

Characterizing the Mobile Coverage Probability in Different Geometries

J. Torres, R. Bustamante, and C. Caicedo, *Member, IEEE*

Abstract—This work characterizes the radio frequency (RF) power distribution within a given area via its mean and variance in three particular geometries. Through our statistical approach we have developed computationally simple equations that can be used to compute the mean value and variance of the RF power received in a circular area and in some other geometries without numerical evaluations of integrals and which improve on the results/methods provided in the literature to date.

We begin our study with the analysis of the received power on a linear trajectory and then we extend the result for a circular geometry. We have validated our results via Monte Carlo simulations. These results are useful both the study of the coverage of a RF transmitter and to identify spectrum holes.

Index Terms—Distribution functions, Outage probability, Wireless propagation model.

I. INTRODUCCIÓN

EL despliegue de las redes de comunicación móvil está restringido tanto por la cobertura del transmisor fuente, como por la interferencia agregada existente en su área de servicio. Estas dos variables dependen de la potencia recibida desde el transmisor fuente, sin embargo, esta señal se ve afectada por tres fenómenos conocidos como: pérdidas de camino, desvanecimiento lento y multitrajectos.

Las pérdidas de camino se caracterizan mediante una función que depende de la distancia entre el transmisor y el receptor. No obstante, los otros dos fenómenos son caracterizados mediante variables aleatorias [1], lo cual hace que el tratamiento matemático llegue a ser engorroso. De hecho, muchas expresiones en la literatura [2], [3], [4], [5] que modelan la potencia RF recibida son expresiones abiertas o requieren de evaluación numérica.

En este trabajo caracterizamos la función de densidad de probabilidad (PDF) de la potencia RF recibida dentro de diferentes formas geométricas. Después obtenemos el valor medio y la varianza de esta potencia usando un modelo de propagación *log-distance*, el cual considera que el fenómeno de desvanecimiento lento puede ser modelado con una variable aleatoria normal en unidades logarítmicas o *log-normal* cuando se usan unidades lineales [6], [2]. La manipulación analítica de la variable *log-normal* es, en algunas situaciones, un reto debido a que esta variable aleatoria no tiene una función generadora de momentos [7], [8]. Las geometrías analizadas en este trabajo se muestran en las figuras 1 y 2.

Nuestro enfoque estadístico da como resultado expresiones cerradas para el valor medio y varianza de la potencia recibida

en un área circular que son fáciles de evaluar computacionalmente. Esto es una extensión de los resultados provistos en la literatura revisada en la fecha de realización de este artículo. Tanto la función de distribución acumulativa (CDF) como la PDF fueron previamente obtenidas en [9], [10], pero el valor medio y la varianza no fueron obtenidas en estos trabajos con expresiones cerradas, y nuestra contribución es determinar estos parámetros de forma más sencilla, incluso para otras formas geométricas.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: la sección II presenta los más relevantes trabajos relacionados con la probabilidad de cobertura para un modelo de propagación *log-distance*. La sección III muestra el desarrollo analítico que caracteriza la potencia recibida sobre una trayectoria lineal. La sección IV extiende el trabajo preliminar usando un área circular y otras formas geométricas. La sección V muestra un ejemplo de uso de las fórmulas calculadas y compara las ecuaciones obtenidas con simulaciones de Monte Carlo. Finalmente, en la sección VI se muestran las conclusiones.

II. CONCEPTOS PRELIMINARES Y TRABAJOS PREVIOS

Algunos de los primeros trabajos en determinar la probabilidad de cubrimiento en un área datan de 1974 por W.C. Jakes. Y posteriormente los presenta en su libro [6] donde utiliza el modelo de propagación *log-distance* en los capítulos “*Determination of signal coverage in a small area*” y “*Determination of the coverage area of a base station for the calculation of the average power and probability of coverage*”. Ambos capítulos analizan un receptor en una posición fija dentro de un área circular. El trabajo de T.S. Rappaport [2] - 1996 en el capítulo: “*Determination of percentage of coverage area*” usa como referencia el trabajo de Jakes, teniendo en cuenta las mismas ecuaciones, pero expresadas un poco diferentes debido a los cambios de variables. Algo similar ocurre en el trabajo de Goldsmith [11] - 2005 en el capítulo “*Cell coverage area*”. El trabajo de Z. Bharucha y H. Haas [9] - 2008 usa transformación de variables aleatorias para calcular la PDF de las pérdidas de camino, asumiendo una distribución uniforme dentro de un área circular y una PDF Normal para modelar el efecto de desvanecimiento lento. Los resultados muestran que esta PDF se aproxima a una distribución Normal con una asimetría en las colas de la función de Gauss. El trabajo de S. Baroudi y Y. R. Shayan [10] - 2012 determinó la CDF de las pérdidas de potencia en un área circular con una distribución uniforme de receptores. El enfoque usado se basa en transformación de variables aleatorias. Finalmente, el trabajo de Yang [12] muestra algunas fórmulas para describir

Juan G. Torres H. and Roberto Bustamante are with the Department of Electrical and Electronic Engineering, Universidad de los Andes, Colombia. e-mails: jg.torres98@uniandes.edu.co, rbustama@uniandes.edu.co.

Carlos E. Caicedo Bastidas is with the School of Information Studies, Syracuse University, United States. e-mail: ccaicedo@syr.edu.

la probabilidad de cobertura basándose en el análisis de Reudink en un área circular. Nuestro trabajo no solo se basa en calcular la PDF o CDF de las pérdidas de potencia, sino también en determinar el valor medio, varianza, CDF y PDF de la potencia recibida. Una breve descripción de otros modelos de propagación puede consultarse en [13].

