,k} + \sum_{j=1; j \neq i}^s \mathbf{P}_{rij} \mathbf{r}_{j,k}; \end{aligned} \quad (19)$$

donde $\Phi_{ij} = \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{B} \mathbf{K}_{Dij}$, $\mathbf{B} \mathbf{K}_{Dij} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{K}_{pj}$, $\mathbf{B} \mathbf{P}_{rDij} = \sum_{p=1}^s \mathbf{B}_{ip} \mathbf{P}_{rpi}$.

Iterando sobre el modelo (16)-(18) se obtienen las ecuaciones de predicción:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{cli} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{H}_{ci} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rxi} \mathbf{r}_{i,k} + \mathbf{W}_{cli} \underline{\mathbf{w}}_{i,k}; \\ \underline{\mathbf{y}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{clyi} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{H}_{cyi} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{ryi} \mathbf{r}_{i,k} \\ &+ \mathbf{W}_{clyi} \mathbf{w}_{i,k} + \underline{\mathbf{v}}_{i,k}; \\ \underline{\mathbf{u}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{clui} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{H}_{cui} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{P}_{ruui} \mathbf{r}_{i,k} \\ &+ \mathbf{W}_{clui} \mathbf{w}_{i,k} + \underline{\mathbf{h}}_{i,k}; \\ \underline{\Delta \mathbf{u}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{\Delta ui} \mathbf{u}_{i,k} - \mathbf{P}_{u_{i,k-1}} \mathbf{u}_{i,k-1}; \end{aligned} \quad (20)$$

donde $\underline{\mathbf{x}}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_i \cdot n_{pi}}$, $\underline{\mathbf{y}}_{i,k} \in \mathbb{R}^{p_i \cdot n_{ci}}$, $\underline{\mathbf{u}}_{i,k}, \underline{\Delta \mathbf{u}}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i \cdot n_{pi}}$ y el vector de compensación $\mathbf{c}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i \cdot n_{ci}}$. Estos vectores están compuestos de la siguiente manera: $\underline{\mathbf{x}}_{i,k} = [\mathbf{x}_{i,k}^T, \dots, \mathbf{x}_{i,k+n_{pi}}^T]^T$, $\underline{\mathbf{y}}_{i,k} = [\mathbf{y}_{i,k}^T, \dots, \mathbf{y}_{i,k+n_{pi}}^T]^T$, $\underline{\mathbf{u}}_{i,k} = [\mathbf{u}_{i,k}^T, \dots, \mathbf{u}_{i,k+n_{pi}}^T]^T$, $\underline{\Delta \mathbf{u}}_{i,k} = [\Delta \mathbf{u}_{i,k}^T, \dots, \Delta \mathbf{u}_{i,k+n_{pi}}^T]^T$ and $\underline{\mathbf{c}}_{i,k} = [\mathbf{c}_{i,k}^T, \dots, \mathbf{c}_{i,k+n_{ci}-1}^T]^T$. Las predicciones de los

vectores de interacción que consideran el retardo de un instante de muestreo son:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{w}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{clwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}; \\ \underline{\mathbf{v}}_{i,k} &= \mathbf{C}_{vi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1}; \\ \underline{\mathbf{h}}_{i,k} &= \mathbf{K}_{hwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{rhi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1};\end{aligned}\quad (21)$$

donde $\underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{s \cdot n_i \cdot n_{pi}}$ es el vector de estados de interacción total, $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{s \cdot m_i \cdot n_{ci}}$ es el vector de compensación óptima de interacción total, $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} \in \mathbb{R}^{s \cdot p_i \cdot n_{pi}}$ es el vector de interacciones de referencias totales. Estos vectores están constituidos de la siguiente forma: $\underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} = [\underline{\mathbf{x}}_{1k|k-1}^T, \dots, \underline{\mathbf{x}}_{sk|k-1}^T]^T$, $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} = [\underline{\mathbf{c}}_{1k|k-1}^T, \dots, \underline{\mathbf{c}}_{sk|k-1}^T]^T$, $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} = [\underline{\mathbf{r}}_{1k|k-1}^T, \dots, \underline{\mathbf{r}}_{sk|k-1}^T]^T$. Todos estos vectores de interacción tienen la información atrasada en un instante de muestreo ($k-1$). Finalmente, sustituyendo los vectores de interacción (21) en (20), se obtiene:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{cli} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{H}_{ci} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{rxi} \mathbf{r}_{i,k} + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{P}_{clwi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{cli} \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}; \\ \underline{\mathbf{y}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{clyi} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{H}_{cyi} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{B} \mathbf{P}_{ryi} \mathbf{r}_{i,k} + \mathbf{P}_{wvvyi} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{clyi} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_{clyi} \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}; \\ \underline{\mathbf{u}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{clui} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{H}_{cui} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{P}_{rui} \mathbf{r}_{i,k} + \mathbf{P}_{wkui} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{W}_{clui} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} + \mathbf{R}_{prwhi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}; \\ \underline{\Delta \mathbf{u}}_{i,k} &= \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{P}_{clui} \mathbf{x}_{i,k} + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{H}_{cui} \underline{\mathbf{c}}_{i,k} + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{P}_{rui} \mathbf{r}_{i,k} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{P}_{wkui} \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{W}_{clui} \mathbf{H}_{uwi} \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1} \\ &\quad + \mathbf{P}_{\Delta u_i} \mathbf{R}_{prwhi} \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{u_{i,k-1}} \mathbf{u}_{i,k-1};\end{aligned}\quad (22)$$

donde $\mathbf{P}_{cwvvyi} = \mathbf{W}_{clyi} \mathbf{P}_{clwi} + \mathbf{C}_{vi}$, $\mathbf{P}_{wkui} = \mathbf{W}_{clui} \mathbf{P}_{clwi} + \mathbf{K}_{hwi}$, $\mathbf{R}_{prwhi} = \mathbf{W}_{clui} \mathbf{B} \mathbf{P}_{rwi} + \mathbf{P}_{rhi}$. El detalle de las matrices de predicción están en el Apéndice B.

A. Definición de la Función de Costo Distribuida

La función de costo para el esquema distribuido es similar al esquema centralizado pero aplicada a cada subsistema i ,

$$J_i = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_{i,k+j+1}^T \mathbf{Q}_{ii} \mathbf{x}_{i,k+j+1} + \mathbf{u}_{i,k+j}^T \mathbf{R}_{ii} \mathbf{u}_{i,k+j}. \quad (23)$$

con \mathbf{Q}_{ii} , \mathbf{R}_{ii} definidas positivas. Expresando la función de costo en términos de la variable $\underline{\mathbf{c}}_{i,k}$,

$$\begin{aligned}J_i &= \mathbf{x}_{i,k}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{x}_{i,k} + \sum_{j=0}^{n_c-1} \underline{\mathbf{c}}_{i,k+j}^T [\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii}] \underline{\mathbf{c}}_{i,k+j}; \\ &= \underline{\mathbf{c}}_{i,k-1}^T \mathbf{W}_{ii} \underline{\mathbf{c}}_{i,k-1};\end{aligned}\quad (24)$$

donde $\mathbf{W}_{ii} = \text{diag}(\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} + \mathbf{R}_{ii})$, con $\mathbf{R}_{ii} > 0$ $\mathbf{B}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{B}_{ii} > 0$. Cada subsistema tiene una matriz \mathbf{P}_{ii} que se calcula a partir de la solución de la ecuación de Lyapunov,

$$\Phi_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \Phi_{ii} = \mathbf{P}_{ii} - \Phi_{ii}^T \mathbf{Q}_{ii} \Phi_{ii} - \mathbf{K}_{ii}^T \mathbf{P}_{ii} \mathbf{K}_{ii}; \quad (25)$$

donde $\mathbf{P}_{ii} \geq 0$ y $\mathbf{P}_{ii}^T = \mathbf{P}_{ii}$.

B. Restricciones Distribuidas

Cada subsistema tendrá un conjunto de restricciones de la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_i &= \mathbf{x}_i : \mathbf{A}_{x_i} \mathbf{x}_i \leq \mathbf{b}_{x_i}; \\ \mathcal{Y}_i &= \mathbf{y}_i : \mathbf{A}_{y_i} \mathbf{y}_i \leq \mathbf{b}_{y_i}; \\ \mathcal{U}_i &= \mathbf{u}_i : \mathbf{A}_{u_i} \mathbf{u}_i \leq \mathbf{b}_{u_i}; \\ \Delta \mathcal{U}_i &= \Delta \mathbf{u}_i : \mathbf{A}_{\Delta u_i} \Delta \mathbf{u}_i \leq \mathbf{b}_{\Delta u_i};\end{aligned}\quad (26)$$

pero en este caso, deberán también cumplir con las restricciones globales del sistema por lo que las restricciones también dependen del valor de los estados, entradas y referencias de los demás subsistemas y que son compartidos en la red, por tanto, las restricciones tienen la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{c_i} \underline{\mathbf{c}}_{i,k-1} &\leq \\ \mathbf{q}_{c_i}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k-1}, \mathbf{r}_{i,k}, \underline{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \underline{\mathbf{C}}_{k|k-1}, \underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}),\end{aligned}\quad (27)$$

donde $\underline{\mathbf{X}}_{k|k-1}$, $\underline{\mathbf{C}}_{k|k-1}$ y $\underline{\mathbf{R}}_{k|k-1}$ son los vectores totales de predicción, formados por la concatenación de los estados $\underline{\mathbf{x}}_{i,k|k-1}$, compensación $\underline{\mathbf{c}}_{i,k|k-1}$ y regulación $\underline{\mathbf{r}}_{i,k|k-1}$ provenientes de la interacción de los otros subcontroladores.

C. Ley de Control

Finalmente, la ley de control para cada subcontrolador, puede ser calculada resolviendo el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{c}}_{i,k-1}^* &= \arg \min_{\underline{\mathbf{c}}_{i,k-1}} \underline{\mathbf{c}}_{i,k-1}^T \mathbf{W}_{ii} \underline{\mathbf{c}}_{i,k-1}; \\ &\text{s.a. (27)}.\end{aligned}\quad (28)$$

y sustituyendo el primer elemento de $\underline{\mathbf{c}}_{i,k-1}^*$, que es $\mathbf{c}_{i,k-1}^*$, en

$$\mathbf{u}_{i,k} = -\mathbf{K}_{ii} \mathbf{x}_{i,k+i} + \mathbf{c}_{i,k}^* + \mathbf{P}_{rii} \mathbf{r}_{i,k}. \quad (29)$$

Observación 3. Al igual que en el caso centralizado el controlador DOMPC es estable en lazo cerrado en el caso nominal y puede probarse mostrando que la función de costo J (28) es una función de Lyapunov y que para cada instante de muestreo k la trayectoria calculada en el instante anterior puede reutilizarse.

Observación 4. En el caso de que hubiera alguna pérdida de datos ocasionada por el canal de comunicaciones, la recursibilidad de la ley de control puede hacerse efectiva. Es decir, si no se puede calcular la ley de control se usa el siguiente incremento calculado en el instante anterior. Sin embargo, esto origina la pérdida de invarianza de la región factible del problema de optimización (28), por lo que la estabilidad no puede ser garantizada. Para asegurarlo, se requerirían estrategias de control más elaboradas no tratadas en este artículo. Como nota adicional, el que la estabilidad no se pueda garantizar, no implica que el sistema se vuelva inestable. De hecho en la práctica, es común que se emplee el MPC sin garantías de estabilidad [33].

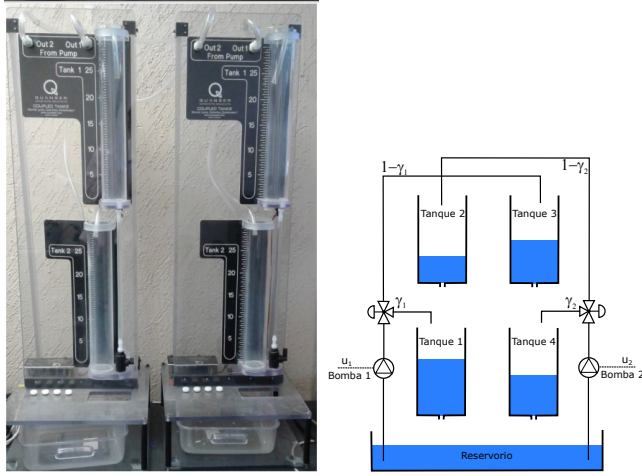


Fig. 1. Sistema de cuatro tanques acoplados (izquierda) y su diagrama esquemático (derecha).

IV. SISTEMA DE CUATRO TANQUES ACOPLADOS

El sistema de cuatro tanques acoplados fue diseñado por Johansson [34] para la enseñanza de control multivariable, con la opción de trabajar en fase mínima y no mínima mediante la configuración de dos válvulas de distribución. El sistema presenta interacción entre sus estados y entradas y, por su estructura, es adecuado para aplicar estrategias de control distribuido. El sistema consiste en cuatro tanques interconectados, dos bombas y dos válvulas de tres vías, como se muestra en la Fig. 1. El objetivo del sistema es controlar el nivel de los tanques inferiores mediante la manipulación de los voltajes de las bombas.