En un modelo de pérdidas de camino *log-distance*, la potencia recibida (P_{Rx}) a una distancia r del transmisor es:

$$P_{Rx}(r) = P_{Tx} - \left\{ C + 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{R} \right) + X \right\} \quad (1)$$

Donde:

- P_{Rx} =Potencia recibida.
- P_{Tx} =Potencia efectiva irradiada (PIRE) por un transmisor.
- C = Pérdidas en espacio libre a una distancia de referencia R .
- α =Coeficiente de atenuación.
- r =Distancia entre Tx y Rx .
- R =Distancia de referencia.
- X =Variable aleatoria normal, valor medio cero y varianza σ^2 .

Dado que $\mathbb{E}[X] = 0$, el valor medio de la potencia a una distancia r es:

$$\mathbb{E}[P_{Rx}(r)] = P_{Tx} - \left\{ C + 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{R} \right) \right\} = \mu(r) \quad (2)$$

Si definimos el valor de la potencia th como un umbral que permite una adecuada operación para un determinado servicio de telecomunicaciones, entonces solo si $P_{Rx}(r) > th$ se puede garantizar la prestación del servicio en una determinada zona. Sin embargo, P_{Rx} es una variable aleatoria y nuestro objetivo es conocer la probabilidad de cubrimiento en el dominio espacial. En otras palabras, queremos saber $\mathbb{P}[P_{Rx}(r) > th]$ para cualquier ubicación de r . Dicha expresión ha sido desarrollada y resuelta en los trabajos [6], [2], [11]. Se sabe que $X \sim$ PDF Normal, entonces P_{Rx} también tiene una PDF Normal y la probabilidad de cubrimiento es:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(r) > th] = \int_{th}^{\infty} p_{Rx}(\gamma) \cdot d\gamma$$

Donde: $p_{Rx}(\gamma)$ es la PDF de la variable $P_{Rx}(r)$ igual a $N[\mu(r), \sigma^2]$. Por lo tanto:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(r) > th] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{Erf} \left[\frac{th - \mu(r)}{\sigma \cdot \sqrt{2}} \right] \right\} \quad (3)$$

Donde μ depende de r . Si r es una distancia constante en un instante dado, entonces r es un punto. El conjunto de todos los puntos a una distancia r crea un círculo (de radio r). Ambos escenarios (un punto o el borde de un círculo) pueden ser tratados estadísticamente de la misma forma y se puede usar la ecuación 3 para calcular la probabilidad de cubrimiento. En conclusión: si r es constante, el proceso $S(r, X)$ solo representará la variable aleatoria X .

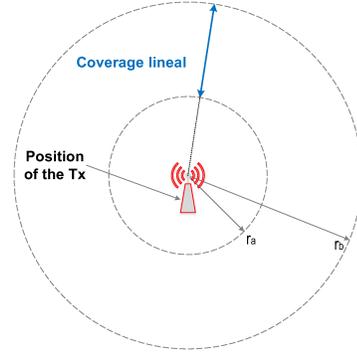


Fig. 1. Trayectoria radial (línea azul).

III. PROBABILIDAD DE COBERTURA SOBRE UNA TRAYECTORIA RADIAL

El objetivo es encontrar la PDF de la potencia recibida sobre una trayectoria radial, (ver figura 1).

Inicialmente consideraremos que el receptor se mueve desde el centro del círculo ($r_a = 0$) hasta una distancia r_b . Esta trayectoria está denotada como \vec{r} y la probabilidad de cubrimiento es dada por:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{1}{r_b} \int_0^{r_b} \mathbb{P}[P_{Rx}(r) > th] \cdot dr \quad (4)$$

Donde: $\vec{r} \in [0, r_b]$. En términos prácticos, se necesita tomar N muestras con un espaciamiento de Δr , tal que $N \cdot \Delta r = r_b$. Entonces, podríamos calcular la probabilidad de cubrimiento usando la ecuación 5.

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{1}{N \cdot \Delta r} \cdot \sum_{i=0}^N \mathbb{P}[P_{Rx}(i \cdot \Delta r) > th] \quad (5)$$

Nótese que $\mathbb{P}[P_{Rx}(r_i) > th]$ representa la probabilidad de cubrimiento en un lugar específico, mientras que $\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th]$ representa la probabilidad de cobertura sobre una trayectoria radial.

A. Valor Medio y Varianza de la Potencia Recibida

El proceso $S(r, X)$ puede ser modelado usando $\vec{r} \sim U[0, r_b]$. Entonces, la PDF de esta trayectoria es:

$$p_{\vec{r}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{r_b}; & 0 < r \leq r_b \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

La variable aleatoria z indica las pérdidas de camino en función de r .

$$z = 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{\vec{r}}{R} \right)$$

Usando transformaciones de PDF con una variable tenemos (para más información ver [14]):

$$p_z(z) \cdot dz = p_{\vec{r}}(r) \cdot dr$$

$$p_z(z) = \frac{R}{r_b} \varphi \cdot e^{\varphi \cdot z}; -\infty < z \leq \Phi_b \quad (7)$$

Donde: $\varphi = \frac{\ln(10)}{10 \cdot \alpha}$; $\Phi_b = 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{r_b}{R} \right)$.