A. Modelado del Sistema

Para obtener el modelo del comportamiento del sistema se utiliza la mecánica de fluidos y la ley de conservación de la masa (los detalles se muestran en el Apéndice C), obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{dh_1(t)}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1(t)} + \frac{a_2}{A_1} \sqrt{2gh_2(t)} + \frac{\gamma_1 k_1 v_1}{A_1}; \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2(t)} + \frac{(1-\gamma_2) k_2 v_2}{A_2}; \\ \frac{dh_3(t)}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3(t)} + \frac{(1-\gamma_1) k_1 v_1}{A_3}; \\ \frac{dh_4(t)}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4(t)} + \frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_3(t)} + \frac{\gamma_2 k_2 v_2}{A_4}; \end{aligned} \quad (30)$$

donde A_i , $\forall i = 1, \dots, 4$ es el área transversal del Tanque i , a_i es el área transversal del orificio de salida i , h_i es el nivel de líquido en el Tanque i y g es la constante de aceleración de la gravedad. El voltaje aplicado a las bombas son v_1, v_2 y k_1, k_2 son las ganancias de las bombas. Los parámetros γ_1, γ_2 son los factores de apertura de las válvulas y se fijan antes de realizar los experimentos. Por lo tanto, el flujo al Tanque 1 es $v_1 k_1 \gamma_1$, el flujo al Tanque 2 es $v_2 k_2 (1 - \gamma_2)$ y de forma similar los flujos al Tanque 3 y 4.

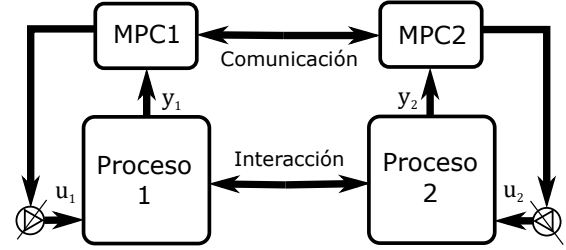


Fig. 2. División del sistema de cuatro tanques acoplados.

Si se define $x_i = h_i - h_i^0$, $u_1 = v_1 - v_1^0$ y $u_2 = v_2 - v_2^0$ el modelo linealizado se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{A_2}{A_1 T_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_3}{A_4 T_3} & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2) k_2}{A_2} \\ \frac{(1-\gamma_1) k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_4} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t); \quad (31) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} \mathbf{x}(t); \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $T_i = \sqrt{2h_i^0 \frac{A_i}{a_i}} \geq 0$ son las constantes de tiempo del sistema y k_c es la ganancia del sensor de nivel.

El sistema es estable en lazo abierto con ceros de transmisión, que pueden ser ajustados para operar en ambos semiplanos complejos, en el izquierdo (fase mínima) y en el derecho (fase no mínima) dependiendo de la relación de flujo de alimentación a los tanques superiores e inferiores. La posición de los ceros la determinan los parámetros γ_1 y γ_2 de la siguiente manera:

- Si $0 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 1$, el sistema es de fase no mínima.
- Si $1 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$, el sistema es de fase mínima.

B. Partición del Modelo del Sistema

Para la aplicación del DOMPC el sistema debe de ser particionado en dos subsistemas como se muestra en la Fig. 2. Dicha división se puede hacer de dos formas de acuerdo al tipo de interacción:

- 1) Entradas: El subsistema 1 consta del Tanque 1 y 3 alimentados con la Bomba 1; y el subsistema 2 del Tanque 2 y 4 alimentados por la Bomba 2.
- 2) Estados: El subsistema 1 consta del Tanque 1 y 2 alimentados por la Bomba 1; y el subsistema 2 del Tanque 3 y 4 alimentado por la Bomba 2.

La selección se basa en el arreglo de ganancias relativas (RGA) del sistema que mide la interacción del sistema. Este análisis arroja que la estructura de 'Interacción de Entradas' tiene una mejor sensibilidad entrada-salida. Esto permite al sistema dividir el modelo (31) en la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t); \quad (32)$$

TABLA I
PARÁMETROS DEL SISTEMA DE CUATRO TANQUES

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Alturas 1 y 2	h_1^0, h_2^0	6.03, 0.65	cm
Alturas 3 y 4	h_3^0, h_4^0	0.78, 6.67	cm
Voltaje de las bombas 1 y 2	v_1^0, v_2^0	6	V
Ganancia de las bombas	k_1, k_2	3.33	cm^3/Vs
Coefficientes de válvula	γ_1, γ_2	0.65, 0.68	
Área tanques	A_1, A_2, A_3, A_4	15.55	cm^2
Restricción de salida	a_1, a_2, a_3, a_4	0.1781	cm^2
Ganancia del sensor de nivel	k_c	0.5	V/cm
Constante gravitacional	g	981	cm/s^2

obteniendo las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{A_2}{A_1 T_2} \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}; & \mathbf{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_3} & 0 \\ \frac{A_3}{A_4 T_3} & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}_{12} &= \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & (33) \\ \mathbf{B}_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} \\ 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{B}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_2} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_3} \\ 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{B}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(\gamma_2)k_2}{A_4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como se aprecia, los subsistemas interactúan a través de la entrada.

Los subsistemas quedan definidos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_{s1}(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_{s1}(t) + \mathbf{B}_{11}u_1(t) + \mathbf{B}_{12}u_2(t); \\ y_{s1} &= [k_c \ 0] \mathbf{x}_{s1}(t); \\ \frac{d\mathbf{x}_{s2}(t)}{dt} &= \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_{s2}(t) + \mathbf{B}_{21}u_1(t) + \mathbf{B}_{22}u_2(t); \\ y_{s2} &= [0 \ k_c] \mathbf{x}_{s2}(t); \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}_{s1} = [x_1 \ x_2]^T$ y $\mathbf{x}_{s2} = [x_3 \ x_4]^T$.

C. Validación del Modelo

Los parámetros referentes a las dimensiones físicas del sistema, así como las ganancias de los actuadores y sensores fueron proporcionados por el fabricante y se muestran en la Tabla I. Para la validación del modelo es necesario recabar información de las tasas de cambio de los flujos de entrada y salida de los tanques, así como el nivel generado por diferentes voltajes aplicados a las bombas. Estos niveles se miden con sensores de presión hidrostática ubicados en la parte inferior de los tanques.

La primera prueba tiene la finalidad de determinar los diferentes estados estables de forma experimental para determinar el punto de operación en las siguientes pruebas. La prueba consiste en aplicar un voltaje fijo a cada bomba, permitir al sistema llegar al punto de equilibrio y verificar los niveles de los tanques. Los resultados se muestran en la Tabla II. El punto de operación seleccionado es el que se logra con una entrada de 6V aplicado en ambas bombas, ya que con esta entrada se tienen niveles que permiten operar al sistema en un rango seguro, sin el riesgo de vaciarse o sobrepasarse durante un experimento. La Fig. 3 muestra la dinámica del sistema, aplicando una entrada de 6V, obteniendo los niveles 5.91 cm y 6.67 cm en los Tanques 1 y 4 respectivamente.