La ecuación 7 es la PDF de las pérdidas de camino en esta trayectoria. Por tanto, cualquier usuario alejándose del transmisor (T_x) se modelará con dicha ecuación. Esta ecuación será de utilidad para calcular el valor medio y la varianza más adelante. Por ahora $\vec{r} \in [0, r_b]$, entonces el valor medio obtenido para z es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z] &= \int_{-\infty}^{\Phi_b} z \cdot p_z(z) \cdot dz \\ \mathbb{E}[z] &= \frac{1}{\varphi} \cdot \{\ln(r_b) - 1 - \ln(R)\} \end{aligned} \quad (8)$$

Y la varianza de z da como resultado:

$$\begin{aligned} \text{Var}[z] &= \int_{-\infty}^{\Phi_b} z^2 \cdot p_z(z) \cdot dz - \mathbb{E}[z]^2 \\ \text{Var}[z] &= \left(\frac{10 \cdot \alpha}{\ln(10)} \right)^2 = \frac{1}{\varphi^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Ahora, se calcula el valor medio para la potencia recibida y tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_{Rx}(\vec{r})] &= P_{Tx}(r_b) - \{C + \mathbb{E}[z]\} \\ \mathbb{E}[P_{Rx}(\vec{r})] &= u(r_b) + \frac{1}{\varphi} \end{aligned} \quad (10)$$

y la varianza será:

$$\text{Var}[P_{Rx}(\vec{r})] = \sigma^2 + \frac{1}{\varphi^2} \quad (11)$$

Ahora se hace un cambio en la trayectoria y $\vec{r} \in [r_a, r_b]$. Entonces se modela \vec{r} como $\vec{r} \sim U[r_a, r_b]$ y usando de nuevo transformaciones obtenemos la nueva PDF para z :

$$p_z^*(z) = p_{\vec{r}}(r) \cdot \frac{dr}{dz} \Big|_{r=f(z)} = \frac{R \cdot \varphi}{(r_b - r_a)} \cdot e^{\varphi \cdot z}; \Phi_a \leq z \leq \Phi_b$$

Donde: $\Phi_a = 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{r_a}{R} \right)$

El valor medio de la variable z se calcula como:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[z] &= \int_{\Phi_a}^{\Phi_b} z \cdot p_z^*(z) \cdot dz \\ \mathbb{E}^*[z] &= \frac{1}{\varphi} \cdot \left\{ \frac{r_b \cdot \ln(r_b) - r_a \cdot \ln(r_a)}{r_b - r_a} - 1 - \ln(R) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Y la varianza de z es ahora:

$$\begin{aligned} \text{Var}^*[z] &= \int_{-\infty}^{\Phi_b} z^2 \cdot p_z^*(z) \cdot dz - \mathbb{E}^*[z]^2 \\ \text{Var}^*[z] &= \frac{1}{\varphi^2} \cdot \left[1 - r_b \cdot r_a \cdot \left(\frac{\ln(r_b) - \ln(r_a)}{r_b - r_a} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Finalmente, tenemos el valor medio y varianza de la potencia recibida en esta trayectoria $\vec{r} \in [r_a, r_b]$ como:

$$\mathbb{E}[P_{Rx}(\vec{r})] = P_{Tx} - \{C + \mathbb{E}^*[z]\} \quad (14)$$

$$\text{Var}[P_{Rx}(\vec{r})] = \sigma^2 + \text{Var}^*[z] \quad (15)$$

B. PDF de la Potencia Recibida

Teniendo en cuenta el modelo de propagación dado en la ec.1, con $\vec{r} \in [0, r_b]$, y reescribiéndola con:

$$T = P_{Tx} - \{C + X\},$$

$$k = 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10}(r),$$

Se obtiene: $P_{Rx}(r) = \gamma = T - k$.

Donde: $T \sim N(P_{Tx} - C, \sigma)$ y la PDF de k se obtiene por transformaciones, dando como resultado una expresión igual a la ecuación 7. Suponiendo que T y k son variables independientes, la PDF conjunta es dada por:

$$p_{k,T}(k, T) = p_k(k) \cdot p_T(T) = p_k(k) \cdot p_T(\gamma + k)$$

Para este sistema de ecuaciones se calcula la matriz Jacobiana $J(T, k)$ y después el determinante $\|J(T, k)\| = 1$. Así, la PDF marginal de γ está dada por:

$$p_\gamma(\gamma) = \int_{-\infty}^{\Phi_b} p_{k,T}(k, \gamma + k) \cdot dk$$

Es decir:

$$p_\gamma(\gamma) = \int_{-\infty}^{\Phi_b} \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{[\gamma+k]-\mu}{\sigma} \right)^2} \right) \cdot (\varphi e^{k\varphi}) \cdot dk$$

Resolviendo la integral, encontramos que la PDF es:

$$\begin{aligned} p_\gamma(\gamma) &= \\ \frac{\varphi \cdot R \cdot e^{\frac{1}{2} \varphi (\varphi \sigma^2 + 2\mu_0 - 2\gamma)}}{2 \cdot r_b} &\left(1 + \text{Erf} \left[\frac{-\varphi \sigma^2 + \Phi_b - \mu_0 + \gamma}{\sqrt{2}\sigma} \right] \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Donde γ es la potencia recibida en R_x , $\mu_0 = P_{Tx} - C$.

Ahora, si la trayectoria es $\vec{r} \in [r_a, r_b]$, esta PDF será:

$$\begin{aligned} p_\gamma(\gamma) &= \\ \frac{\varphi \cdot R \cdot e^{\frac{1}{2} \varphi (\varphi \sigma^2 + 2\mu_0 - 2\gamma)}}{2 \cdot (r_b - r_a)} &\cdot \left[\text{Erf} \left(\frac{\varphi \sigma^2 - \Phi_a + \mu_0 - \gamma}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \right. \\ &\left. \text{Erf} \left(\frac{\varphi \sigma^2 - \Phi_b + \mu_0 - \gamma}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

C. CDF de la Potencia Recibida

La forma directa de encontrar la CDF es:

$$P_\gamma(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\gamma(\gamma) \cdot d\gamma$$

Sin embargo, queremos saber si la probabilidad de la potencia recibida supera un determinado umbral th (para garantizar la prestación de un servicio de telecomunicaciones). Entonces, la CDF es:

$$P_\gamma(\gamma | th) = \int_{th}^{\infty} p_\gamma(\gamma) \cdot d\gamma$$

Dada la complejidad de las ecuaciones 16 y 17, el método directo podría resultar tedioso, por lo tanto, en este trabajo proponemos un camino diferente para encontrar la probabilidad de cubrimiento y definimos:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \int_{th}^{\infty} p_\gamma(\gamma) \cdot d\gamma$$

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{1}{r_b} \int_0^{r_b} \mathbb{P}[P_{Rx}(r) > th] \cdot dr =$$

$$\frac{1}{2r_b} \int_0^{r_b} \left\{ 1 - \text{Erf} \left[\frac{th - P_{Tx} + \{C + 10\alpha \log_{10} \left(\frac{r}{R} \right)\}}{\sigma \cdot \sqrt{2}} \right] \right\} \cdot dr$$

Usando $a = \frac{th - P_{Tx} + C}{\sigma \cdot \sqrt{2}}$; $b = \frac{10 \cdot \alpha}{\sigma \cdot \sqrt{2}}$ y reescribiendo la ecuación, tenemos ahora:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{1}{2r_b} \int_0^{r_b} \left\{ 1 - \text{Erf} \left[a + b \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{R} \right) \right] \right\} dr$$

Con el cambio de variables:

$$t = th - \mu(r) = a + b \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{R} \right); dt = \frac{b}{r \cdot \ln(10)} \cdot dr$$

$$r = R \cdot e^{\frac{(t-a)}{b} \cdot \ln(10)},$$

Si $r \rightarrow 0$, entonces $t_{r=0} \rightarrow -\infty$,

Si $r \rightarrow r_b$, entonces $t_{r_b} \rightarrow a + b \cdot \log_{10} \left(\frac{r_b}{R} \right)$.

Y la nueva fórmula es:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{R \cdot e^{-\frac{a \cdot \ln(10)}{b}}}{2r_b} \int_{-\infty}^{t_b} e^{\frac{t \cdot \ln(10)}{b}} \left\{ 1 - \text{Erf} [t] \right\} \cdot dt$$

Haciendo $\beta = \frac{\ln(10)}{b} = \varphi \sigma \cdot \sqrt{2}$, podemos resolver la integral y obtener:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R}{r_b} e^{-a\beta} \cdot e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2} \left[1 + \text{Erf} \left(t_b - \frac{\beta}{2} \right) \right] + \text{Erfc} (t_b) \right\} \quad (18)$$

Ahora, si consideramos la trayectoria $\vec{r} \in [r_a, r_b]$ tendremos:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > th] = \frac{R \cdot e^{-a\beta}}{2(r_b - r_a)} \left\{ e^{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2} \left[\text{Erf} \left(t_b - \frac{\beta}{2} \right) - \text{Erf} \left(t_a - \frac{\beta}{2} \right) \right] + \left[e^{\beta \cdot t_b} \text{Erfc} (t_b) - e^{\beta \cdot t_a} \text{Erfc} (t_a) \right] \right\} \quad (19)$$

Donde: $t_a = a + b \cdot \log_{10} \left(\frac{r_a}{R} \right)$. Y finalmente calculamos la CDF como:

$$P_\gamma(\gamma) = 1 - \mathbb{P}[P_{Rx}(\vec{r}) > \gamma] \quad (20)$$

IV. PROBABILIDAD DE CUBRIMIENTO EN UN ÁREA CIRCULAR

Con base en los trabajos [6] y [2] tenemos la ecuación 21 que permite calcular la probabilidad de cubrimiento en un área circular de radio r_b .

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(A) > th] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{Erf} [w] + e^{\frac{1-2w \cdot v}{\sqrt{2}}} \cdot \left(1 - \text{Erf} \left[\frac{1-w \cdot v}{v} \right] \right) \right\} \quad (21)$$

donde:

$$w = \frac{th - \mu(r_b)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}; \quad v = \frac{10}{\sigma \cdot \sqrt{2}} \cdot \alpha \cdot \log_{10} [e]$$

Sin embargo, también estamos interesados en conocer la varianza y valor medio de la potencia recibida en esta área A . Esto es importante en trabajos relacionados con el cálculo de la interferencia agregada. Siguiendo con nuestra notación, se ha reescrito la ecuación 21 como:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(A) > th] =$$

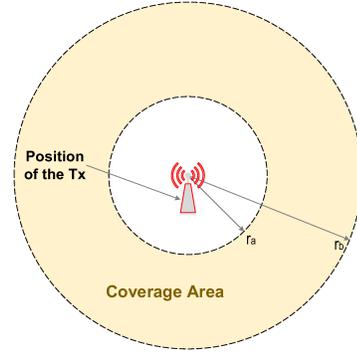


Fig. 2. Geometría circular, si $r_a \neq 0$ entonces se obtiene un anillo.