TABLA II
NIVEL EN LOS TANQUES INFERIORES

Entrada u_1, u_2 (V)	Tanque 1 (cm)	Tanque 4 (cm)
3	1.47	1.64
4	2.63	2.94
5	4.10	4.61
6	5.91	6.67
7	8.04	9.01

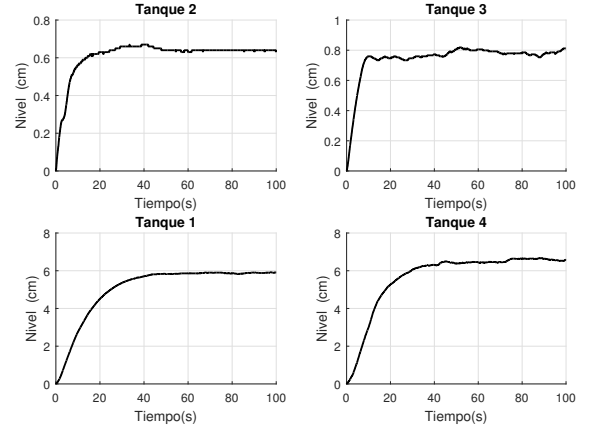


Fig. 3. Estado transitorio de la planta.

La siguiente prueba se aplica un voltaje inicial de 6V a cada bomba. Se permite que el sistema llegue al punto de equilibrio y se mantiene por 1 minuto. Al llegar al estado estable se aplica un escalón adicional de 1V en las entradas. Diez segundos después, se reducen las entradas a la mitad del escalón aplicado. Lo anterior se aplica para analizar el error del modelo matemático. La Fig. 4 muestra la comparación entre el modelo matemático y la prueba experimental. El error cuadrático medio (ECM) es una medida que permite evaluar el error que existe entre el modelo linealizado y la planta, y de esta manera formalizar la comparativa mediante la obtención del promedio de la diferencia de los valores medidos y calculados. El ECM se define como,

$$ECM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2. \quad (34)$$

Con base en la información obtenida durante la segunda prueba, se obtienen los resultados mostrados en la Tabla III. Estos valores muestran que el modelo matemático es adecuado para el MPC.

TABLA III
ERROR CUADRÁTICO MEDIO (ECM) DEL MODELO Y DE LA PLANTA.

Tanque	ECM (cm^2)
1	1.1806
2	0.0086
3	0.0162
4	1.2134

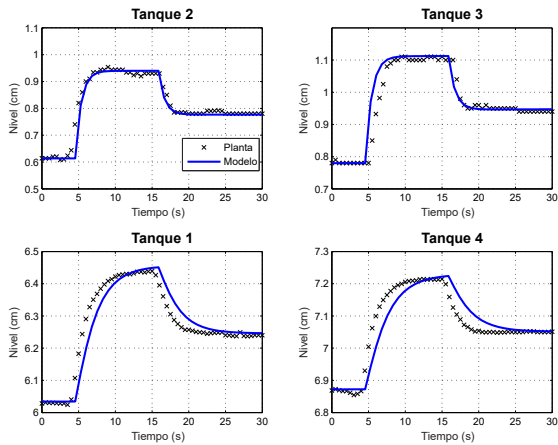


Fig. 4. Comparación de la respuesta experimental y la respuesta del modelo matemático.

V. IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

El sistema experimental de cuatro tanques es un arreglo hecho apartir de dos sistemas de dos tanques acoplados de la marca Quanser. El arreglo final es mostrado en la Fig. 1. Las entradas son voltajes de corriente directa que controlan a las bombas de agua y los niveles de agua se miden con sensores de presión hidrostática localizados en el fondo de cada tanque. Para la etapa de alimentación y potencia, cuenta con una fuente de alimentación VoltPAQ-X1 de Quanser y para la adquisición de datos se utiliza una tarjeta Q2-USB Quanser.

La discretización del modelo matemático se realiza con un tiempo de muestreo de 0.5 segundos y debido a los límites físicos en la bomba y actuadores se consideran las siguientes restricciones para el sistema de tanques acoplados,

$$0 \leq u_{1,2} \leq 10; \quad 0 \leq y_{1,2,3,4} \leq 19.9.$$

El resto de variables asociadas a la sintonización de los controladores MPC corresponden a los pesos de las funciones de costo **Q** y **R** que están definidas como matrices unitarias y el horizonte de control de $n_c = 5$, tanto para el OMPC como para ambos subsistemas del DOMPC. La elección de los horizontes y pesos del sistema se hicieron de forma heurística aunque se reconoce que existen métodos más avanzados de sintonización, e.g. [35].

En la Fig. 5 se muestra el diagrama esquemático de la implementación del sistema de cuatro tanques acoplados controlado mediante el esquema DOMPC. Cada controlador DOMPC envía un paquete de información que contiene su vector de estado, vector de compensación y referencia. Cada controlador recibe los vectores de información correspondientes del otro controlador.

La Fig. 6 muestra la pestaña correspondiente al modelo usado para las predicciones, tanto el modelo continuo como el modelo discretizado. Se muestran los valores de los parámetros de los tanques usados en la construcción el modelo de la planta. El usuario puede modificar algunos parámetros de modelo como las áreas transversales de los agujeros de desfogue, ya que éstos pueden modificarse en físicamente en la planta. Así

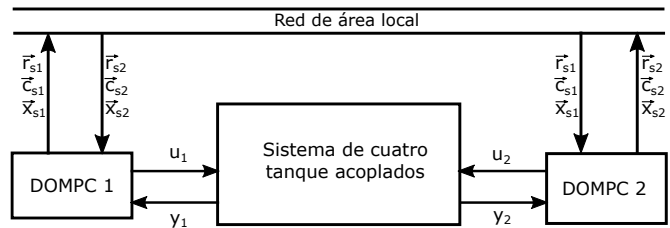


Fig. 5. Esquemático del sistema DOMPC.

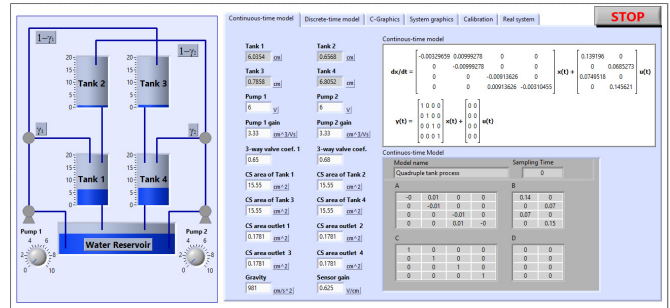


Fig. 6. Panel Frontal - Configuración.

mismo se muestran los valores numéricos del nivel en los cuatro tanques y los voltajes aplicados a la bombas. Aunque no se muestra en la Fig. 6, también pueden ser modificados los parámetros de sintonía del controlador como los pesos **Q** y **R**, los horizontes de control y tiempo de muestreo. La Fig. 7 muestra la pestaña de gráficas, donde se despliega la evolución en el tiempo de los cuatro niveles de líquido y de los voltajes aplicados a las bombas. Ambas figuras muestran el diagrama esquemático del proceso donde también se ilustran de forma animada los niveles de líquido en los tanques.