$$\frac{1}{2} - \frac{\ln(10) \cdot R^2 \cdot 10^{-\frac{2a}{b}}}{b \cdot r_b^2} \int_{-\infty}^{t_b} 10^{\frac{2t}{b}} \cdot \text{erf} [t] \cdot dt$$

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(A) > th] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{e^{-2a\beta} R^2}{r_b^2} \left(e^{2t_b\beta} \text{erf} [t_b] + e^{\beta^2} (\text{erf} [\beta - t_b] - 1) \right) \right\} \quad (22)$$

Usando la ecuación 22 para un área circular, podemos crear una figura en forma de anillo cuando el radio está acotado entre r_a y r_b (ver figura 2). En este caso la probabilidad de cubrimiento es:

$$\mathbb{P}[P_{Rx}(A) > th] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{e^{-2a\beta} R^2}{(r_b^2 - r_a^2)} \left(e^{2t_b\beta} \text{erf} [t_b] - e^{2t_a\beta} \text{erf} [t_a] + e^{\beta^2} (\text{erf} [\beta - t_b] - \text{erf} [\beta - t_a]) \right) \right\} \quad (23)$$

A. Valor Medio y Varianza de la Potencia Recibida

Este escenario es modelado considerando una distribución uniforme de receptores dentro del área A . Sabemos que $A = \pi \cdot r^2$ y mediante transformaciones obtenemos la PDF para r .

$$p_A(A) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot r_b^2}; & 0 < r \leq r_b \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (24)$$

$$A = \pi r^2; \quad dA = 2\pi r \cdot dr$$

$$p_r(r) = p_A(A) \cdot \frac{dA}{dr} = \frac{2r}{r_b^2}; \quad r \in [0, r_b]$$

De nuevo, la variable z hace referencia a las pérdidas de camino, pero en este caso dentro de un círculo A .

$$z = 10 \cdot \alpha \cdot \log_{10} \left(\frac{r}{R} \right) \quad (25)$$

La PDF de z por transformaciones es:

$$p_z(z) = \frac{2 \cdot R^2}{r_b^2} \varphi \cdot e^{2 \cdot \varphi \cdot z}; \quad -\infty < z \leq \Phi_b \quad (26)$$

El valor medio:

$$\mathbb{E}[z] = \int_{-\infty}^{\Phi_b} z \cdot p_z(z) \cdot dz$$

Si $A \in [0, \pi r_b^2]$ (un círculo), el valor medio es:

$$\mathbb{E}[z] = \frac{1}{2\varphi} \cdot \left\{ 2\ln\left(\frac{r_b}{R}\right) - 1 \right\} \quad (27)$$

El valor medio de la potencia recibida en el círculo será:

$$\mathbb{E}[P_{Rx}(A)] = P_{Tx} - \{C + \mathbb{E}[z]\} = u(r_b) + \frac{1}{2\varphi} \quad (28)$$

El desarrollo analítico para la varianza empieza por:

$$\text{Var}[z] = \int_{-\infty}^{\Phi_b} z^2 \cdot p_z(z) \cdot dz - \mathbb{E}[z]^2 = \frac{1}{2\varphi^2}$$

Y la varianza de la potencia recibida en el círculo será:

$$\text{Var}[P_{Rx}(A)] = \sigma^2 + \text{Var}[z] = \sigma^2 + \left[\frac{1}{2\varphi}\right]^2 \quad (29)$$

Cuando se considera otra geometría donde $A \in [\pi r_a^2, \pi r_b^2]$ (en forma de anillo), por lo tanto la PDF de A es:

$$p_A(A) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \cdot (r_b^2 - r_a^2)}; & r_a < r \leq r_b \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (30)$$

De aquí que la PDF de r sea:

$$p_r(r) = \frac{2r}{(r_b^2 - r_a^2)}; \quad r \in [r_a, r_b]$$

Y la PDF de z :

$$p_z(z) = \frac{2 \cdot R^2}{(r_b^2 - r_a^2)} \varphi \cdot e^{2 \cdot \varphi \cdot z}; \quad \Phi_a < z \leq \Phi_b \quad (31)$$

Al calcular el valor medio de z se tiene que:

$$\mathbb{E}^{**}[z] = \frac{1}{2\varphi} \cdot \left\{ 2 \frac{[r_b^2 \cdot \ln(r_b) - r_a^2 \cdot \ln(r_a)]}{(r_b^2 - r_a^2)} - 1 - 2\ln(R) \right\} \quad (32)$$

y la varianza de z es:

$$\text{Var}^{**}[z] = \left(\frac{1}{2\varphi}\right)^2 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{2 \cdot r_b \cdot r_a}{r_b^2 - r_a^2}\right)^2 \cdot (\ln(r_b) - \ln(r_a))^2 \right\} \quad (33)$$

Finalmente, cuando $A \in [\pi r_a^2, \pi r_b^2]$ tenemos el valor medio y varianza de la potencia recibida en una geometría en forma de anillo como:

$$\mathbb{E}[P_{Rx}] = P_{Tx} - \{C + \mathbb{E}^{**}[z]\} \quad (34)$$

$$\text{Var}[P_{Rx}] = \sigma^2 + \text{Var}^{**}[z] \quad (35)$$

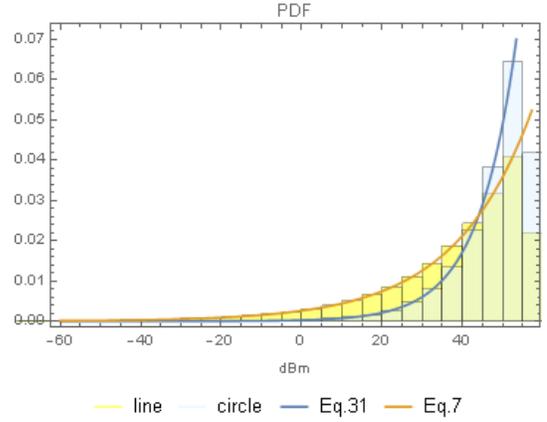


Fig. 3. Comparación entre el histograma de los resultados experimentales obtenidos de la ec.25 y los resultados analíticos dados por las ecuaciones 7 y 31 cuando r es una trayectoria lineal y circular.

B. PDF y CDF de la Potencia Recibida

Para abordar este problema ya conocemos que la PDF de z está dada por la ecuación 26, y la PDF de $P_{Tx} - \{C + X\}$ es una distribución Normal con valor medio $P_{Tx} - C$ y varianza σ^2 . Siguiendo un proceso similar al descrito en la sección III-B, tenemos como resultado:

$$p_\gamma(\gamma) = \left(\frac{2 \cdot R^2}{r_b^2 \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \varphi\right) \cdot \int_{-\infty}^{\Phi_b} e^{2 \cdot \varphi \cdot z} e^{-\frac{(P_{Tx} - C - [\gamma - z])^2}{2\sigma^2}} dz$$

$$p_\gamma(\gamma) = \left(\frac{R^2}{r_b^2} \varphi\right) \cdot e^{2\varphi[U(R)]} \cdot \text{Erfc}\left[\frac{U(r_b)}{\sigma\sqrt{2}}\right] \quad (36)$$

Con $U(x) = \mu(x) + 2\varphi \cdot \sigma^2 - \gamma$

Si estuviéramos interesados en un área en forma de anillo con radio entre r_a y r_b , entonces:

$$p_\gamma(\gamma) = \left(\frac{2 \cdot R^2}{[r_b^2 - r_a^2] \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \varphi\right) \cdot \int_{\Phi_a}^{\Phi_b} e^{2 \cdot \varphi \cdot z} e^{-\frac{(P_{Tx} - C - [\gamma - z])^2}{2\sigma^2}} dz$$

$$p_\gamma(\gamma) = \frac{e^{2\varphi[U(R)]} \cdot \varphi \cdot R^2}{[r_b^2 - r_a^2]} \left\{ \text{Erf}\left[\frac{U(r_a)}{\sigma\sqrt{2}}\right] - \text{Erf}\left[\frac{U(r_b)}{\sigma\sqrt{2}}\right] \right\} \quad (37)$$

y la CDF sería en este caso:

$$P_\gamma(\gamma) = 1 - \mathbb{P}[P_{Rx}(A) > \gamma] \quad (38)$$

El resumen de las ecuaciones desarrolladas se muestra en el cuadro I.

V. SIMULACIONES Y RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se hace un ejercicio numérico con el fin de manipular todas las ecuaciones desarrolladas. Estos resultados se compararán contra los resultados obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo con el fin de hacer su validación.

Analizaremos un escenario con los siguientes parámetros: $P_{Tx} = 23\text{dBm}$, $C = 23\text{dBm}$, $\alpha = 4.4$, $R = 100\text{m}$, $\sigma^2 = 38.09$ y $th = -60\text{dBm}$. Usando una simulación de Monte Carlo con 10^6 muestras por cada variable aleatoria \vec{r} (ver ecuación 6),

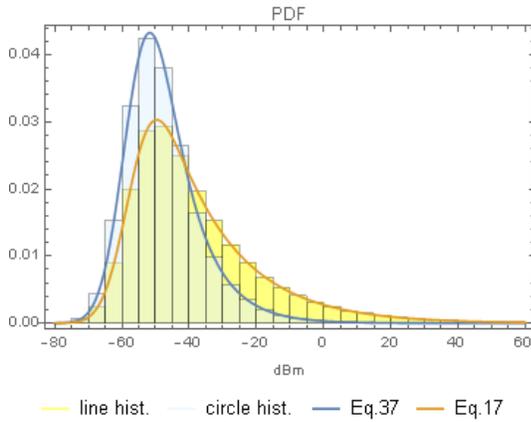


Fig. 4. Comparación del histograma experimental (PDF) obtenido de la ec.1 contra los resultados de la ec.17 y ec.37 cuando r es una trayectoria lineal o un área circular.

X (ver ecuación 1) y A (ver ecuación 30). Con los valores obtenidos para \vec{r} y X en conjunto con la ecuación 1, se crea la CDF y PDF experimental de la potencia recibida R_x y se comparan con los resultados de las ecuaciones 17 y 20 respectivamente. También se han generado 10^6 muestras de r a partir de A para crear el histograma de la ecuación 25 y así compararla con la ecuación 31.

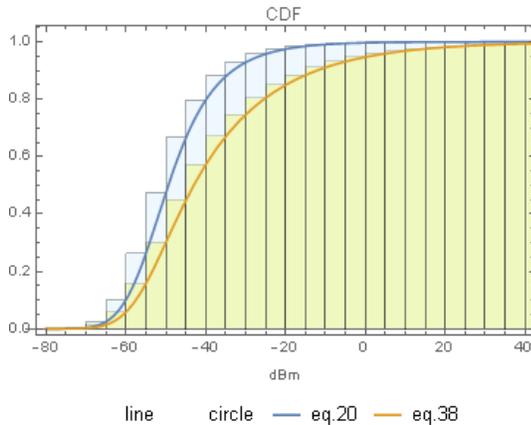


Fig. 5. Comparación de las simulaciones de Monte Carlo (CDF) de la ec.1 contra las ecuaciones 20 y 38 cuando r es una trayectoria lineal o un área circular.