Las pruebas realizadas con los dos controladores (OMPC y DOMPC), consisten en permitir que el sistema alcance el punto de equilibrio. Se aplica al sistema una entrada de 6V en ambas bombas y se espera a que el sistema entre en régimen permanente. Se genera un perfil de referencia para cada una de las entradas. Los perfiles constan de tres escalones de nivel en los tanques inferiores, los cuales se encuentran en la cercanía de los puntos de equilibrio. En los tanques superiores solo se registra el nivel de líquido, no se ejerce control alguno. Se lleva también registro de los voltajes aplicados a las bombas. Los resultados se obtienen de la herramienta programada en Labview.

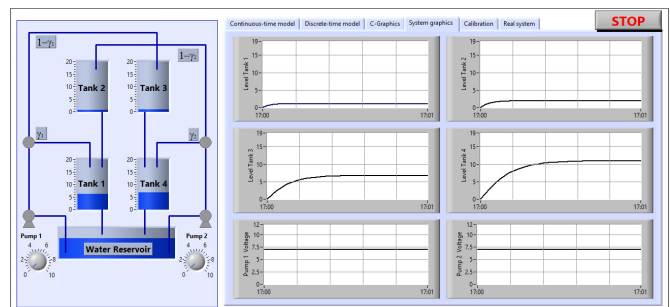


Fig. 7. Panel frontal de la aplicación de Labview.

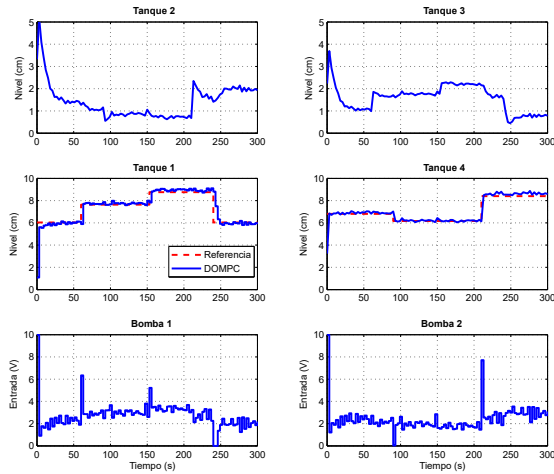


Fig. 8. Resultados de la aplicación del DOMPC

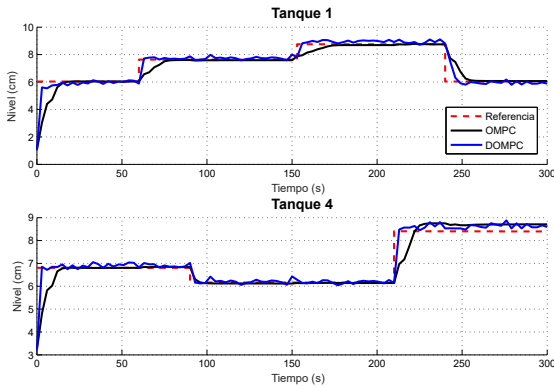


Fig. 9. Comparativa OMPC y DOMPC en tanques inferiores.

La Fig. 8 muestra los resultados del DOMPC. Como se aprecia en la figura, el sistema alcanza los puntos de referencia con buen desempeño. Es importante hacer notar que la información que comparten los controladores se transmite por medio de un servicio OPC y una red de área local (LAN). Además, en esta prueba se induce la pérdida de algunos datos en la transmisión con el fin de probar la habilidad del controlador en esta situación. Los instantes de muestreo en los que ocurre esta pérdida de datos se muestra en la Fig. 10. Para hacer frente a la pérdida de datos se utiliza la estrategia planteada en la Observación 4.

La Fig. 9, muestra una comparativa de los controladores OMPC y DOMPC enfocado al nivel de los tanques inferiores (salidas). La línea segmentada es el perfil de referencia, la línea negra es el comportamiento que presenta el controlador OMPC y la línea azul es la salida obtenida con el controlador DOMPC. Como se esperaba, el mejor desempeño corresponde al controlador centralizado ya que este controlador no necesita tomar en cuenta retrasos ni pérdida de información.

Para completar el análisis, el costo del experimento se evalúa a través de la siguiente función de costo

$$J = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{r}_k\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (35)$$

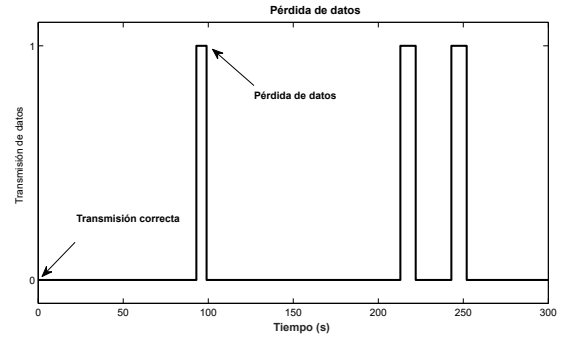


Fig. 10. Pérdida de datos introducida al DOMPC.

TABLA IV
COMPARATIVA DE COSTOS OMPC Y DOMPC

	J_{OMPC}	J_{DOMPC}
Error de salida	20.01	53.55
Esfuerzo de control	23.58	68.43
Total	43.60	121.98

de esta manera se obtienen los costos para el cálculo del error ($\|\mathbf{y}_k - \mathbf{r}_k\|_{\mathbf{Q}}^2$) y del esfuerzo de control ($\|\mathbf{u}_k\|_{\mathbf{R}}^2$) dando lugar a los valores mostrados en la Tabla IV. Estos resultados muestran un mayor costo en el esquema DOMPC, algo que se esperaba para el sistema distribuido por el hecho de dividir el sistema y el efecto del retardo de la información transmitida por el canal de comunicación. Sin embargo, el beneficio de la independencia de un control centralizado y el hecho de un menor costo computacional en sistemas de gran escala, compensa el aumento en el costo total. Es importante mencionar también que la pérdida de información en el canal de comunicaciones no tiene efecto en el control centralizado, ya que los sensores y actuadores se manipulan directamente en este esquema, es decir, la información no fluye en un canal de comunicaciones. Asimismo, el esquema de control distribuido presentado en [31] no toma en cuenta las pérdidas de datos y de presentarse esta situación colapsaría.

VI. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó el desarrollo de un controlador predictivo distribuido cuyo objetivo es hacer frente a los problemas de retardo en la recepción de información y pérdida de paquetes. Para ello, se emplea una técnica simple pero efectiva que involucra el uso de la información descartada en el instante previo a la pérdida de datos. Si bien esta estrategia planteada no asegura la estabilidad del lazo cerrado, tiene la ventaja de que tampoco incrementa la complejidad computacional del algoritmo. Para la implementación de los controladores, se desarrolló un instrumento virtual en Labview que incorpora todos los elementos de los controladores y permite configurarlos de forma flexible. Como se esperaba, el DOMPC presenta costos más altos que el OMPC, pero con las características de un esquema distribuido. El trabajo futuro estará enfocado a la incorporación de estrategias más avanzadas de control distribuido que tomen en cuenta dinámicas no lineales así como una estrategia alternativa que pueda retener

las propiedades de estabilidad aun en presencia de pérdida de datos y/o retardos originados por el canal de comunicaciones.

REFERENCIAS

- [1] N. Sandell, P. Varaiya, M. Athans, and M. Safonov, "Survey of decentralized control methods for large scale systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 23, no. 2, pp. 108–128, 1978.
- [2] D. Q. Mayne, "Model predictive control: Recent developments and future promise," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 2967–2986, 2014.
- [3] J. Rossiter, *A First Course in Predictive Control*. CRC Press, 2018.
- [4] J. B. Rawlings and D. Q. Mayne, *Model predictive control: Theory and design*. Nob Hill Pub. Madison, Wisconsin, 2009.
- [5] C. Ponce, D. Saez, and A. Nunez, "Fuzzy predictive control strategy for a distributed solar collector plant," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 12, no. 4, pp. 626–633, 2014.
- [6] G. H. Negri, M. S. M. Cavalca, and R. S. Parpinelli, "Model-based predictive control using differential evolution applied to a pressure system," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 14, no. 1, pp. 89–95, 2016.
- [7] J. S. Hernandez, R. Rivas-Perez, and J. J. S. Moriano, "Design of a generalized predictive controller for temperature control in a cement rotary kiln," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 16, no. 4, pp. 1015–1021, 2018.
- [8] G. Valencia-Palomo and J. Rossiter, "Efficient suboptimal parametric solutions to predictive control for plc applications," *Control Engineering Practice*, vol. 19, no. 7, pp. 732–743, 2011.
- [9] G. Valencia-Palomo, J. Rossiter, and F. López-Estrada, "Improving the feed-forward compensator in predictive control for setpoint tracking," *ISA transactions*, vol. 53, no. 3, pp. 755–766, 2014.
- [10] B. Khan, G. Valencia-Palomo, J. Rossiter, C. Jones, and R. Gondhalekar, "Long horizon input parameterisations to enlarge the region of attraction of mpc," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 37, no. 1, pp. 139–153, 2016.
- [11] J. R. Domínguez-Frejo and E. F. Camacho, "Global versus local mpc algorithms in freeway traffic control with ramp metering and variable speed limits," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 13, no. 4, pp. 1556–1565, 2012.
- [12] S. Rivero, M. Farina, and G. Ferrari-Trecate, "Plug-and-play decentralized model predictive control for linear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 10, pp. 2608–2614, 2013.
- [13] Y. Zheng, S. Li, and R. Tan, "Distributed model predictive control for on-connected microgrid power management," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 26, no. 3, pp. 1028–1039, 2018.
- [14] R. M. Hermans, A. Jokić, M. Lazar, A. Alessio, P. P. Van den Bosch, I. A. Hiskens, and A. Bemporad, "Assessment of non-centralised model predictive control techniques for electrical power networks," *International Journal of Control*, vol. 85, no. 8, pp. 1162–1177, 2012.
- [15] S. Hentzelt, A. Klingler, and K. Graichen, "Experimental results for distributed model predictive control applied to a water distribution system," in *IEEE International Symposium on Intelligent Control (ISIC)*. IEEE, 2014, pp. 1100–1106.
- [16] J. M. Grosso, C. Ocampo-Martínez, and V. Puig, "Non-centralized predictive control for drinking-water supply systems," in *Real-time Monitoring and Operational Control of Drinking-Water Systems*. Springer, 2017, pp. 341–360.
- [17] J. M. Maestre, D. M. de la Pena, and E. F. Camacho, "Distributed mpc: a supply chain case study," in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with the 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009*. IEEE, 2009, pp. 7099–7104.
- [18] J. L. Nabais, R. R. Negenborn, R. B. C. Benitez, and M. A. Botto, "Setting cooperative relations among terminals at seaports using a multi-agent system," in *International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems-(ITSC)*. IEEE, 2013, pp. 1731–1736.
- [19] R. R. Negenborn, B. De Schutter, and J. Hellendoorn, "Multi-agent model predictive control for transportation networks: Serial versus parallel schemes," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 21, no. 3, pp. 353–366, 2008.
- [20] B. Lagos and A. Cipriano, "Performance evaluation of a distributed mpc strategy applied to the continuous stirred tank reactor," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 13, no. 6, pp. 1921–1926, 2015.
- [21] Y. Zheng, S. E. Li, K. Li, F. Borrelli, and J. K. Hedrick, "Distributed model predictive control for heterogeneous vehicle platoons under unidirectional topologies," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, no. 3, pp. 899–910, 2017.
- [22] C. A. Hans, P. Braun, J. Raisch, L. Grüne, and C. Reincke-Collon, "Hierarchical distributed model predictive control of interconnected microgrids," *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 10, no. 1, pp. 407–416, 2019.
- [23] R. Scattolini, "Architectures for distributed and hierarchical model predictive control—a review," *Journal of Process Control*, vol. 19, no. 5, pp. 723–731, 2009.
- [24] P. D. Christofides, R. Scattolini, D. M. de la Pena, and J. Liu, "Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 51, pp. 21–41, 2013.
- [25] K. H. Johansson, A. Horch, O. Wijk, and A. Hansson, "Teaching multivariable control using the quadruple-tank process," in *the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, Phoenix, AZ*. IEEE, 1999, pp. 807–812.
- [26] P. P. Biswas, R. Srivastava, S. Ray, and A. N. Samanta, "Sliding mode control of quadruple tank process," *Mechatronics*, vol. 19, no. 4, pp. 548–561, 2009.
- [27] E. P. Gatzke, E. E. Meadows, Wang, C, and F. Doyle III, "Model based control of a four-tank system," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 24, pp. 1503–1509, 2000.
- [28] L. Dai and K. J. Astrom, "Dynamic matrix control of a quadruple-tank process," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 32, no. 2, pp. 6902–6907, 1999.
- [29] R. Vadigepalli, E. P. Gatzke, and F. Doyle III, "Robust control of a multivariable experimental four-tank system," *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 40, no. 8, pp. 1916–1927, 2001.
- [30] I. Alvarado, D. Limon, D. M. De La Peña, J. Maestre, M. Ridao, H. Scheu, W. Marquardt, R. Negenborn, B. De Schutter, F. Valencia, et al., "A comparative analysis of distributed mpc techniques applied to the hd-mpc four-tank benchmark," *Journal of Process Control*, vol. 21, no. 5, pp. 800–815, 2011.
- [31] F. D. Sorcia-Vázquez, C. D. García-Beltrán, G. Valencia-Palomo, G. Guerrero-Ramírez, M. Adam-Medina, and R. Escobar-Jiménez, "Control predictivo distribuido óptimo aplicado al control de nivel de un proceso de cuatro tanques acoplados," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, vol. 12, no. 4, pp. 365–375, 2015.
- [32] K. R. Muske and J. B. Rawlings, "Model predictive control with linear models," *AIChE Journal*, vol. 39, no. 2, pp. 262–287, 1993.
- [33] S. J. Qin and T. A. Badgwell, "A survey of industrial model predictive control technology," *Control Engineering Practice*, vol. 11, no. 7, pp. 733–764, 2003.
- [34] K. H. Johansson, "The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 3, pp. 456–465, 2000.
- [35] R. Gutiérrez-Urquidez, G. Valencia-Palomo, O. M. Rodríguez-Elias, and L. Trujillo, "Systematic selection of tuning parameters for efficient predictive controllers using a multiobjective evolutionary algorithm," *Applied Soft Computing*, vol. 31, pp. 326–338, 2015.