La figura 3 muestra una comparación entre los histogramas de la trayectoria z lineal y dentro de un área circular A contra las ecuaciones 7 y 31. Dichos histogramas fueron obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo usando como parámetro $r_a = 0$.

La figura 4 compara el histograma de las simulaciones de Monte Carlo para $p_\gamma(\gamma)$ contra las ecuaciones 17 y 37. En este caso la trayectoria $\vec{r} \in [0, r_b]$ y $A \in [0, \pi r_b^2]$. Y finalmente, la figura 5 muestra las CDF experimentales de la potencia recibida contra las ecuaciones 20 y 38.

Además de comparar de forma gráfica el ajuste entre las simulaciones y las ecuaciones desarrolladas, en este trabajo también se ha analizado el error entre los resultados experimentales y analíticos. Para esto, se usó la prueba de

bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov (KS). Dicho test da el porcentaje de error entre los valores experimentales y teóricos de las CDF mostradas en la figura 5. En esta prueba se usaron 10^6 muestras y los valores estadísticos (máxima diferencia absoluta entre la CDF experimental y teórica) para las ecuaciones 20 y 38 fueron 6.10×10^{-4} y 8.81×10^{-4} respectivamente. Nótese que el valor estadístico es mucho menor a 1×10^{-2} , el cual es usado habitualmente como un valor de referencia para validar una hipótesis. Esto significa, en nuestros resultados, que se puede aceptar que dichas ecuaciones describen el comportamiento estadístico de las CDF.

Además de las figuras geométricas mencionadas, las ecuaciones 34 y 35 también funcionan si se quiere analizar la potencia recibida en una porción de un anillo, esta forma es más conocida como trapecoide circular. A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de uso de estas ecuaciones con los mismos parámetros mencionados en las simulaciones.

A. Posición Específica o una Trayectoria Circular

El valor medio de la potencia $\mu(r)$ cuando $r = 2000\text{m}$ es obtenido de la ec.2. Entonces $\mu(2000) = -57.24$ dBm. La probabilidad de cobertura es dada con la ec.3:

$$\mathbb{P}[P_{R_x}(2000), -60] = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \text{Erf} \left[\frac{-60 + (57.24)}{(6.17) \cdot \sqrt{2}} \right] \right\} = 0.67$$

B. Una trayectoria Radial desde el Origen hasta r_b

Con $r_b = 2000\text{m}$, el valor medio de la potencia sobre esta trayectoria es dado por la ec.10.

$$\text{Usando } \varphi = \frac{\ln(10)}{10 \cdot (4.4)} = 5.23 \times 10^{-2}, \text{ tenemos:}$$

$$\mathbb{E}[P_{R_x}(\vec{r})] = -57.24 + \frac{1}{5.23 \times 10^{-2}} = -38.14 \text{ dBm}$$

$$\text{y la varianza con ec.11.}$$

$$\text{Var}[P_{R_x}(\vec{r})] = 403.24$$

La probabilidad de cubrimiento se obtiene con la ec.18. Con las constantes: $\beta = 0.4567$, $a = -6.87$, $b = 5.04$, $t_b = -0.3156$, entonces: $\mathbb{P}[P_{R_x}(\vec{r}) > -60] = 0.9411$

C. Una Trayectoria radial desde r_a hasta r_b

Con $r_a = 1000\text{m}$ y $r_b = 2000\text{m}$, el valor medio y la potencia recibida se obtienen con las ecuaciones 14 y 15 respectivamente.

$$\mathbb{E}^*[z] = 51.38 \text{ (usando ec.12),}$$

$$\mathbb{E}[P_{R_x}(\vec{r})] = -51.38 \text{ dBm,}$$

$$\text{Var}^*[z] = 14.27 \text{ (usando ec.13),}$$

$$\text{Var}[P_{R_x}(\vec{r})] = 52.26$$

Ahora, la probabilidad de cubrimiento en esta zona se obtiene con la ec.19 y usando $t_a = -1.8332$, $t_b = -0.1356$ tenemos que: $\mathbb{P}[P_{R_x}(\vec{r}) > -60] = 0.8826$

D. Un Área Circular de Radio r_b

$A = \pi \cdot r_b^2$ y $r \in A$. Con las ecuaciones 28, 29 y 22 calculamos el valor medio, varianza y probabilidad de cubrimiento:

$$\mathbb{E}[P_{R_x}(A)] = -47.69 \text{ dBm;}$$

$$\text{Var}[P_{R_x}(A)] = 129.19,$$

$$\mathbb{P}[P_{R_x}(A) > -60] = 0.8981$$

E. Un Área en Anillo con r desde r_a hasta r_b

Tenemos dos áreas: $A = \pi \cdot r_b^2$ y $B = \pi \cdot r_a^2$. Por tanto, r debe ser ubicada dentro de $r \in A \setminus B$, y con el transmisor en el centro del área. Con las ecuaciones 34, 35 y 23 obtenemos el valor medio, varianza y probabilidad de cubrimiento:

$$\mathbb{E}^{**}[z] = 52.10 \text{ (usando ec.32),}$$

$$\mathbb{E}[P_{Rx}(A)] = -52.10 \text{ dBm,}$$

$$\text{Var}^{**}[z] = 13.31 \text{ (usando ec.33),}$$

$$\text{Var}[P_{Rx}(A)] = 51.40; \mathbb{P}[P_{Rx}(A) > -60] = 0.8644$$

TABLA I
RESUMEN DE LAS FÓRMULAS

	r	$\vec{r} \in$	$\vec{r} \in$	$A \in$	$A \in$
		$[0, r_b]$	$[r_a, r_b]$	$[0, r_b]$	$[r_a, r_b]$
PDF [·]	$N[\mu(r), \sigma^2]$	eq.16	eq.17	eq.36	eq.37
CDF [·]	Erf [·]	eq.20	eq.20	eq.38	eq.38
$\mathbb{P}[P_{Rx} > th]$	eq. 3	eq.18	eq.19	eq.22	eq.23
$\mathbb{E}[\cdot]$	$\mu(r)$	eq.10	eq.14	eq.28	eq.34
$\text{Var}[\cdot]$	σ^2	eq.11	eq.15	eq.29	eq.35

VI. CONCLUSIONES

Este trabajo muestra un desarrollo analítico para caracterizar la potencia RF recibida mediante el valor medio, varianza, CDF y PDF en diferentes geometrías como: trayectoria radial, un punto, un círculo y un anillo. Dicha potencia es una variable aleatoria de tipo *log-normal* que se atenúa en función de la distancia r . A diferencia de trabajos previos, estas fórmulas no requieren de integración numérica u otras técnicas de cómputo, en cambio, se desarrollaron expresiones sencillas y de fácil evaluación.

Se ha validado el ajuste de los resultados para el valor medio, la varianza y PDF mediante simulaciones de Monte Carlo. Adicionalmente, se usó la prueba de bondad de Kolmogorov-Smirnov para evaluar las ecuaciones de las CDF. Con esta validación se encontró un error para las ecuaciones 20 y 38 de 6.10×10^{-4} y 8.81×10^{-4} respectivamente, lo cual demuestra un buen ajuste entre los datos experimentales y analíticos.

Estas nuevas fórmulas son útiles para determinar la probabilidad de cubrimiento y huecos espectrales casi en cualquier área geométrica, usando una combinación de áreas bien conocidas. Además, pueden ser implementadas en simulaciones para mejorar el desempeño computacional debido a su simplicidad.

REFERENCIAS

- [1] S. Salous, *Radio Propagation Measurement and Channel Modelling*, 1st ed. Wiley, 2013.
- [2] T. S. Rappaport, *Wireless communications : principles and practice*. Prentice Hall PTR, 1996.
- [3] S. Haas and J. Shapiro, "Capacity of wireless optical communications," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 21, no. 8, 2003.
- [4] P. Dmochowski, M. Hanif, and P. Smith, "Statistical interference modelling and deployment issues for cognitive radio systems in shadow fading environments," *IET Communications*, vol. 6, no. 13, pp. 1920–1929, sep 2012.
- [5] S. Buyukcorak, M. Vural, and G. K. Kurt, "Lognormal Mixture Shadowing," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 64, no. 10, pp. 4386–4398, oct 2015.
- [6] W. C. Jakes, *Microwave mobile communications*. IEEE Press, 1993.

- [7] K. Sowerby and A. Williamson, "Outage probability calculations for a mobile radio system having two log-normal interferers," *Electronics Letters*, vol. 23, no. 25, p. 1345, 1987.
- [8] E. L. C. K. Shimizu, *Lognormal Distributions: Theory and Application*. New York: Dekker, 1988.
- [9] Z. Bharucha and H. Haas, "The Distribution of Path Losses for Uniformly Distributed Nodes in a Circle," *Research Letters in Communications*, vol. 2008, pp. 1–4, 2008.
- [10] S. Baroudi and Y. R. Shayan, "Outage probability in a circle with uniformly distributed users," in *2012 25th IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE)*. IEEE, apr 2012, pp. 1–4.
- [11] A. Goldsmith, *Wireless communications*. Cambridge University Press, 2005.
- [12] H. Yang, "Simple Formulas for Area Coverage Probability of Cellular Wireless Networks," in *2012 IEEE 75th Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*. IEEE, may 2012, pp. 1–5.
- [13] L. Urquiza, C. Tripp, I. Martin, and M. Aguilar, "Propagation and Packet Error models in VANET simulations," *IEEE Latin America Transactions*, vol. 12, no. 3, pp. 499–507, may 2014.
- [14] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, 2002.



Juan G. Torres currently is an engineering PhD candidate at the Universidad de los Andes, he received his B.Sc. in electronics engineering from the Universidad del Valle in 2007 and his Msc. degree from the Universidad de los Andes in 2014. His field of interest is mobile communications systems.



Roberto Bustamante is a full time professor at Universidad de los Andes. He received the B.Sc. in electronics engineering from the University of Surrey in 1981, Guilford, England; and the Ph.D. degree in electronics engineering from the Universidad of Surrey, supported by ERA Technology, England (1986). His field of interest is electromagnetism.



Carlos E. Caicedo is an Associate Professor at the School of Information Studies at Syracuse University and Director of the Center for Emerging Network Technologies (CENT). He has a Ph.D. in Information Science from the University of Pittsburgh and holds M.Sc. degrees in Electrical Engineering from the University of Texas at Austin and from the Universidad de los Andes, Colombia.