APÉNDICE

DEFINICIÓN DE MATRICES DE LAS ECUACIONES DE PREDICCIÓN

A. Matrices de Predicción de OMPC

Las matrices de predicción de estados se obtienen iterando la ecuación (4):

$$\mathbf{P}_{cl} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad H_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & 0 & \dots \\ \Phi\mathbf{B} & \mathbf{B} & 0 & \dots \\ \Phi^2\mathbf{B} & \Phi\mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{rx} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{P}_r \\ \mathbf{B}\mathbf{P}_r + \Phi\mathbf{B}\mathbf{P}_r \\ \mathbf{B}\mathbf{P}_r + \Phi\mathbf{B}\mathbf{P}_r + \Phi^2\mathbf{B}\mathbf{P}_r \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Las matrices de predicción de salidas se obtienen evaluado la ecuación (17):
 \underline{x}_k en $\underline{y}_k = C \underline{x}_k$:

$$\mathbf{P}_{cly} = \begin{bmatrix} C\Phi \\ C\Phi^2 \\ C\Phi^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_{cy} = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots \\ C\Phi B & CB & 0 & \dots \\ C\Phi^2 B & C\Phi B & CB & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{ry} = \begin{bmatrix} CBP_r \\ CBP_r + C\Phi BP_r \\ CBP_r + C\Phi BP_r + C\Phi^2 BP_r \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Las matrices de predicción de entradas se obtienen iterando la ecuación (5):

$$\mathbf{P}_{clu} = \begin{bmatrix} -K \\ -K\Phi \\ -K\Phi^2 \\ \dots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_{cu} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots \\ -KB & I & 0 & \dots \\ -K\Phi B & -KB & I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{ru} = \begin{bmatrix} P_r \\ P_r - KBP_r \\ P_r - KBP_r - K\Phi BP_r \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

B. Matrices de Predicción del DOMPC

Las matrices de predicción de estados se obtienen iterando la ecuación (16):

$$\mathbf{P}_{cli} = \begin{bmatrix} \Phi_{ii} \\ \Phi_{ii}^2 \\ \Phi_{ii}^3 \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}_{ci} = \begin{bmatrix} B_{ii} & 0 & 0 & \dots \\ \Phi_{ii} B_{ii} & B_{ii} & 0 & \dots \\ \Phi_{ii}^2 B_{ii} & \Phi_{ii} B_{ii} & B_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{BP}_{rxi} = \begin{bmatrix} BP_{rDii} \\ BP_{rDii} + \Phi_{ii} BP_{rDii} \\ BP_{rDii} + \Phi_{ii} BP_{rDii} + \Phi_{ii}^2 BP_{rDii} \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{cli} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots \\ \Phi_{ii} & I & 0 & \dots \\ \Phi_{ii}^2 & \Phi_{ii} & I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Las matrices de predicción de salida se obtienen iterando

$$\mathbf{P}_{clyi} = \begin{bmatrix} C_{ii}\Phi_{ii} \\ C_{ii}\Phi_{ii}^2 \\ C_{ii}\Phi_{ii}^3 \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_{cyyi} = \begin{bmatrix} C_{ii}B_{ii} & 0 & 0 & \dots \\ C_{ii}\Phi_{ii}B_{ii} & C_{ii}B_{ii} & 0 & \dots \\ C_{ii}\Phi_{ii}^2B_{ii} & C_{ii}\Phi_{ii}B_{ii} & C_{ii}B_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{BP}_{ryi} = \begin{bmatrix} C_{ii}BP_{rDii} \\ C_{ii}BP_{rDii} + C_{ii}\Phi_{ii}BP_{rDii} \\ C_{ii}BP_{rDii} + C_{ii}\Phi_{ii}BP_{rDii} + C_{ii}\Phi_{ii}^2BP_{rDii} \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{clyi} = \begin{bmatrix} C_{ii} & 0 & 0 & \dots \\ C_{ii}\Phi_{ii} & C_{ii} & 0 & \dots \\ C_{ii}\Phi_{ii}^2 & C_{ii}\Phi_{ii} & C_{ii} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Las matrices de predicción de entradas se obtienen iterando la ecuación (18):

$$\mathbf{P}_{clui} = \begin{bmatrix} -K_{ii} \\ -K_{ii}\Phi_{ii} \\ -K_{ii}\Phi_{ii}^2 \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_{cui} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots \\ -K_{ii}B_{ii} & I & 0 & \dots \\ -K_{ii}\Phi_{ii}B_{ii} & -K_{ii}B_{ii} & I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{rui} = \begin{bmatrix} P_{rii} \\ P_{rii} - K_{ii}BP_{rDii} \\ P_{rii} - K_{ii}BP_{rDii} - K_{ii}\Phi_{ii}BP_{rDii} \\ \vdots \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}_{clui} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ -K_{ii} & 0 & 0 & \dots \\ -K_{ii}\Phi_{ii}^2 & -K_{ii} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Matrices de interacción:

$$\mathbf{P}_{clwi} = [\text{diag}\{\Phi_{i,1}\} \dots \text{diag}\{\Phi_{i,i-1}\} 0 \text{diag}\{\Phi_{i,i+1}\} \dots \text{diag}\{\Phi_{i,s}\}];$$

$$\mathbf{H}_{uwi} = [\text{diag}\{\mathbf{B}_{i,1}\} \dots \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,i-1}\} 0 \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,i+1}\} \dots \text{diag}\{\mathbf{B}_{i,s}\}];$$

$$\mathbf{BP}_{rwi} = [\text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,1}\} \dots \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,i-1}\} 0 \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,i+1}\} \dots \text{col}\{\mathbf{BP}_{rDi,s}\}];$$

$$\mathbf{C}_{vi} = [\text{diag}\{\mathbf{C}_{i,1}\} \dots \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,i-1}\} 0 \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,i+1}\} \dots \text{diag}\{\mathbf{C}_{i,s}\}];$$

$$\mathbf{K}_{hui} = [\text{diag}\{\mathbf{K}_{i,1}\} \dots \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,i-1}\} 0 \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,i+1}\} \dots \text{diag}\{\mathbf{K}_{i,s}\}];$$

$$\mathbf{P}_{rhi} = [\text{col}\{\mathbf{P}_{ri,1}\} \dots \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,i-1}\} 0 \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,i+1}\} \dots \text{col}\{\mathbf{P}_{ri,s}\}].$$

C. Obtención del Modelo del Sistema de Cuatro Tanques

En este apéndice se obtienen las ecuaciones diferenciales del proceso de cuatro tanques. Como primer paso se presentan las ecuaciones básicas que se cumplen para cada tanque y para las dos bombas. Posteriormente se combinan para obtener el modelo completo.

El balance de masas para cada tanque está dado por

$$\frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dh(t)}{dt} = Q_{in}(t) - Q_{out}(t); \quad (36)$$

donde V es el volumen de líquido en el tanque, A es el área de la sección transversal, h es el nivel de líquido, Q_{in} y Q_{out} son los flujos de entrada y salida respectivamente.

Por otro lado, considerando un flujo laminar, constante, sin viscosidad e incompresible, la ecuación de Bernoulli representa la conservación de energía de un fluido moviéndose a lo largo de un trayecto. La ecuación aplicada a uno de los tanques es,

$$\frac{1}{2}\rho v_{in}^2(t) + \rho gh_{in}(t) + P_{in}(t) = \frac{1}{2}\rho v_{out}^2(t) + \rho gh_{out}(t) + P_{out}(t); \quad (37)$$

donde ρ es la densidad, v es la velocidad, g es la constante de gravedad, h es la altura, P es la presión y los subíndices in y out identifican a las variables de entrada y de salida respectivamente.

Ya que la entrada y la salida de los tanques se encuentran expuestas a la atmósfera, las presiones son iguales $P_{in} = P_{out} = 1 \text{ atm}$. Asimismo, el fluido cumple con la ley de conservación de la masa, entonces:

$$Av_{in} = av_{out} \quad (38)$$

donde A es el área transversal del tanque y a es el área transversal del orificio de salida. Si se toma en cuenta que el orificio de salida es mucho menor que el área transversal del tanque ($a/A \approx 0$), se puede asumir que la velocidad a la que se mueve el líquido en la sección transversal del tanque es cero, $v_{in} = 0$. Finalmente, como no existe una altura que se oponga al flujo de salida, $h_{out} = 0$. Con esto se simplifica la ecuación de Bernoulli:

$$\rho gh_{in}(t) = \frac{1}{2}\rho v_{out}^2(t); \quad (39)$$

despejando, se obtiene la velocidad de descarga del tanque (ecuación de Torricelli)

$$v_{out}(t) = \sqrt{2gh_{in}(t)}; \quad (40)$$

por lo que el flujo de salida por el orificio de área transversal a es $a\sqrt{2gh_{in}(t)}$.

El voltaje aplicado a las bombas son v_1, v_2 y las ganancias de las bombas son k_1, k_2 . Los parámetros γ_1, γ_2 son los factores de apertura de las válvulas y se fijan antes de realizar los experimentos. Por lo tanto, de acuerdo al diagrama esquemático de la Fig. 1, el flujo proporcionado de las bombas al Tanque 1 es $v_1 k_1 \gamma_1$, el flujo al Tanque 2 es $v_2 k_2 (1 - \gamma_2)$, al Tanque 3 es $v_1 k_1 (1 - \gamma_1)$ y al Tanque 4 es $v_2 k_2 \gamma_2$.

Aplicando el balance de masas (36) a cada tanque, y tomando en cuenta los flujos de entrada proporcionados por las bombas, así como los flujos de salida determinados por la ecuación de Torricelli (40) se llega al modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del proceso de cuatro tanques:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} &= -a_1 \sqrt{2gh_1(t)} + a_2 \sqrt{2gh_2(t)} + \gamma_1 k_1 v_1; \\ A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} &= -a_2 \sqrt{2gh_2(t)} + (1 - \gamma_2) k_2 v_2; \\ A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} &= -a_3 \sqrt{2gh_3(t)} + (1 - \gamma_1) k_1 v_1; \\ A_4 \frac{dh_4(t)}{dt} &= -a_4 \sqrt{2gh_4(t)} + a_4 \sqrt{2gh_3(t)} + \gamma_2 k_2 v_2. \end{aligned} \quad (41)$$



Francisco Javier Pereyra-Pitta was born in Minatitlán, Veracruz, Mexico, in 1980. He received the Engineering degree in Electronics from Instituto Tecnológico de Minatitlán, Mexico in 2001, and the M.Sc. degree in Power Electronics from National Center of Research and Technological Development (CENIDET) in 2006. Currently, Francisco J. Pereyra-Pitta is a PhD student in Robotics and Control at Instituto Tecnológico de Tijuana, Tijuana B.C. Mexico.



Guillermo Valencia-Palomo was born in Merida, Yucatan, Mexico, in 1980. He received the Engineering degree in Electronics from the Instituto Tecnológico de Mérida, Mexico, in 2003, and the M.Sc. and the Ph.D. degree in Automatic Control from the National Center of Research and Technological Development (CENIDET) in 2006 and The University of Sheffield in 2010, respectively. Since 2010, Dr. Guillermo Valencia-Palomo is a full-time professor at the Instituto Tecnológico de Hermosillo. His research interests include predictive control, fault detection and isolation, fault tolerant control and their applications.

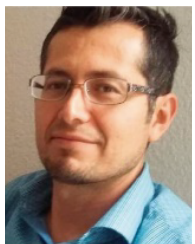


Nohé Ramón Cázarez-Castro is Prof. at Instituto Tecnológico de Tijuana. He has a BSc in Computer Systems Engineering (2002) and a MSc in Computer Science (2005), both from the Tijuana Institute of Technology, and a Doctor of Science (2010) degree from the Universidad Autónoma de Baja California. Is member of IEEE, HAFSA, AIENG, Association of Numerics Methods Applied to Engineering, Mexican Society of Computational Science, Young Research Committee of the World Federation of Soft Computing and MIRLAB. His research inter-

est includes mathematical and computational modeling, fuzzy differential equations, fuzzy systems, robotics, nonlinear control, genetic algorithms, and applications.



Francisco Ronay López-Estrada received his PhD in automatic control from the University of Lorraine, France, in 2014. He has been with Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, Mexico, as an assistant professor since 2008. He received his M.Sc. degree in Electronic Engineering in 2008 from the National Center of Research and Technological Development (CENIDET), Mexico. His research interests are in descriptor systems, TS systems, fault detection, fault tolerant control, and its applications to Unmanned Vehicles, and pipeline leak detection systems.



Brian Manuel González-Contreras received the B.Eng. degree in Electric Engineering from the Autonomous University of Morelos State, and the M.Sc. degree in Automatic Control from the National Center of Research and Technological Development (CENIDET). He received in 2009, the Ph.D. degree from Université Henri Poincaré (today Université de Lorraine). Since 2010 he is a full-time professor at the Autonomous University of Tlaxcala. His research interests include the areas of process identification, automatic control, fault diagnosis, fault-tolerant control, reliability analysis, and predictive maintenance.

and its applications to Unmanned Vehicles, and pipeline leak detection systems.